УДК 517.988

**В. В. Хлобыстов, Е. Ф. Кашпур** (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

# АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ЦЕЛЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПРИ ВОЗМУЩЕННЫХ УЗЛОВЫХ ЗНАЧЕНИЯХ

In the Hilbert space with the Gaussian measure, we obtain an estimate of accuracy of interpolation of an entire operator in the case of perturbed node values. We find the value of degree of the interpolational polynomial whose exceeding doesn't improve the estimate of interpolational accuracy.

У гільбертовому просторі з гауссовою мірою одержано оцінку точності інтерполяції цілого оператора у випадку збурених його значень у вузлах та знайдено значення степеня інтерполяційного полінома, перевищення якого не покращує оцінку точності інтерполювання.

Интерполирование операторов вызывает значительный интерес как в теоретическом плане, состоящем в создании общей теории операторного интерполирования (см., например, работы [1 – 3] по построению интерполянтов в линейном, банаховом и гильбертовом пространствах), так и в прикладном, а именно, в перенесении основных результатов интерполяции функций на аналогичные задачи операторного уровня в конкретных функциональных пространствах (см. [4 – 6]).

Задача интерполяции полиномиальных и целых операторов относится к важному классу задач аппроксимации. В [1] построен интерполяционный полином типа Ньютона, который сохраняет многочлены той же степени, но для его построения необходимо существование дифференциалов Гато высших порядков и соответствующих кратных интегралов или интегралов Стилтьеса по оператору скалярного аргумента. В [7] для операторов в гильбертовом пространстве рассмотрена интерполяционная задача, для решения которой требуется лишь информация о значениях интерполируемого оператора в узлах. Однако построенный интерполянт типа Лагранжа в [7] не является инвариантным относительно полиномов соответствующей степени, и поэтому вопросы точности и сходимости интерполяционных процессов к полиномиальным и целым операторам являются актуальными. В [8] из множества интерполянтов выделен интерполяционный полином минимальной нормы на специальным образом выбранной последовательности узлов и показано, что он совпадает с интерполянтом, построенным методом ортогональных моментов [5, 9] по той же системе узлов. Там же приведено условие, при котором последовательность интерполяционных полиномов сходится к интерполируемому целому оператору при увеличении числа узлов и степени интерполянта. Данная статья, в которой рассматривается система узлов, предложенная в [8], является продолжением работы [10], где исследовалась точность интерполяции полиномиальных операторов с возмущенными узловыми значениями. Теперь объектом наших исследований будут целые операторы, а целью работы — анализ точности интерполирования в случае заданной исходной информации в виде возмущенных значений оператора в узлах и определение степени интерполяционного полинома, превышение которой не улучшает точность оценки интерполирования.

Пусть $F: X \to Y$ — целый оператор, где $X$, $Y$ — гильбертовы пространства, причем $X$ — сепарабельное с гауссовой мерой $\mu$ [11], первый момент которой равен нулю, $B$ — корреляционный оператор этой меры ($B$ — ядерный оператор) и $\operatorname{Ker} B = \varnothing$. Напомним, что оператор $F$ называется целым, если он представим в виде

$$F(x) = L_0 + L_1 x + \ldots + L_n x^n + \ldots, \qquad (1)$$

а числовой ряд $\|L_0\| + \|L_1\| \cdot \|x\| + \ldots + \|L_n\| \cdot \|x\|^n + \ldots$ сходится при всех $x \in X$.

Здесь $L_0 \in Y$, $L_k x^k \colon X \to Y$ — $k$-я операторная степень, которая получена из $k$-линейной непрерывной симметричной операторной формы $L_k(v_1, v_2, \ldots, v_k)$: $X^k \to Y$ при $v_1 = v_2 = \ldots = v_k = x$, $\|L_k\|$ — традиционная норма $k$-й операторной степени. Пусть $\Pi_\infty$ — множество целых операторов, оснащенное скалярным произведением [3]

$$(F_1, F_2)_H = \sum_{k=0}^{\infty} \int_X \ldots \int_X \left(L_k^{(1)}(v_1, \ldots, v_k), L_k^{(2)}(v_1, \ldots, v_k)\right)_Y \mu(dv_1) \ldots \mu(dv_k) \qquad (2)$$

