УДК 517.956

О. Д. Власій (Прикарпат. ун-т, Івано-Франківськ),
Б. Й. Пташник (Ін-т прикл. пробл. механіки і математики НАН України, Львів)

ЗАДАЧА З НЕЛОКАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ, НЕ РОЗВ'ЯЗАНИХ ВІДНОСНО СТАРШОЇ ПОХІДНОЇ

In a domain determined as the product of a segment and a p-dimensional torus, we investigate the correctness of a problem with nonlocal boundary conditions for a partial differential equation unsolved relative to the higher derivative with respect to the chosen variable. We establish conditions of the classical correctness of the problem. We prove metric theorems on lower bounds of small denominators that appear in constructing a solution of the problem.

В області, яка є добутком відрізка на p-вимірний тор, досліджено коректність задачі з нелокальними крайовими умовами для рівняння з частинними похідними, не розв'язаного відносно старшої похідної за виділеною змінною. Встановлено умови класичної коректності задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникають при побудові розв'язку задачі.

Уперше нелокальні крайові умови, які є узагальненням умов періодичності, використано в роботі [1]. У роботах [2, 3] встановлено, що для певних диференціальних рівнянь із частинними похідними в деяких областях коректна постановка крайової задачі можлива лише при використанні нелокальних умов.

Задачі з нелокальними крайовими умовами для диференціальних рівнянь із частинними похідними та диференціально-операторних рівнянь в останні кілька десятиліть вивчалися багатьма авторами. Зокрема, у роботах [1 – 13] досліджено, в основному, регулярні випадки задач, в яких поява малих знаменників виключена, або накладаються умови відокремленості від нуля малих знаменників, що забезпечує розв'язність задачі. Проте нелокальні крайові задачі для загальних диференціальних операторів із частинними похідними є, взагалі, некоректними, а питання про їх розв'язність часто пов'язане з проблемою малих знаменників. Для окремих класів рівнянь та систем рівнянь нерегулярні випадки задач з нелокальними двоточковими умовами за виділеною змінною t було досліджено в роботах [14 – 23] (див. також бібліографію в [21]).

Дана праця поширює дослідження, проведені в [18, 19], на ширші класи рівнянь. Вивчається задача з нелокальними умовами за змінною t та періодичними умовами за змінними $x_1, \ldots, x_p$ для рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами, не розв'язаних відносно старшої похідної по t, із різною асимптотикою коренів характеристичних рівнянь, які відповідають диференціальним рівнянням, одержаним для коефіцієнтів Фур'є розв'язку задачі.

1. Будемо використовувати такі позначення:

$\mathbb{Z}^p\left(\mathbb{Z}_+^p\right)$ — множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими (невід'ємними цілими) координатами;

$$x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p; \quad (t, x) = (t, x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^{p+1};$$

$$k = (k_1, \ldots, k_p) \in \mathbb{Z}^p; \quad h = (h_1, \ldots, h_p) \in \mathbb{Z}_+^p;$$

$$(k, x) = k_1 x_1 + \ldots + k_p x_p, \quad \|k\| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_p^2},$$

$$|k| = |k_1| + \ldots + |k_p|, \quad |h| = h_1 + \ldots + h_p;$$

$\langle f(z); r_1, r_2, \ldots, r_s, r_{s+1}\rangle$, $s \in \mathbb{Z}_+$ — поділена різниця s-го порядку [24] для функції $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$, побудована на точках $r_1, r_2, \ldots, r_s, r_{s+1}$;

Ω^p — p-вимірний тор, одержаний шляхом ототожнення протилежних граней куба $\{x \in \mathbb{R}^p:\ 0 \le x_\nu \le 2\pi,\ \nu = 1, \ldots, p\}$; $Q^p = (0, T) \times \Omega^p$;

$H_\psi(\Omega^p)$, $\psi \ge 0$, — гільбертовий простір 2π-періодичних за змінними $x_1, \ldots, x_p$ комплекснозначних функцій $\varphi(x) = \sum_{|k| \ge 0} \varphi_k \exp(ik, x)$ з нормою

$$\|\varphi\|_{H_\psi(\Omega^p)} = \sqrt{\sum_{|k| \ge 0} |\varphi_k|^2 \left(1 + \|k\|^2\right)^\psi};$$

$C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)$ — банаховий простір функцій $u(t, x)$, неперервних в $\overline{Q}^p$ разом зі всіма похідними $\partial^{\sigma + |h|} u(t, x) / \partial t^\sigma \partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_p^{h_p}$, $\sigma = 0, 1, \ldots, n$, $|h| \le \delta$; норма в цьому просторі задається формулою

$$\|u\|_{C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)} = \sum_{\sigma=0}^{n} \sum_{|h| \le \delta} \max_{(t, x) \in \overline{Q}^p} \left| \frac{\partial^{\sigma + |h|} u(t, x)}{\partial t^\sigma \partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_p^{h_p}} \right|; \tag{1}$$

C_j, $j = 1, \ldots, 16$, — додатні сталі, які не залежать від вектора k.

