УДК 517

В. Г. Бондаренко (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

ВОЗМУЩЕННОЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ НА РИМАНОВОМ МНОГООБРАЗИИ

On a manifold of nonpositive curvature, we construct the fundamental solution of an equation with perturbed diffusion operator.

На многовиді недодатної кривизни побудовано фундаментальний розв'язок рівняння із збуреним оператором дифузії.

Пусть M — риманово многообразие размерности d со скалярным произведением $(\,,)$ на T_xM и метрикой ρ, $p_0(t,x,y)$ — ядро теплопроводности, т. е. фундаментальное решение параболического уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{div}\operatorname{grad} u \equiv \frac{1}{2}\Delta u. \tag{1}$$

Пусть на M задано гладкое (класса C^2) поле обратимых операторов $A(x)$: $T_xM \to T_xM$. Рассмотрим возмущенное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\operatorname{div}(I + B(x))\operatorname{grad} u, \tag{2}$$

где $B(x) = (A^*(x)A(x))^{-1}$, и пусть $p(t,x,y)$ — его фундаментальное решение. Цель настоящей работы — обоснование предложенного ниже метода построения $p(t,x,y)$. Это решение будем искать в виде

$$p(t,x,y) = m(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_M m(t-\tau,x,z)\, r(\tau,z,y)\,dz, \tag{3}$$

где начальное приближение

$$m(t,x,y) = \int_M p_0(t,z,y)\, p_1(t,x,z)\,dz, \tag{4}$$

$$p_1(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}\sqrt{\det B(z)}} \exp\left\{-\frac{1}{2t}\alpha(x,z)\right\},$$

$$\alpha(x,z) = \rho^2(x,z)\left(B^{-1}(x)e(x,z), e(x,z)\right).$$

Здесь через $e(x,z) \in T_xM$ обозначен единичный вектор, касательный к геодезической, соединяющей точки x и z.

Стандартная процедура вычисления функции $r(t,x,y)$, используемой в (3), приводит к уравнению Вольтерра

$$r(t,x,y) = M(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_M M(t-\tau,x,z)\, r(\tau,z,y)\,dz,$$

решение которого имеет вид

$$r(t,x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} r_n(t,x,y), \qquad r_n(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_M M(t-\tau,x,z)\, r(\tau,z,y)\,dz, \tag{5}$$

где невязка

$$M(t,x,y) = r_0(t,x,y) = \frac{1}{2}\operatorname{div}(I + B(x))\operatorname{grad} m(t,x,y) - \frac{\partial m}{\partial t}(t,x,y),$$

I — единичный оператор.

Представление (4) позволяет с помощью формулы интегрирования по частям относительно меры $p_1(t,x,z)\,dz$ преобразовать выражение для невязки к виду

$$M(t,x,y) = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2,$$

где

$$\mathrm{I}_1 = \int\limits_M \left(\frac{1}{2}\operatorname{div} B(x)\operatorname{grad} p_1(t,x,z) - \frac{\partial}{\partial t} p_1(t,x,z)\right) p_0(t,x,z)\,dz,$$

$$\mathrm{I}_2 = \int\limits_M \left(\Delta_x p_1(t,x,z) - \Delta_z p_1(t,x,z)\right) p_0(t,z,y)\,dz,$$

не содержащему производных функции p_0.

1. Обозначения и условия. Обозначим через γ геодезическую, соединяющую точки x и y такие, что $\gamma(0) = y$ и $\gamma(\rho(x,y)) = x$, а через $R(x)$ — тензор кривизны. Тогда $e(x,y) = -\dot\gamma(x)$ и тензор Риччи

$$R(x)(U,V) = \sum_{k=1}^{n} (R(x)(U,e_k)V, e_k),$$

где $\{e_k\}$ — ортобазис в $T_x M$.