и нормой $\|F\|_H = (F, F)_H^{1/2}$, где $L_k^{(1)}$, $L_k^{(2)}$ — $k$-линейные непрерывные симметричные операторные формы, соответствующие операторам $F_1, F_2 \in \Pi_\infty$, $(\cdot, \cdot)_Y$ — скалярное произведение в $Y$. Обозначим через $\{e_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ систему собственных ортонормальных векторов оператора $B$ с собственными числами $\lambda_i > 0$. Выберем из нее первые $m$ векторов $e_i$, $i = \overline{1, m}$, и составим из них элементы $Bx_i$, $i = \overline{0, N}$, следующим образом: положим $Bx_0 = 0$, а в качестве остальных $N$ элементов — всевозможные суммы из этих векторов по одному, по два и т. д. до $n$ слагаемых в каждой сумме, включая повторения. Нетрудно видеть, что количество таких элементов будет $1 + \sum_{k=1}^{n} C_{m+k-1}^{k}$. Также ясно, что элементами $x_i$, $i = \overline{0, N}$, будут $x_0 = 0$ и те же суммы, каждое слагаемое в которых поделено на соответствующее ему собственное число оператора $B$. Так, например, если $Bx_i = e_i$, $i = \overline{1, m}$, $Bx_{m+1} = 2e_i$, $Bx_{m+2} = e_1 + e_2$, то $x_i = e_i / \lambda_i$, $i = \overline{1, m}$, $x_{m+1} = 2e_1 / \lambda_1$, $x_{m+2} = e_1 / \lambda_1 + e_2 / \lambda_2$.

Пусть $\Pi_n$ — множество полиномов, представляющих собой $n$-е частичные суммы рядов вида (1). Задачу полиномиальной операторной интерполяции сформулируем так: найти полином $P_n \in \Pi_n$, для которого выполняются условия

$$P_n(Bx_i) = F(Bx_i), \quad i = \overline{0, N}. \qquad (3)$$

В [8] показано, что интерполянт $P_n^I(x, F)$, построенный методом ортогональных моментов на последовательности узлов $Bx_i$, $i = \overline{0, N}$, вида

$$P_n^I(x, F) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} L_k(F; e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2}) \ldots (x, e_{i_k}) \qquad (4)$$

является интерполянтом минимальной нормы среди всех интерполянтов с такими узлами и решением задачи (3). Здесь $(\cdot, \cdot)$ — скалярное произведение в $X$, а $L_k(F; e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ определяются по формулам [9]

$$L_n(F; e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_n}) = \frac{1}{n!}\Big\{F(e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_n}) -$$
$$- \left[F(e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_{n-1}}) + \ldots + F(e_{i_2} + e_{i_3} + \ldots + e_{i_n})\right] +$$
$$+ \left[F(e_{i_1} + e_{i_2} + \ldots + e_{i_{n-2}}) + \ldots + F(e_{i_3} + e_{i_4} + \ldots + e_{i_n})\right] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{n-1}\left[F(e_{i_1}) + F(e_{i_2}) + \ldots + F(e_{i_n})\right] + (-1)^n F(0)\Big\}. \qquad (5)$$

Для определения $L_{n-1}(F; e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-1}})$ необходимо в (5) заменить $n$ на $n-1$ и $F$ на $F - L_n$, для определения $L_{n-2}(F; e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_{n-2}})$ — $n$ на $n-2$ и $F$ на $F - L_n - L_{n-1}$ и т. д. Интерполяционный полином (4) не сохраняет многочлены соответствующей степени. При определенных условиях в [8] доказана сходимость интерполяционного процесса (4) на последовательности узлов $Bx_i$, $i = \overline{0, N}$, к интерполируемому оператору $F \in \Pi_\infty$ в смысле равенства $\lim\limits_{n\to\infty}\overline{\lim\limits_{m\to\infty}}\left\| F - P_n^I \right\|_H = 0$. В этой статье решены следующие задачи. Получена оценка точности интерполирования в метрике $H$ целого оператора с помощью интерполянта типа Лагранжа (4) при возмущенных узловых значениях. Кроме того, оставаясь в рамках вышеприведенного определения сходимости, найдено такое значение степени $n_0$ для интерполяционного процесса, превышение которого не улучшает точность оценки интерполирования.