2. В області Q^p розглядаємо задачу

$$N[u] \equiv \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^n P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^\sigma \left(\sum_{|h| \le q} \beta_{h\sigma} \frac{\partial^{|h|}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_p^{h_p}} \right) u = 0, \tag{2}$$

$$M_l[u] \equiv \sum_{s=1}^{n} \sum_{|h| \le \delta} \gamma_{hls} \frac{\partial^{|h|}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_p^{h_p}} \left(\left.\frac{\partial^{s-1} u}{\partial t^{s-1}}\right|_{t=0} - \mu \left.\frac{\partial^{s-1} u}{\partial t^{s-1}}\right|_{t=T} \right) = \varphi_l(x),$$
$$l = 1, \ldots, n, \tag{3}$$

де

$$P\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \equiv \sum_{|h| = 2d} \alpha_h \frac{\partial^{|h|}}{\partial x_1^{h_1} \ldots \partial x_p^{h_p}}$$

— еліптичний диференціальний вираз, α_h, $\beta_{h\sigma}$, $\gamma_{hls} \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$. У роботах [18, 19] розглядалися випадки задачі (2), (3), коли $q = 2d$.

Вигляд області Q^p накладає на розв'язок $u(t, x)$ та на функції $\varphi_l(x)$, $l = 1, \ldots, n$, умови 2π-періодичності за змінними $x_1, \ldots, x_p$. Вважаємо, що функції $\varphi_l(x)$, $l = 1, \ldots, n$, допускають розвинення в ряди Фур'є

$$\varphi_l(x) = \sum_{|k| \ge 0} \varphi_{kl} \exp(ik, x), \quad \varphi_{kl} = (2\pi)^{-p} \int_{\Omega^p} \varphi_l(x) \exp(-ik, x)\, dx, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{4}$$

Розв'язок задачі (2), (3) шукаємо у вигляді ряду

$$u(t, x) = \sum_{|k| \ge 0} u_k(t) \exp(ik, x). \tag{5}$$

На підставі (2) – (5) для визначення кожної з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p$, отримуємо таку задачу:

$$N_k[u_k] \equiv (-1)^d P(k) u_k^{(n)}(t) + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(\sum_{|h| \le q} \beta_{h\sigma} (ik_1)^{h_1} \ldots (ik_p)^{h_p} \right) u_k^{(\sigma)}(t) = 0, \tag{6}$$

$$M_{kl}[u_k] \equiv \sum_{s=1}^{n} \sum_{|h|\le \delta} \gamma_{hls}(ik_1)^{h_1} \ldots (ik_p)^{h_p} \left(u_k^{(s-1)}(0) - \mu u_k^{(s-1)}(T)\right) = \varphi_{kl}, \tag{7}$$

$$l = 1, \ldots, n.$$

Зауважимо, що для $k = (0)$ задача (6), (7) має вигляд

$$N_{(0)}[u_{(0)}] \equiv \sum_{\sigma=0}^{n-1} \beta_{(0)\sigma} u_{(0)}^{(\sigma)}(t) = 0, \tag{8}$$

$$M_{(0)l}[u_{(0)}] \equiv \sum_{s=1}^{n} \gamma_{(0)ls}\left(u_{(0)}^{(s-1)}(0) - \mu u_{(0)}^{(s-1)}(T)\right) = \varphi_{(0)l}, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Нехай існує $n^* \in \mathbb{N}$, $n^* \le n-1$, таке, що $\beta_{(0)n^*} \ne 0$, а при $\sigma > n^*$ $\beta_{(0)\sigma} = 0$. Тоді рівняння (8) має порядок n^*, а його загальний розв'язок

$$u_{(0)}(t) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m_j=1}^{n_j} C_{j,m_j} t^{m_j - 1} \exp(\rho_j t), \tag{10}$$

де C_{j,m_j} — довільні сталі, ρ_j, $j = 1, \ldots, r$, — корені рівняння $\sum_{\sigma=0}^{n^*} \beta_{(0)\sigma}\rho^\sigma = 0$ з кратностями n_j відповідно, $\sum_{j=1}^{r} n_j = n^*$.