Пусть для многообразия M и возмущения $B(x)$ выполняются такие условия:

1) M — полное односвязное многообразие неположительной кривизны, т. е. $(R(x)(U,V)U,V) \ge 0$;

2) $\| R(x)(X,Y)Z \| \le c_1 \sqrt{\operatorname{Ric}(x)(X,X)\operatorname{Ric}(x)(Y,Y)\operatorname{Ric}(x)(Z,Z)}$ для всех $x \in M$ и $X, Y, Z \in T_x M$;

3) существует такая константа c_2, что вдоль любой геодезической

$$\int\limits_0^\infty s \operatorname{Ric}(\gamma(s))(\dot\gamma(s), \dot\gamma(s))\,ds < c_2;$$

4) $$\|(\nabla_X R)(\gamma(s))(Y, \dot\gamma(s))Z\| < f_1(\gamma(s)) \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \|Z\|,$$
$$\|(\nabla_U \nabla_X R)(\gamma(s))(Y, \dot\gamma(s))Z\| < f_2(\gamma(s)) \|U\| \cdot \|X\| \cdot \|Y\| \cdot \|Z\|,$$

где функции f_k удовлетворяют неравенству $\int\limits_0^\infty s^2 f_k(\gamma(s))\,ds < c_3$;

5) $\lambda_1 I \le B(x) \le \lambda_2 I$, $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$, и две ковариантные производные $B(x)$ ограничены.

Из условий 1 – 4 можно получить следующие свойства ядра теплопроводности [1, 2]:

a) $$e^{-f(x,y)-kt} \le \frac{p_0(t,x,y)}{q(t,x,y)} \le 1, \quad \text{где} \quad q(t,x,y) = (2\pi t)^{d/2} \exp\left\{-\frac{\rho^2(x,y)}{2t}\right\},$$

$$f(x,y) = \int\limits_0^\rho (\rho - \tau)\operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot\gamma(\tau), \dot\gamma(\tau))\,d\tau, \qquad \rho = \rho(x,y);$$

b) $$\operatorname{grad} \ln p_0(t,x,y) = \frac{\rho(x,y)}{t} e(x,y) + w(t,x,y), \qquad \|w(t,x,y)\| < c.$$

Интегрирование последнего равенства приводит к представлению

$$p_0(t,z,y) = \varphi(t,x,y,z)\, p_0(t,x,y), \tag{6}$$

где

$$\varphi(t, x, y, z) < c\exp\left\{\frac{1}{t}\rho(x, y)\rho(x, z)\big(e(x, z), e(x, y)\big)\right\}.$$

Ниже используется формула замены переменной

$$\frac{\rho(x, y)}{\sqrt{t}}e(x, y) = U \in T_xM, \quad z = \operatorname{Exp}_x \sqrt{t}\,U \tag{7}$$

в интеграле

$$\int_M f(y)q(t, x, y)\,dy = \int_{T_xM} f(\sqrt{t}\operatorname{Exp}_x u)J(\sqrt{t}\,u)\mu_x(du),$$

где μ_x — каноническая гауссова мера, а якобиан $J < c$.

Для преобразования и оценивания слагаемых в невязке используется аппарат базисных полей Якоби [3].

2. Результаты.

Лемма 1. *Справедливо неравенство*

$$m(t, x, y) < cp_0(t, x, y)\exp\left\{\frac{1}{2t}\rho^2(x, y)\big(B(x)e(x, y), e(x, y)\big)\right\}.$$

Доказательство. Из представления (6) следует оценка

$$m(t, x, y) < cp_0(t, x, y)\exp\left\{\frac{1}{2t}\rho^2(x, y)\big(B(x)e(x, y), e(x, y)\big)\right\} \times$$

$$\times \int_M (2\pi t)^{-d/2}(\det B(z))^{1/2}\exp\left\{-\frac{1}{2t}\big(B^{-1}(x)(\rho(x, z)e(x, z) -\right.$$

$$\left. - H(x), \rho(x, z)e(x, z)) - H(x)\big)\right\}dz,$$

где поле

$$H(x) = \rho(x, y)B(x)e(x, y),$$

и замена

$$U = \frac{1}{\sqrt{t}}B^{-1/2}(x)\big(p(x, z)e(x, z) - H(x)\big)$$

приводит к требуемой оценке.