Рассмотрим интерполяционную задачу (3) с возмущенными значениями оператора $F: X \to Y$, $F \in \Pi_\infty$, в узлах $Bx_i$, $i = \overline{0, N}$, т. е. $\tilde{F}(Bx_i) = F(Bx_i) + \delta_i$, $\delta_i \in Y$. В этом случае интерполяционный полином будет иметь вид

$$\tilde{P}_n^I(x, F) = \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \tilde{L}_k(F; e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})(x, e_{i_1})(x, e_{i_2})\ldots(x, e_{i_k}). \qquad (6)$$

Здесь значения операторных форм $\tilde{L}_k(F; e_{i_1}, e_{i_2}, \ldots, e_{i_k})$ определяются по формуле (5), где вместо значений оператора в узлах $F(Bx_i)$ используются возмущенные значения $\tilde{F}(Bx_i)$. Нетрудно видеть, что интерполянт $\tilde{P}_n^I(x, F)$ является линейным по $F$, т. е.

$$\tilde{P}_n^I(x, F) = P_n^I(x, F) + P_n^{(\delta)}(x), \qquad (7)$$

где $P_n^{(\delta)}(x)$ — полином, значения которого в узлах равны $\delta_i$, $i = \overline{0, N}$.

Целый оператор $F(x)$ представим в виде

$$F(x) = F_n(x) + R_n(x), \qquad (8)$$

где $F_n(x) = L_0 + L_1 x + \ldots + L_n x^n$, $R_n(x) = L_{n+1}x^{n+1} + L_{n+2}x^{n+2} + \ldots$. Тогда

$$\tilde{F}(Bx_i) = F_n(Bx_i) + R_n(Bx_i) + \delta_i.$$

Справедливо такое утверждение.

**Теорема 1.** *При возмущенных значениях целого оператора в узлах* $Bx_i$, $i = \overline{0, N}$, *оценка точности интерполирования этого оператора полиномом* (6) *в метрике, порожденной скалярным произведением* (2), *определяется по формуле*

$$\left\| F - \tilde{P}_n^I \right\|_H < \left[ \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i \right]^{1/2} + \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^k + \max_{0\le i\le N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\operatorname{Tr} B)^k \right]^{1/2} + \left[ \max_{0\le i\le N} \|\delta_i\|_Y^2 \sum_{k=0}^{n} c_k^2 (\operatorname{Tr} B)^k \right]^{1/2}, \qquad (9)$$

*где* $\operatorname{Tr} B = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k$, $c_k = \alpha_k(1 + \alpha_{k+1})\ldots(1 + \alpha_n)$, $\alpha_k = 2^k / k!$, $k = \overline{1, n}$, $c_0 = 1$.

***Доказательство.*** Оценим точность интерполяции оператора $F \in \Pi_\infty$ полиномом $\tilde{P}_n^I(F)$ в метрике $H$. Поскольку интерполянт $\tilde{P}_n^I(F)$ является линейным по $F$, то

$$\left\| F - \tilde{P}_n^I(F) \right\|_H = \left\| F - P_n^I(F) - P_n^{(\delta)} \right\|_H \le \left\| F - P_n^I(F) \right\|_H + \left\| P_n^{(\delta)} \right\|_H, \qquad (10)$$

$$\left\| F - P_n^I(F) \right\|_H = \left\| F_n + R_n - P_n^I(F_n + R_n) \right\|_H \le$$
$$\le \left\| F_n - P_n^I(F_n) \right\|_H + \left\| R_n - P_n^I(R_n) \right\|_H. \tag{11}$$

С учетом скалярного произведения (2) выполняется равенство $(R_n, P_n^I(R_n))_H = 0$, поэтому

$$\left\| R_n - P_n^I(R_n) \right\|_H^2 = \| R_n \|_H^2 + \left\| P_n^I(R_n) \right\|_H^2.$$