Для знаходження розв'язку задачі (8), (9) підставляємо (10) в умови (9). Отримуємо таку систему n лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення n^* коефіцієнтів C_{j,m_j}:

$$\sum_{j=1}^{r} \sum_{m_j=1}^{n_j} a_{j,m_j,l} C_{j,m_j} = \varphi_{(0)l}, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{11}$$

де

$$a_{j,m_j,l} = \sum_{s=m_j}^{n} \gamma_{(0)ls} \frac{(s-1)!}{(s-m_j)!} \rho_j^{s-m_j} -$$

$$- \mu \sum_{s=1}^{n} \gamma_{(0)ls} \left(\sum_{\omega=1}^{\min\{m_j, s\}} \frac{(s-1)!(m_j-1)!}{(s-\omega)!(\omega-1)!(m_j-\omega)!} \rho_j^{s-\omega} T^{m_j-\omega} \right) \exp(\rho_j T).$$

Позначимо через A матрицю системи (11), а через $\overline{A}$ розширену матрицю цієї системи. Задача (8), (9) має не більше одного розв'язку тоді й тільки тоді, коли виконується умова

$$\operatorname{rang} A = n^*; \tag{12}$$

для існування розв'язку задачі (8), (9) необхідно й достатньо, щоб виконувалась умова

$$\operatorname{rang} \overline{A} = \operatorname{rang} A. \tag{13}$$

Зауважимо, що для виконання умови (12) достатньо, щоб одночасно справджувались такі нерівності:

$$\det \left\| \gamma_{(0)ls} \right\|_{l,s=1}^{n} \ne 0, \quad 1 - \mu \exp(\rho_j T) \ne 0, \quad j = 1, \ldots, r.$$

Розглянемо задачу (6), (7) при $k \neq (0)$. З еліптичності виразу $P(\partial/\partial x)$ випливає

$$(\forall k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}) \qquad P(k) \equiv \sum_{|h|=2d} \alpha_h k_1^{h_1} \ldots k_p^{h_p} \neq 0,$$

тому характеристичне рівняння

$$X_k(\rho) \equiv (-1)^d P(k)\rho^n + \sum_{\sigma=0}^{n-1} \left(\sum_{|h| \le q} \beta_{h\sigma} (ik_1)^{h_1} \ldots (ik_p)^{h_p} \right) \rho^\sigma = 0,$$

$$k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \tag{14}$$

яке відповідає рівнянню (6), має n комплексних коренів $\rho_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$. Для спрощення викладок припустимо, що для всіх $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ корені $\rho_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, рівняння (14) попарно різні й відмінні від нуля.

Оскільки $P(\chi)$ — однорідний многочлен степеня $2d$, то

$$(\forall \chi \in \mathbb{R}^p \setminus \{(0)\}) \quad |P(\chi)| \ge C_1 \|\chi\|^{2d} \ge C_2 |\chi|^{2d}, \tag{15}$$

де $C_1 = \inf_{\|\chi\|=1} |P(\chi)| > 0$, $C_2 = C_1 / p^d$. На підставі оцінок коренів многочлена через його коефіцієнти [25] із (14), (15) одержуємо

$$|\rho_j(k)| \le \begin{cases} C_3 |k|^{(q-2d)/n}, & \text{якщо } q < 2d; \\ C_4, & \text{якщо } q = 2d; \\ C_5 |k|^{q-2d}, & \text{якщо } q > 2d, \end{cases} \tag{16}$$

$$j = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}.$$

Для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ рівняння (6) має фундаментальну систему розв'язків

$$u_{kj}(t) = \exp(\rho_j(k) t), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Характеристичний визначник $\Delta(k) \equiv \det \| M_{kl}[u_{kj}] \|_{l,j=1}^n$ задачі (6), (7) обчислюється за формулою

$$\Delta(k) = S(k) R(k) \prod_{j=1}^n \left(1 - \mu \exp(\rho_j(k) T)\right), \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \tag{17}$$

де

$$S(k) = \det \left\| \sum_{|h| \le \delta} \gamma_{hls} (ik_1)^{h_1} \ldots (ik_p)^{h_p} \right\|_{l,s=1}^n, \tag{18}$$

$$R(k) = \det \| \rho_j^{s-1}(k) \|_{s,j=1}^n = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\rho_j(k) - \rho_i(k) \right). \tag{19}$$

3. При дослідженні єдиності розв'язку задачі (2), (3) будемо розглядати однорідні умови

$$M_l[u] = 0, \quad l = 1, \ldots, n, \tag{3'}$$

$$M_{kl}[u_k] = 0, \quad l = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \tag{7'}$$

$$M_{(0)l}[u_{(0)}] = 0, \quad l = 1, \ldots, n. \tag{9'}$$

Задача (2), (3) не може мати двох різних розв'язків тоді й тільки тоді, коли однорідна задача (2), (3′) має лише тривіальний розв'язок.