Определим в T_xM оператор $D(x)$ равенством

$$D(x)U = \nabla_U\rho(x, y)\dot{\gamma}(x).$$

Как показано в [1], $D(x)$ симметричен, $D(x) \geq I$ и

$$\operatorname{tr}(D(x) - I) \leq \int_0^\rho \tau\operatorname{Ric}(\gamma(\tau))(\dot{\gamma}(\tau), \dot{\gamma}(\tau))\,d\tau < c.$$

Лемма 2. *Невязка* $M(t, x, y)$ *удовлетворяет оценке*

$$|M(t, x, y)| < \frac{c}{\sqrt{t}}\exp\left\{\frac{1+\varepsilon}{2t}\rho^2(x, y)\big(B(x)\dot{\gamma}(x), \dot{\gamma}(x)\big)\right\}p_0(t, x, y).$$

Доказательство. Для оценивания I_1 вычислим подынтегральную функцию

$$\frac{1}{2}\operatorname{div}B(x)\operatorname{grad}p_1(t, x, z) - \frac{\partial}{\partial t}p_1(t, x, z) =$$

$$= p_1(t, x, z)\left(\frac{\rho^2(x, z)}{t^2}\big((B^{-1}(x)D(x)B(x)D(x) - I)B^{-1}(x)\dot{\gamma}(x), \dot{\gamma}(x)\big) + \right.$$

$$+\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(I - B(x)D(x)B^{-1}(x)D(x)\right) - \frac{\rho(x,z)}{4t}\left(2\sum_{j=1}^{n}\left((\nabla_{X_j}B(x)D(x)B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right) + \right.$$

$$+\,2\sum_{j=1}^{n}\left((\nabla_{B(x)X_j}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\,D(x)X_j\right)+$$

$$\left. +\,(\operatorname{tr}D(x)-I)\sum\left((\nabla_{B(x)\dot\gamma(x)}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right)\right) -$$

$$-\frac{\rho^2(x,z)}{4t}\sum_{j=1}^{n}\left((\nabla_{X_j}\nabla_{B(x)X_j}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right) + \frac{\rho^3(x,z)}{2t^2}\times$$

$$\times\left((\nabla_{B(x)D(x)B^{-1}(x)\dot\gamma(x)}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right) +$$

$$+\frac{\rho^4(x,z)}{8t^2}\sum_{j=1}^{n}\left((\nabla_{X_j}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right)\left((\nabla_{B(x)X_j}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right),$$

где $X_j = X_j(\rho)$ — базисные поля Якоби вдоль γ. В силу выполнения сформулированных условий на многообразие и на оператор $B(x)$ модуль полученной величины не превышает

$$\frac{c}{\sqrt{t}}\,p_1(t,x,z)\left(1+\frac{\rho^4(x,z)}{t^2}\right).$$

Таким же образом вычисляются лапласианы:

$$\Delta_x p_1(t,x,z) = p_1(t,x,z)\left(\frac{1}{4t^2}\|\operatorname{grad}_x\alpha(x,z)\|^2 - \frac{1}{2t}\Delta_x\alpha(x,z)\right) =$$

$$= p_1(t,x,z)\left(\frac{\rho^2(x,z)}{t^2}\|D(x)B^{-1}(x)\dot\gamma(x)\|^2 + \right.$$

$$+\frac{\rho^3(x,z)}{t^2}\left((\nabla_{D(x)B^{-1}(x)\dot\gamma(x)}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right) +$$

$$+\frac{\rho^4(x,z)}{4t^2}\sum_{k=1}^{n}\left((\nabla_{X_k}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right)^2 - \frac{1}{t}\operatorname{tr}D(x)B^{-1}(x)D(x) -$$

$$-\frac{\rho^2(x,z)}{t}\operatorname{Ric}(x)(\dot\gamma(x),B^{-1}(x)\dot\gamma(x)) -$$