Найдем оценку для $\| R_n \|_H^2$:

$$\| R_n \|_H^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} \int_X \ldots \int_X \| L_k(\nu_1, \ldots, \nu_k) \|_Y^2 \mu(d\nu_k) \ldots \mu(d\nu_1) \le$$

$$\le \sum_{k=n+1}^{\infty} \| L_k \|^2 \int_X \ldots \int_X \| \nu_1 \|^2 \ldots \| \nu_k \|^2 \mu(d\nu_k) \ldots \mu(d\nu_1) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \| L_k \|^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k. \tag{12}$$

Здесь и в последующих преобразованиях, связанных с вычислением континуальных интегралов, используется формула [11]

$$\int_X (\nu, e_i)(\nu, e_j) \mu(d\nu) = (Be_i, e_j) = \lambda_i (e_i, e_j) = \lambda_i \delta_{ij},$$

где $\delta_{ij}$ — символ Кронекера. Оценим сверху величину

$$\left\| P_n^I(R_n) \right\|_H^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_X \ldots \int_X \left\| \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} L_k(R_n; e_{i_1}, \ldots, e_{i_k})(\nu_1, e_{i_1}) \ldots (\nu_k, e_{i_k}) \right\|_Y^2 \mu(d\nu_k) \ldots \mu(d\nu_1).$$

Используя соотношения (5) при $F \equiv R_n$, получаем оценки

$$\left\| L_k(R_n; e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) \right\|_Y \le c_k \max_{1 \le i \le N} \| R_n(Bx_i) \|_Y,$$

где $c_k$ определены в формулировке теоремы 1. Тогда

$$\left\| P_n^I(R_n) \right\|_H^2 \le \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \max_{1 \le i \le N} \| R_n(Bx_i) \|_Y^2 \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} \int_X (\nu_k, e_{i_k})^2 \mu(d\nu_k) \ldots \int_X (\nu_1, e_{i_1})^2 \mu(d\nu_1) =$$

$$= \max_{1 \le i \le N} \| R_n(Bx_i) \|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k. \tag{13}$$

Из (12), (13) следует, что

$$\left\| R_n - P_n^I(R_n) \right\|_H \le \left\{ \sum_{k=n+1}^{\infty} \| L_k \|^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k + \max_{1 \le i \le N} \| R_n(Bx_i) \|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k \right\}^{1/2}. \tag{14}$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (11). Для этого рассмотрим полиномиальную интерполяционную задачу (3) при $F \equiv F_n(x)$. Интерполянт $P_n^I(x, F_n)$, определяемый формулой (4), будет ее решением [12]. На основании [9]

$$F_n(x) - P_n^I(x, F_n) = \sum_{k=0}^{n} \left[ L_k x^k - L_k \left( \sum_{i=1}^{m} (x, e_i) e_i \right)^k \right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\Bigg[L_k\Bigg(x-\sum_{i_1=1}^{m}(x,e_{i_1})e_{i_1},x,\ldots,x\Bigg)+L_k\Bigg(\sum_{i_1=1}^{m}(x,e_{i_1})e_{i_1},x\ -$$

$$-\sum_{i_2=1}^{m}(x,e_{i_2})e_{i_2},x,\ldots,x\Bigg)+\ldots+L_k\Bigg(\sum_{i_1=1}^{m}(x,e_{i_1})e_{i_1},\sum_{i_2=1}^{m}(x,e_{i_2})e_{i_2},\ \ldots$$

$$\ldots,\ \sum_{i_{k-1}=1}^{m}(x,e_{i_{k-1}})e_{i_{k-1}},\ x-\sum_{i_k=1}^{m}(x,e_{i_k})e_{i_k}\Bigg)\Bigg]. \tag{15}$$