Теорема 1. *Для единості розв'язку задачі* (2), (3) *у просторі* $C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)$ *необхідно і достатньо, щоб виконувались умова* (12) *та умови*

$$S(k) \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \tag{20}$$

$$1 - \mu \exp\left(\rho_j(k)T\right) \neq 0, \quad j = 1, \ldots, n, \quad k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}. \tag{21}$$

Доведення. Необхідність. Нехай для деякого $k = \hat{k} \neq (0)$ $S(\hat{k}) = 0$ або існує таке j_0, $1 \leq j_0 \leq n$, що $1 - \mu \exp\left(\rho_{j_0}(\hat{k})T\right) = 0$. Тоді визначник (17) при $k = \hat{k}$ дорівнює нулю, а однорідна задача (2), (3′) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$\tilde{u}(t,x) = \sum_{j=1}^{n} C_{\hat{k}j} \exp\left(\rho_j(\hat{k})t + (i\hat{k}, x)\right),$$

де $\left(C_{\hat{k}1}, \ldots, C_{\hat{k}n}\right)$ — нетривіальний розв'язок системи рівнянь

$$\sum_{j=1}^{n} C_{\hat{k}j} M_{\hat{k}l}\left[u_{\hat{k}j}\right] = 0, \quad l = 1, \ldots, n.$$

Якщо не виконується умова (12), тобто $\operatorname{rang} A < n^*$, то однорідна задача (8), (9′) має нетривіальні розв'язки вигляду

$$\tilde{u}_0(t) = \sum_{j=1}^{r} \sum_{m_j=1}^{n_j} \tilde{C}_{j,m_j} t^{m_j - 1} \exp(\rho_j t),$$

де $(\tilde{C}_{j,m_j},\ j = 1, \ldots, r,\ m_j = 1, \ldots, n_j)$ — нетривіальний розв'язок системи (11) при $\varphi_{(0)l} = 0$, $l = 1, \ldots, n$. Тоді задача (2), (3′) теж має нетривіальні розв'язки.

Достатність. Припустимо, що існують два розв'язки u_1 та u_2 задачі (2), (3) з простору $C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)$. Тоді функція $u_1 - u_2 = \tilde{u} \in C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)$ є розв'язком однорідної задачі (2), (3′), і до неї можна застосувати оператори N та M_l, $l = 1, \ldots, n$. З рівностей Парсеваля для функцій $N[\tilde{u}]$ та $M_l[\tilde{u}]$, $l = 1, \ldots n$, випливає, що $\tilde{u}_0(t)$ є розв'язком однорідної задачі (8), (9′), а кожна з функцій $\tilde{u}_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$, — розв'язок однорідної задачі (6), (7′). На підставі (12), (20), (21) отримуємо $\tilde{u}_k(t) \equiv 0$, $k \in Z^p$. Отже, $u_1(t,x) \equiv u_2(t,x)$. Теорему доведено.

Зауваження. Умови (21) справджуються тоді й тільки тоді, коли для кожного j, $j = 1, \ldots, n$, та для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ виконується хоча б одна з умов

$$\ln|\mu| + T\operatorname{Re}\rho_j(k) \neq 0, \quad \frac{\arg\mu + T\operatorname{Im}\rho_j(k)}{2\pi} \notin \mathbb{Z}.$$

4. Розглянемо питання про існування розв'язку задачі (2), (3). Надалі вважатимемо, що виконуються умови теореми 1. Тоді для кожного $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ існує єдиний розв'язок задачі (6), (7), який має вигляд

$$u_k(t) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{s=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{l+j} \frac{\varphi_{kl} S_{ls}(k) R_{sj}(k) \exp(\rho_j(k)t)}{S(k)R(k)\left(1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)\right)}, \tag{22}$$

де $S_{ls}(k)$ — визначник, отриманий із визначника (18) шляхом викреслювання l-го рядка та s-го стовпця, а $R_{sj}(k)$ — визначник, отриманий із визначника (19) шляхом викреслювання s-го рядка та j-го стовпця. Формальний розв'язок задачі (2), (3) зображується рядом

$$u(t, x) = u_{(0)}(t) + \sum_{|k|>0} u_k(t) \exp(ik, x), \tag{23}$$

в якому $u_{(0)}(t)$ має вигляд (10), де $\left\{C_{j,k_j}\right\}$ — розв'язок системи (11), а функції $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$, визначаються формулами (22). Ряд (23), взагалі, є розбіжним оскільки відмінні від нуля вирази $S(k)$, $1 - \mu \exp\left(\rho_j(k)T\right)$, $j = 1, \ldots, n$, можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$. Тому питання про існування розв'язку задачі (2), (3), взагалі, пов'язане з проблемою малих знаменників.

Лема 1. *Для компонент розв'язку* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ *системи алгебраїчних рівнянь*

$$\zeta_1 + r_j\zeta_2 + r_j^2\zeta_3 + \ldots + r_j^{n-1}\zeta_n = \frac{r_j^{\sigma} \exp(r_j t)}{1 - \mu \exp(r_j T)}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{24}$$

де $\sigma \in \mathbb{Z}_+$, $\mu \in \mathbb{C} \setminus \{(0)\}$, $0 < t < T$, r_j, $j = 1, \ldots, n$, — *різні комплексні числа з круга* $U_B = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq B\}$, *для яких* $1 - \mu \exp(r_j T) \neq 0$, *справджуються такі оцінки*:

$$|\zeta_s| \leq C_6 (1+B)^{\sigma+n-s} \prod_{j=1}^{n} \left(1 + |g(r_j)|^{-1}\right), \quad s = 1, \ldots, n, \tag{25}$$

де $g(z) = 1 - \mu \exp(zT)$, $C_6 = C_6(n, s, \sigma, |\mu|, T) > 0$.