$$-2\frac{\rho(x,z)}{t}\sum_{k=1}^{n}\left((\nabla_{X_k}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),D(x)X_k\right) -$$

$$-\frac{\rho^2(x,z)}{2t}\sum_{k=1}^{n}\left((\nabla^2_{X_k}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right) -$$

$$-\frac{\rho(x,z)}{2t}\left((\nabla_{\dot\gamma(x)}B^{-1}(x))\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right)\times$$

$$\times(\operatorname{tr}D(x)-1) - \frac{1}{t}\sum_{k=2}^{n}\left[\left(\rho^2(x,z)B^{-1}(x)\dot\gamma(x),\nabla_{\dot\gamma(x)}\nabla_{X_k}X_k\right) + \right.$$

$$\left.\left. +\,(B^{-1}(x)\dot\gamma(x),\dot\gamma(x))\operatorname{tr}(D(x)-1)\right]\right).$$

Представление [3] вида

$$\sum_{k=2}^{n}\nabla_{\dot\gamma}\nabla_{X_k}X_k = -\operatorname{Ric}(x)(\dot\gamma(x),\dot\gamma(x))\dot\gamma(x) - \sum_{k=2}^{n}(X_k',X_k')\dot\gamma(x) - U,\quad \|U\| < c,$$

позволяет преобразовать последнюю сумму в лапласиане, в результате чего получим

$$\Delta_x p_1(t,x,z) = p_1(t,x,z)\left(\frac{\rho^2(x,z)}{t^2}\|D(x)B^{-1}(x)\dot\gamma(x)\|^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{t}\operatorname{tr} D(x)B^{-1}(x)D(x) + \nu_1\right),$$

где

$$|\nu_1| < c\left(\frac{\rho}{t}+\frac{\rho^2}{t}+\frac{\rho^3}{t^2}+\frac{\rho^4}{t^2}\right) < \frac{c}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\rho^4}{t^2}\right).$$

Аналогично,

$$\Delta_z p_1(t,x,z) = p_1(t,x,z)\left(\frac{1}{4}\left\|\frac{\operatorname{grad}_z \alpha(x,z)}{t} + \operatorname{grad}_z \ln\det B(z)\right\|^2 - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2t}\Delta_z\alpha(x,z) - \frac{1}{2}\Delta_z \ln\det B(z)\right).$$

При вычислении градиента и лапласиана введем базисные поля Якоби $Y_k(\tau)$ вдоль геодезической $\sigma(\tau)=\gamma(\rho-\tau)$, в результате чего получим представление

$$\Delta_z p_1(t,x,z) = p_1(t,x,z)\left[\frac{\rho^2(x,z)}{t^2}\left((B^{-1}(x)\dot\gamma(x),\dot\gamma(x)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=2}^{n}(B^{-1}(x)\dot\gamma(x),\rho Y_k'(0)) - \frac{1}{2t}\operatorname{tr} B^{-1}(x) + \nu_2\right)\Bigg],$$

где

$$|\nu_2| < \frac{c}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\rho^2(x,z)}{t}\right).$$

Поскольку

$$\rho Y_k'(0) = Y_k(\rho) - \int_0^\rho (\rho-\tau)\Phi(\rho,\tau)R(\sigma(\tau))(\dot\sigma(\tau),Y_k(\tau))\dot\sigma(\tau)\,d\tau,$$

где $\Phi(\rho,\tau)$ — оператор параллельного сдвига вдоль σ, то

$$|(\Delta_x-\Delta_z)p_1(t,x,z)| < \frac{c}{\sqrt{t}}\left(1+\frac{\rho^4(x,z)}{t^2}\right)p_1(t,x,z).$$

Таким образом,

$$|M(t,x,y)| < \frac{c}{\sqrt{t}}p_0(t,x,y)\int_M\left(1+\left(\frac{\rho^4(x,z)}{t^2}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2(x,z)}{2t}\times\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\,(B^{-1}(x)e(x,z),e(x,z)) + \frac{\rho(x,y)\rho(x,z)}{t}(e(x,y),e(x,z))\right\}dz,\right.$$