Из определения нормы полиномиального оператора в метрике $H$ и равенства (15), по аналогии с [10], следует выполнение соотношений

$$\left\|F_n-P_n^I(F_n)\right\|_H^2 = \sum_{k=0}^{n}\int_X\ldots\int_X\Bigg\|L_k\Bigg(\nu_1-\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\nu_2,\ldots,\nu_k\Bigg)+$$

$$+L_k\Bigg(\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\ \nu_2-\sum_{i_2=1}^{m}(\nu_2,e_{i_2})e_{i_2},\nu_3,\ldots,\nu_k\Bigg)+\ldots$$

$$\ldots+L_k\Bigg(\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\ \sum_{i_2=1}^{m}(\nu_2,e_{i_2})e_{i_2},\ldots,\nu_k-\sum_{i_k=1}^{m}(\nu_k,e_{i_k})e_{i_k}\Bigg)\Bigg\|_Y^2\mu(d\nu_1)\ldots\mu(d\nu_k)\ \le$$

$$\le \sum_{k=0}^{n}k\int_X\ldots\int_X\Bigg\{\Bigg\|L_k\Bigg(\nu_1-\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\nu_2,\ldots,\nu_k\Bigg)\Bigg\|_Y^2+$$

$$+\Bigg\|L_k\Bigg(\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\nu_2-\sum_{i_2=1}^{m}(\nu_2,e_{i_2})e_{i_2},\nu_3,\ldots,\nu_k\Bigg)\Bigg\|_Y^2+\ldots$$

$$\ldots+\Bigg\|L_k\Bigg(\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\ \sum_{i_2=1}^{m}(\nu_2,e_{i_2})e_{i_2},\ldots,\nu_k-\sum_{i_k=1}^{m}(\nu_k,e_{i_k})e_{i_k}\Bigg)\Bigg\|_Y^2\Bigg\}\mu(d\nu_1)\ldots\mu(d\nu_k). \tag{16}$$

Оценим $k$-е слагаемое в правой части (16):

$$\int_X\ldots\int_X\Bigg\|L_k\Bigg(\nu_1-\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\nu_2,\ldots,\nu_k\Bigg)\Bigg\|_Y^2\mu(d\nu_1)\ldots\mu(d\nu_k)\ \le$$

$$\le \int_X\ldots\int_X\|L_k\|^2\Bigg\|\nu_1-\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1}\Bigg\|^2\|\nu_2\|^2\ldots\|\nu_k\|^2\mu(d\nu_1)\ldots\mu(d\nu_k)\ =$$

$$= \|L_k\|^2(\operatorname{Tr}B)^{k-1}\int_X\Bigg\|\sum_{i_1=m+1}^{\infty}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1}\Bigg\|^2\mu(d\nu_1)\ =$$

$$= \|L_k\|^2(\operatorname{Tr}B)^{k-1}\int_X\sum_{i_1=m+1}^{\infty}(\nu_1,e_{i_1})^2\mu(d\nu_1)\ =\ \|L_k\|^2(\operatorname{Tr}B)^{k-1}\sum_{i=m+1}^{\infty}\lambda_i, \tag{17}$$

$$\int_X\ldots\int_X\Bigg\|L_k\Bigg(\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1},\ \nu_2-\sum_{i_2=1}^{m}(\nu_2,e_{i_2})e_{i_2},\nu_3,\ldots,\nu_k\Bigg)\Bigg\|_Y^2\mu(d\nu_1)\ldots\mu(d\nu_k)\ \le$$

$$\le \int_X\ldots\int_X\|L_k\|^2\Bigg\|\sum_{i_1=1}^{m}(\nu_1,e_{i_1})e_{i_1}\Bigg\|^2\Bigg\|\nu_2-\sum_{i_2=1}^{m}(\nu_2,e_{i_2})e_{i_2}\Bigg\|_Y^2\|\nu_3\|^2\ldots\|\nu_k\|^2\mu(d\nu_1)\ldots\mu(d\nu_k)\ =$$

$$= \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-2} \int\limits_X \left\| \mathrm{v}_2 - \sum_{i_2=1}^{m} (\mathrm{v}_2, e_{i_2}) e_{i_2} \right\|^2 \mu(d\mathrm{v}_2) \int\limits_X \left\| \sum_{i_1=1}^{m} (\mathrm{v}_1, e_{i_1}) e_{i_1} \right\|^2 \mu(d\mathrm{v}_1) =$$