Доведення. Застосуємо підхід, який базується на використанні поділених різниць для функцій (див. [24, с. 227 – 228]). Введемо такі позначення:

$$f(z) = z^{\sigma} \exp(zt), \tag{26}$$

$$\Phi_0(z) = \frac{f(z)}{g(z)}, \quad \Phi_s(z) = \langle \Phi_0(z); r_1, r_2, \ldots, r_s, z \rangle \equiv$$
$$\equiv \frac{\Phi_{s-1}(z) - \Phi_{s-1}(r_s)}{z - r_s}, \quad s = 1, \ldots, n-1, \tag{27}$$

$$\Psi_0(z) = f(z), \quad \Psi_s(z) = \Phi_s(z) g(r_1) \ldots g(r_s) g(z) \equiv$$
$$\equiv \Psi_{s-1}(z) g(r_s) - \Psi_{s-1}(r_s) g(z), \quad s = 1, \ldots, n-1, \tag{28}$$

$$h_w(r_s) = \langle z^w; r_1, r_2, \ldots, r_s \rangle \equiv \sum_{\sum_{j=1}^{s} \nu_j = w-s+1} \prod_{j=1}^{s} r_j^{\nu_j},$$
$$\nu_j \in \mathbb{Z}_+, \quad 1 \leq j \leq s \leq w \leq n-1. \tag{29}$$

Із (25) та (26) випливає, що для довільних $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, для яких $\operatorname{Re} z_1 \le \operatorname{Re} z_2$, виконуються нерівності

$$\begin{gathered} g^{(\alpha)}(z_1) \le g^{(\alpha)}(z_2), \quad \alpha = 1, \ldots, n-1, \\ f^{(\alpha)}(z_1) \le f^{(\alpha)}(z_2), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1, \end{gathered} \tag{30}$$

і для довільного $z \in U_B$ справедливі такі оцінки:

$$|g^{(\alpha)}(z)| \le T^{\alpha}(|g(z)|+1), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{31}$$

$$|f^{(\alpha)}(z)| = \left| \left(\sum_{\omega=0}^{\min\{\alpha,\sigma\}} \omega! C_{\alpha}^{\omega} C_{\sigma}^{\omega} z^{\sigma-\omega} t^{\alpha-\omega} \right) \exp(zt) \right| \le$$

$$\le (1+T)^{\alpha}(1+B)^{\sigma}\sigma! M(|g(z)|+1), \quad \alpha = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{32}$$

де $M = \max\{|\mu|^{-1}, 1\}$. Звівши систему (24) до трикутного вигляду, отримаємо

$$\begin{gathered} \zeta_1 + h_1(r_1)\zeta_2 + h_2(r_1)\zeta_3 + \ldots + h_{n-1}(r_1)\zeta_n = \Phi_0(r_1), \\ \zeta_2 + h_2(r_2)\zeta_3 + \ldots + h_{n-1}(r_2)\zeta_n = \Phi_1(r_2), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \zeta_{n-1} + h_{n-1}(r_{n-1})\zeta_n = \Phi_{n-2}(r_{n-1}), \\ \zeta_n = \Phi_{n-1}(r_n). \end{gathered} \tag{33}$$

Із (33) маємо

$$\zeta_n = \Phi_{n-1}(r_n), \quad \zeta_s = \Phi_{s-1}(r_s) - \sum_{w=s}^{n-1} h_w(r_s)\zeta_{w+1}, \quad s = 1, \ldots, n-1. \tag{34}$$

Оскільки для кожного w, $w = 1, \ldots, n-1$, рівняння $\sum_{j=1}^{s} \nu_j = w - s + 1$, де $s = 1, \ldots, w$, має C_w^{w-s+1} розв'язків у цілих невід'ємних числах $\nu_1, \ldots, \nu_s$, то із (29) випливає

$$|h_w(r_s)| \le C_w^{w-s+1} B^{w-s+1}, \quad w = 1, \ldots, n-1, \quad s = 1, \ldots, w. \tag{35}$$

Із рекурентних формул (28) отримуємо співвідношення

$$\begin{aligned} \Psi_s^{(\alpha)}(z) = {} & g(r_s) \int_0^1 \theta^{\alpha} \Psi_{s-1}^{(\alpha+1)}(r_s + \theta(z - r_s))\, d\theta - \\ & - \Psi_{s-1}(r_s) \int_0^1 \theta^{\alpha} g^{(\alpha+1)}(r_s + \theta(z - r_s))\, d\theta, \end{aligned} \tag{36}$$

де $s = 1, \ldots, n-1$, $\alpha = 0, 1, \ldots, n-s-1$. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\operatorname{Re} r_1 \le \operatorname{Re} r_2 \le \ldots \le \operatorname{Re} r_n$. Тоді на підставі (27), (28), (30) – (32) та (36) знаходимо

$$|\Phi_{s-1}(r_s)| \le 2^{s-1}(1+T)^{s-1}(1+B)^{\sigma}\sigma! M \prod_{j=1}^{s} \left(1 + |g(r_j)|^{-1}\right), \quad s = 1, \ldots, n. \tag{37}$$

На підставі (34), (35) та (37) отримуємо оцінки (25), в яких $C_6 = (n - 1)!\sigma! 2^{2n-s-1}(1+T)^{n-1} M / (s-1)!$. Лему доведено.