поэтому $|M(t,x,y)|$, как и в лемме 1, оценивается величиной

$$\frac{c}{\sqrt{t}}p_0(t,x,y)\exp\left\{\frac{1+\varepsilon}{2t}\rho^2(x,y)(B(x)e(x,y),e(x,y))\right\}.$$

Следствие.

$$|M(t,x,y)| < \frac{c\exp\left\{-(\lambda\rho^2(x,y))/2t\right\}}{\sqrt{t}(2\pi t)^{d/2}}, \qquad \lambda = 1-(1+\varepsilon)\lambda_2.$$

Доказательство следует из неравенства $p_0 < q$ и условия 5 на $B(x)$.

Теорема. *Фундаментальное решение $p(t, x, y)$ уравнения (2) удовлетворяет оценке*

$$p(t, x, y) < c\frac{\exp\left\{-(\lambda\rho^2(x, y))/2t\right\}}{(2\pi t)^{d/2}}.$$

Доказательство. Применяя процедуру (5) для решения уравнения Вольтерра, получаем соотношение

$$|r_1(t, x, y)| <$$

$$< c^2\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}}\frac{1}{(4\pi^2\tau(t-\tau))^{d/2}}\int_M \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2(x, z)}{t-\tau}+\frac{\rho^2(z, y)}{\tau}\right)\right\}dz.$$

Для оценки внутреннего интеграла воспользуемся заменой $z \to U \in T_xM$

$$U = \sqrt{\lambda}\left(\sqrt{\frac{t}{\tau(t-\tau)}}\rho(x, z)e(x, z) - \sqrt{\frac{t-\tau}{t\tau}}\rho(x, y)e(x, y)\right),$$

приводящей показатель экспоненты к виду

$$-\frac{\|U\|^2}{2} - \frac{\lambda\rho^2(x, y)}{2t} - \frac{\lambda}{2t}\big(\rho^2(z, y) - \rho^2(x, y) -$$

$$- \rho^2(x, z) + 2\rho(x, y)\rho(x, z)(e(x, z), e(x, y))\big),$$

и поскольку множитель при $\lambda/2\tau$ неотрицателен в силу неположительности кривизны, то внутренний интеграл оценивается выражением

$$\frac{1}{\lambda^{d/2}}\frac{\exp\left\{-(\lambda\rho^2(x, y))/2t\right\}}{(2\pi t)^{d/2}}\int_{T_xM} J(z(u))\mu_x(du).$$

Из ограниченности якобиана следует неравенство

$$|r_1(t, x, y)| < \frac{c^2\pi}{\lambda^{d/2}}\frac{\exp\left\{-\frac{1}{2t}\rho^2(x, y)\right\}}{(2\pi t)^{d/2}},$$

а для n-й итерации справедливо соотношение

$$|r_n(t, x, y)| < \frac{c^{n+1}\pi^{(n+1)/2}}{(\lambda^{d/2})^n\Gamma((n+1)/2)}t^{(n-1)/2}\frac{\exp\left\{-(\lambda\rho^2(x, y))/2t\right\}}{(2\pi t)^{d/2}},$$

обеспечивающее сходимость ряда и оценку его суммы:

$$|r(t, x, y)| < \frac{c}{\sqrt{t}}\frac{\exp\left\{-(\lambda\rho^2(x, y))/2t\right\}}{(2\pi t)^{d/2}}.$$

Из последнего неравенства следует утверждение теоремы.

1. *Бондаренко В. Г.* Оценки ядра теплопроводности на многообразии неположительной кривизны // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1129–1136.
2. *Бондаренко В. Г.* Метод параметрикса для параболического уравнения на римановом многообразии // Там же. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1443–1448.
3. *Бондаренко В. Г.* Ковариантные производные полей Якоби на многообразии неположительной кривизны // Там же. – 1998. – **50**, № 6. – С. 755–764.

Получено 29.04.2002