$$= \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-2} \int\limits_X \left\| \sum_{i_2=m+1}^{\infty} (\mathrm{v}_2, e_{i_2}) e_{i_2} \right\|^2 \mu(d\mathrm{v}_2) \int\limits_X \sum_{i_1=1}^{m} (\mathrm{v}_1, e_{i_1})^2 \mu(d\mathrm{v}_1) =$$

$$= \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-2} \sum_{i_1=1}^{m} \lambda_{i_1} \int\limits_X \sum_{i_2=m+1}^{\infty} (\mathrm{v}_2, e_{i_2})^2 \mu(d\mathrm{v}_2) =$$

$$= \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-2} \sum_{i_1=1}^{m} \lambda_{i_1} \sum_{i_2=m+1}^{\infty} \lambda_{i_2} < \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i, \tag{18}$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

$$\int\limits_X \ldots \int\limits_X \left\| L_k \left( \sum_{i_1=1}^{m} (\mathrm{v}_1, e_{i_1}) e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{m} (\mathrm{v}_2, e_{i_2}) e_{i_2}, \ldots, \mathrm{v}_k - \sum_{i_k=1}^{m} (\mathrm{v}_k, e_{i_k}) e_{i_k} \right) \right\|_Y^2 \mu(d\mathrm{v}_1) \ldots \mu(d\mathrm{v}_k) \le$$

$$\le \|L_k\|^2 \int\limits_X \ldots \int\limits_X \left\| \sum_{i_1=1}^{m} (\mathrm{v}_1, e_{i_1}) e_{i_1} \right\|^2 \left\| \sum_{i_2=1}^{m} (\mathrm{v}_2, e_{i_2}) e_{i_2} \right\|^2 \times \ldots$$

$$\ldots \times \left\| \mathrm{v}_k - \sum_{i_k=1}^{m} (\mathrm{v}_k, e_{i_k}) e_{i_k} \right\|^2 \mu(d\mathrm{v}_1) \ldots \mu(d\mathrm{v}_k) \le$$

$$\le \|L_k\|^2 \int\limits_X \ldots \int\limits_X \sum_{i_1=1}^{m} (\mathrm{v}_1, e_{i_1})^2 \sum_{i_2=1}^{m} (\mathrm{v}_2, e_{i_2})^2 \times \ldots$$

$$\ldots \times \sum_{i_{k-1}=1}^{m} (\mathrm{v}_{k-1}, e_{i_{k-1}})^2 \sum_{i_k=m+1}^{\infty} (\mathrm{v}_k, e_{i_k})^2 \mu(d\mathrm{v}_1) \ldots \mu(d\mathrm{v}_k) =$$

$$= \|L_k\|^2 \left( \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \right)^{k-1} \sum_{k=m+1}^{\infty} \lambda_k < \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i. \tag{19}$$

Подставляя (17) – (19) в правую часть неравенства (16), получаем

$$\left\| F_n - P_n^I (F_n) \right\|_H^2 < \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i. \tag{20}$$

Тогда с учетом (14), (20) соотношение (11) будет иметь вид

$$\left\| F - P_n^I (F_n) \right\|_H < \left[ \sum_{k=1}^{n} k^2 \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^{k-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} \lambda_i \right]^{1/2} +$$

$$+ \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (\operatorname{Tr} B)^k + \max_{0 \le i \le N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\operatorname{Tr} B)^k \right]^{1/2}. \tag{21}$$

Использовав определение скалярного произведения полиномов $(P_1, P_2)_H$, оценим сверху величину

$$\left\| P_n^{(\delta)} \right\|_H^2 = \sum_{k=0}^{n} \int\limits_X \ldots \int\limits_X \left( \sum_{i_1, \ldots, i_k = 1}^{m} L_k^{(\delta)} (e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}) (\mathrm{v}_1, e_{i_1}) \times \ldots \right.$$

$$\left. \ldots \times (\mathrm{v}_k, e_{i_k}), \sum_{j_1, \ldots, j_k = 1}^{m} L_k^{(\delta)} (e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}) (\mathrm{v}_1, e_{j_1}) \ldots (\mathrm{v}_k, e_{j_k}) \right)_Y \mu(d\mathrm{v}_1) \ldots \mu(d\mathrm{v}_k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{m} \left\| L_k^{(\delta)}(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) \right\|_Y^2 \lambda_{i_1}\ldots\lambda_{i_k} .$$