Як буде видно з доведення наступної теореми, лема 1 дозволяє показати, що різниці $\rho_j(k) - \rho_i(k)$, які входять у праві частини рівностей (22), не спричиняють проблеми малих знаменників, як це вважалося в [19].

Теорема 2. *Нехай виконуються умови единості розв'язку задачі* (2), (3) *та умова* (13) *і для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ *існують додатні сталі* C_7, C_8 *та невід'ємні числа* γ_1, γ_2 *такі, що виконуються оцінки*

$$|1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)| \geq C_7 |k|^{-\gamma_1}, \quad j = 1, \ldots, n, \tag{38}$$

$$|S(k)| \geq C_8 |k|^{-\gamma_2}. \tag{39}$$

Нехай $\varphi_l \in H_{\psi+\varepsilon}(\Omega^p)$, $\varepsilon > 0$, $l = 1, \ldots, n$, *де*

$$\psi = \begin{cases} 2dn + \dfrac{p}{2} + n\gamma_1 + \gamma_2, & \text{якщо } q \leq 2d; \\ qn + (q-2d)(2n-1) + \dfrac{p}{2} + n\gamma_1 + \gamma_2, & \text{якщо } q > 2d. \end{cases}$$

Тоді в просторі $C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)$ *існує единий розв'язок задачі* (2), (3), *який неперервно залежить від функцій* $\varphi_l(x)$, $l = 1, \ldots, n$.

Доведення. За умов (12), (13) існує єдиний класичний розв'язок $u_0(t)$ задачі (8), (9). На підставі (22) кожну з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$, подамо у вигляді

$$u_k(t) = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{l=1}^{n} (-1)^{l+s} \varphi_{kl} \frac{S_{ls}(k)}{S(k)} \right) \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+s} \frac{R_{js}^T(k) \exp(\rho_j(k)t)}{R^T(k)(1 - \mu \exp(\rho_j(k)T))} \right),$$
$$k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}, \tag{40}$$

де $R^T(k) = \det \| \rho_j^{s-1}(k) \|_{j,s=1}^n$, а $R_{js}^T(k)$ — визначник, транспонований до $R_{sj}(k)$. Легко бачити, що при $r_j = \rho_j(k)$, $j = 1, \ldots, n$, розв'язком системи рівнянь (24) є вектор з компонентами

$$\zeta_s = \frac{d^\sigma \xi_s(k; t)}{dt^\sigma}, \quad s = 1, \ldots, n,$$

де

$$\xi_s(k; t) \equiv \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+s} \frac{R_{js}^T(k) \exp(\rho_j(k)t)}{R^T(k)(1 - \mu \exp(\rho_j(k)T))} \quad \text{(див. (40))}.$$

Тому на основі леми 1 та оцінок (16) отримуємо

$$\left| \frac{d^\sigma \xi_s(k; t)}{dt^\sigma} \right| \leq$$

$$\leq \begin{cases} C_9 \prod\limits_{j=1}^{n} \left(1 + |1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)|^{-1}\right), & \text{якщо } q \leq 2d; \\ C_{10} |k|^{(q-2d)(\sigma+n-s)} \prod\limits_{j=1}^{n} \left(1 + |1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)|^{-1}\right), & \text{якщо } q > 2d. \end{cases} \tag{41}$$

На підставі формул (10), (13), (18), (40), використовуючи оцінки (16), (38), (39), (41), знаходимо

$$\max_{(t,x)\in\overline{Q}^p}\left|\frac{\partial^{\sigma+|h|}(u_k(t)\exp(ik,x))}{\partial t^{\sigma}\partial x_1^{h_1}\ldots\partial x_p^{h_p}}\right| \le C_{11}\left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{\beta_1}\sum_{l=1}^{n}|\varphi_{kl}|,$$

$$\sigma = 0,1,\ldots,n, \quad |h| \le \delta, \quad k\in\mathbb{Z}^p, \tag{42}$$

де

$$\beta_1 = \beta_1(\sigma,|h|) =$$

$$= \begin{cases} 2d(n-1)+n\gamma_1+\gamma_2+|h|, & \text{якщо } q\le 2d; \\ q(n-1)+(q-2d)(n+\sigma-1)+n\gamma_1+\gamma_2+|h|, & \text{якщо } q>2d. \end{cases}$$

Далі, на підставі (1), (23), (42) маємо

$$\|u\|_{C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)} \le C_{12}\sum_{l=1}^{n}\sum_{|k|\ge 0}\left(\sqrt{1+\|k\|^2}\right)^{\beta_2}|\varphi_{kl}|, \tag{43}$$

де

$$\beta_2 = \begin{cases} 2dn+n\gamma_1+\gamma_2, & \text{якщо } q\le 2d; \\ qn+(q-2d)(2n-1)+n\gamma_1+\gamma_2, & \text{якщо } q>2d. \end{cases}$$

Застосовуючи до (43) нерівність Коші – Буняковського і враховуючи, що ряд $\sum_{|k|\ge 0}\left(1+\|k\|^2\right)^{-\eta}$ є збіжним при $\eta>p/2$, отримуємо

$$\|u\|_{C^{(n,\delta)}(\overline{Q}^p)} \le$$

$$\le C_{12}\sum_{l=1}^{n}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}\left(1+\|k\|^2\right)^{-(p/2+\varepsilon)}}\sqrt{\sum_{|k|\ge 0}\left(1+\|k\|^2\right)^{\beta_2+p/2+\varepsilon}|\varphi_{kl}|^2} \le$$

$$\le C_{13}\sum_{l=1}^{n}\|\varphi_l\|_{H_{\psi+\varepsilon}(\Omega^p)}, \tag{44}$$

що й завершує доведення теореми.

5. Дослідимо можливість виконання оцінок (38), (39).

Лема 2. *Нехай* $\rho(k)=a(k)+ib(k)$, $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$, *— послідовність комплексних чисел, відмінних від нуля. Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) значень* $T>0$ *і для довільного фіксованого* $\mu\in\mathbb{C}\setminus\{0;1\}$ *нерівність*

$$|1-\mu\exp(\rho(k)T)| \ge |k|^{-\gamma}, \quad \gamma>p, \tag{45}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$.

Доведення. Спочатку доведемо лему для випадку, коли $T\in[D,2D]$, де D — довільне додатне число. Нехай $|\mu|\ne 1$. Тоді $|1-\mu\exp(\rho(k)T)| \ge$ $\ge \left|1-|\mu|e^{a(k)T}\right|$. Зафіксуємо деяке додатне число δ, $0<\delta<$ $<|1-|\mu||/(1+|1-|\mu||)$. Оцінка $\left|1-|\mu|e^{a(k)T}\right|>\delta$ виконується для всіх тих $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$, для яких $|a(k)|$ не належить відрізку

$$[A_1,A_2] \equiv \left[\frac{|\ln|\mu||+\ln(1-\delta)}{2D},\frac{|\ln|\mu||+\ln(1-\delta)}{D}\right],$$

де $A_2 > A_1 > 0$. Множину таких векторів k позначимо через Z_1.

Для $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$ таких, що $|a(k)| \in [A_1, A_2]$ (множину таких k позначимо через Z_2), розглянемо функції $\tau_k(T) = 1 - |\mu| e^{a(k)T}$. Для цих функцій справджуються оцінки

$$(\forall T \in [D, 2D]) \quad |\tau_k'(T)| = |\mu||a(k)| \, e^{a(k)T} \geq A_1 |\mu| e^{-2DA_2} =$$

$$= A_1 |\mu| (1-\delta)^2 e^{-2|\ln|\mu||} = C_{14}, \quad k \in \mathbb{Z}_2,$$

де $C_{14} = C_{14}(|\mu|, \delta, D)$. Тоді на основі леми із [26] дістаємо оцінки

$$\operatorname{mes}\{T \in [D, 2D] : |\tau_k(T)| < |k|^{-\gamma}\} \leq C_{14}^{-1} |k|^{-\gamma}, \quad k \in Z_2.$$

Оскільки при $\gamma > p$ ряд $\sum_{|k|>0} |k|^{-\gamma}$ збігається, то на підставі леми Бореля – Кантеллі [27] отримуємо, що міра множини тих $T \in [D, 2D]$, для яких нерівність $|\tau_k(T)| < |k|^{-\gamma}$ виконується для нескінченної кількості векторів $k \in Z_2$, дорівнює нулю. Отже, для кожного $T \in [D, 2D]$ нерівність (45) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in Z_1 \cup Z_2 = \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.