Из соотношений (5) можно получить неравенства

$$\left\| L_k^{(\delta)}(e_{i_1},\ldots,e_{i_k}) \right\|_Y \le c_k \max_{0\le i\le N} \|\delta_i\|_Y, \quad k = \overline{1,n}, \quad c_0 = 1,$$

где $c_k$ определены в формулировке теоремы 1, откуда следует оценка

$$\left\| P_n^{(\delta)} \right\|_H^2 < \max_{0\le i\le N} \|\delta_i\|_Y^2 \sum_{k=0}^{n} c_k^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k . \tag{22}$$

Подставляя (21), (22) в правую часть неравенства (10), получаем оценку (9). Теорема доказана.

Как показано в [8], последовательность $S_n^2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k$ сходится при $n \to \infty$. Обозначим ее предел через $S^2$. Поскольку оператор $F$ — целый, то ряд $\sum \|L_k\|^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k$ также сходящийся. Обозначим через $\varphi_n^2$ остаток этого ряда после $n$-го члена. Как следствие теоремы 1 справедливо такое утверждение.

**Теорема 2.** *Пусть при возмущенных значениях в узлах $Bx_i$, $i = \overline{0,N}$, интерполируемого целого оператора $F(x)$ выполнены условия:*

$$\max_{0\le i\le N} \|\delta_i\|_Y^2 \le \delta^2, \qquad \max_{0\le i\le N} \|R_n(Bx_i)\|_Y^2 \le \psi_n^2, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

*Тогда справедлива оценка*

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left\| F - \tilde{P}_n^I \right\|_H \le \left[ \varphi_n^2 + (S^2 - 1)\psi_n^2 \right]^{1/2} + S\delta . \tag{23}$$

***Доказательство.*** В условиях теоремы из (9) получаем

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left\| F - \tilde{P}_n^I \right\|_H \le \left[ \sum_{k=n+1}^{\infty} \|L_k\|^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k + \psi_n^2 \sum_{k=1}^{n} c_k^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k \right]^{1/2} + \left[ \sum_{k=0}^{n} c_k^2 (\mathrm{Tr}\, B)^k \right]^{1/2} \delta,$$

откуда и следует оценка (23).

**Теорема 3.** *Пусть выполнены условия теоремы 2 и $\psi_n \to 0$ монотонно при $n \to \infty$. Тогда при возмущенных значениях целого оператора $F(x)$ в узлах $Bx_i$, $i = \overline{0,N}$, точность интерполирования в смысле оценки (23) не улучшается при $n \ge n_0$, где $n_0$ — максимальное целое число, которое удовлетворяет неравенству*

$$\varphi_n^2 + (S^2 - 1)\psi_n^2 \ge S^2 \delta^2 .$$

Доказательство следует непосредственно из оценки (23).

В качестве примера рассмотрим оператор $F \in \Pi_\infty$, для которого значение $n_0$ можно получить конструктивно. Пусть для $F$ справедливо неравенство $\|L_{n+k}\| \le (q/n)^{n+k}$, $k = 1, 2, \ldots$, $q \in (0; 1)$. Представим оператор $B$ в пространстве $X$ сходящимся рядом

$$Bx = \sum_{k=1}^{\infty} q^k (x, e_k) e_k , \tag{24}$$

где $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормальный базис в $X$. В этом случае $B$ — ядерный самосопряженный положительный оператор, а $e_k$, $k = 1, 2, \ldots$, — ортонормальные собственные векторы этого оператора с соответствующими собственными значениями $q^k$. Согласно [11] $B$ является корреляционным оператором некоторой гауссовой меры $\mu$ на $X$. Эта мера порождает скалярное произведение (2) и соответствующую норму на множестве $\Pi_\infty$. Тогда, используя (9), нетрудно показать, что

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \left\| F - \tilde{P}_n^I \right\|_H \le \left\{ \left( \frac{q^2}{1-q} \right)^{n+1} \left[ \frac{1-q}{1-q-q^3} + \frac{S^2-1}{(1-q)^2} \right] \right\}^{1/2} + S\delta \qquad (25)$$

при $1-q-q^3>0$. Из (25) следует такой результат.

Если заданы возмущенные значения целого оператора $F(x)$ в узлах $Bx_i$, $i = \overline{0,N}$, оператор $B$ определяется соотношением (24) и число $n$ превышает значение $n_0$, вычисляемое по формуле

$$n_0 = E\left\{ 2\log_{\frac{q^2}{1-q}}(S\delta) - \log_{\frac{q^2}{1-q}}\left[ \frac{1-q}{1-q-q^3} + \frac{S^2-1}{(1-q)^2} \right] \right\} - 1,$$

где $E(x)$ — целая часть числа $x$, $1-q-q^3>0$, $q \neq \left(\sqrt{5}-1\right)/2$, то точность интерполирования оператора $F$ в метрике $H$ не улучшается в смысле оценки (25).

Это утверждение доказывается путем приравнивания двух слагаемых из правой части неравенства (25).

Отметим, что анализ точности интерполирования полиномиального оператора $F_n(x)$ в случае его возмущенных значений в узлах $Bx_i$, $i = \overline{0,N}$, проведен в [10]. При этом найдено такое значение $m_0$ (количество ортонормальных узлов), превышение которого не улучшает точность оценки интерполирования.

***Замечание.*** Как отмечалось выше, в работах [8, 12] показано, что интерполянт минимальной нормы, построенный на последовательности узлов $Bx_i$, $i = \overline{0,N}$, тождественно совпадает с интерполяционным полиномом, который рассмотрен в данной статье. Следовательно, полученные здесь результаты справедливы и для интерполянта минимальной нормы.

1. *Егоров А. Д., Соболевский П. Н., Янович Л. А.* Приближенные методы вычисления континуальных интегралов. – Минск: Наука и техника, 1985. – 310 с.
2. *Prenter P. M.* Lagrange and Hermite interpolation in Banach spaces // Approxim. Theory. – 1971. – **4**, № 4. – P. 419 – 432.
3. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В., Янович Л. А.* Интерполирование операторов. – Киев: Наук. думка, 2000. – 407 с.
4. *Porter W. A.* Synthesis of polynomic system // SIAM J. Math. Anal. – 1980. – **11**, № 2. – P. 308 – 315.
5. *Пупков К. И., Капалин В. И., Ющенко А. С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. – М.: Наука, 1976. – 448 с.
6. *Porter W. A.* Data interpolation, causality structure and system identification // Inform. and Contr. – 1975. – № 29. – P. 217 – 233.
7. *Макаров В. Л., Хлобыстов В. В.* Основы теории полиномиального операторного интерполирования. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1998. – 278 с.
8. *Хлобыстов В. В.* К вопросу о сходимости интерполяционных процессов в гильбертовом пространстве // Кибернетика и системный анализ. – 2000. – № 6. – С. 166 – 172.
9. *Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф.* К задаче интерполирования полиномиальных операторов // Там же. – 1996. – № 3. – С. 102 – 108.
10. *Хлобыстов В. В., Кашпур Е. Ф.* О точности полиномиального интерполирования в гильбертовом пространстве в случае возмущенных значений оператора в узлах // Там же. – 2002. – № 1. – С. 168 – 173.
11. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3 т. – М.: Наука, 1971. – Т. 1. – 664 с.
12. *Хлобыстов В., Кашпур Е.* О сходимости интерполяционного процесса с минимальной нормой в гильбертовом пространстве // Журн. обчисл. та прикл. математики. – 1999. – **84**, № 1. – С. 124 – 127.

Получено 13.12.2001,
после доработки — 13.05.2002