Якщо $|\mu| = 1$, то справедлива рівність

$$|1 - \mu \exp(\rho(k)T)| = \sqrt{\left(1 - e^{a(k)T}\right)^2 + \left(2e^{a(k)T/2} \sin\frac{\arg\mu + b(k)T}{2}\right)^2},$$

з якої отримуємо, що для кожного $T \in [D, 2D]$ справджуються оцінки

$$|1 - \mu \exp(\rho(k)T)| \geq |1 - e^{a(k)T}| \geq |1 - e^{-1/2}|, \quad k \in K_1,$$

$$|1 - \mu \exp(\rho(k)T)| \geq 2e^{a(k)T/2} \sin\left(\frac{\arg\mu}{2} + \frac{b(k)T}{2}\right) >$$

$$> \left|\sin\left|\frac{\arg\mu}{2} + \frac{b(k)T}{2}\right|\right|, \quad k \in K_2,$$

де

$$K_1 = \{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} : |a(k)| \geq (2D)^{-1}\},$$

$$K_2 = \{k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} : |a(k)| < (2D)^{-1}\}.$$

Оскільки $\arg\mu \neq 0$, то $|\arg\mu|/2 \in (0, \pi/2)$. Зафіксуємо деяке число $\theta \in (0, |\arg\mu|/2)$. Тоді для довільного $T \in [D, 2D]$ виконуються нерівності

$$\left|\sin\left(\frac{\arg\mu}{2} + \frac{b(k)T}{2}\right)\right| > \sin\left(\frac{|\arg\mu|}{2} - \theta\right) > 2\frac{|\arg\mu|/2 - \theta}{\pi}, \quad k \in K_2', \quad (46)$$

де $K_2' = \{k \in K_2 : |b(k)| < \theta / D\}$. Якщо $k \in K_2'' = \{k \in K_2 : |b(k)| \geq \theta / D\}$, то справедливі оцінки

$$\left|\sin\left(\frac{\arg\mu}{2} + \frac{b(k)T}{2}\right)\right| = \sin\left|\frac{\arg\mu}{2} + \frac{b(k)T}{2} - \pi m\right| \geq 2\left|\frac{\arg\mu}{2\pi} + \frac{Tb(k)}{2\pi} - m\right|,$$

де $m = m(k, T) \in Z$ таке, що $\arg\mu + Tb(k) - 2\pi m \in (-\pi, \pi]$.

Покажемо, що при $\gamma > p$ нерівність

$$\left|\frac{\arg\mu}{2\pi}+\frac{Tb(k)}{2\pi}-m\right| < |k|^{-\gamma} \tag{47}$$

для майже всіх $T\in[D,2D]$ має лише скінченну кількість розв'язків (k,m), де $k\in K_2''$, $m\in\mathbb{Z}$. Для цього використаємо схему доведення леми 2.4 із [21] (гл. 1). Зафіксуємо вектор $k=\hat{k}\in K_2''$. Відповідні йому значення m, для яких виконується нерівність (47), містяться в інтервалі

$$\frac{\arg\mu}{2\pi}+\frac{Tb(\hat{k})}{2\pi}-\left|\hat{k}\right|^{-\gamma} < m < \frac{\arg\mu}{2\pi}+\frac{Tb(\hat{k})}{2\pi}+\left|\hat{k}\right|^{-\gamma},$$

а отже, кількість таких значень m не перевищує величину $\left[\left|b(\hat{k})D/2\pi\right|\right]+3$. Тоді для міри множини $S(\hat{k},m_0)$ чисел $T\in[D,2D]$, для яких при фіксованих $k=\hat{k}$ та $m=m_0$ виконується нерівність (47), справедливою є оцінка $\operatorname{mes} S(\hat{k},m_0)<4\pi\left|b(\hat{k})\right|^{-1}\left|\hat{k}\right|^{-\gamma}$, а міра множини $S(\hat{k})$ тих чисел $T\in[D,2D]$, для яких нерівність (47) при фіксованому $k=\hat{k}$ має розв'язки в цілих числах m, оцінюється величиною

$$\operatorname{mes} S(\hat{k}) < \left(\frac{\left|b(\hat{k})\right|D}{2\pi}+3\right)4\pi\left|b(\hat{k})\right|^{-1}\left|\hat{k}\right|^{-\gamma} < \left(2+\frac{12\pi}{\theta}\right)D\left|\hat{k}\right|^{-\gamma}. \tag{48}$$

Підсумувавши оцінку (48) за всіма векторами $k\in K_2''$, отримаємо

$$\sum_{k\in K_2''}\operatorname{mes} S(k) \le C_{15}\sum_{k\in K_2''}|k|^{-\gamma} \le C_{15}\sum_{|k|>0}|k|^{-\gamma},$$

де $C_{15}=(2+12\pi/\theta)D$. Оскільки для $\gamma>p$ ряд $\sum_{|k|>0}|k|^{-\gamma}$ є збіжним, то з леми Бореля – Кантеллі [27] випливає, що міра тих $T\in[D,2D]$, для яких нерівність (47) має нескінченну кількість розв'язків у цілих числах $k_1,\ldots,k_p$, m, $k\in K_2''$, дорівнює нулю. Тому на підставі (46), (47) отримуємо, що при $|\mu|=1$ для майже всіх $T\in[D,2D]$ також справедлива оцінка (45) для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$. Враховуючи, що додатну піввісь $(0,\infty)$ можна покрити зліченною кількістю відрізків вигляду $[D,2D]$ (наприклад, $(0,\infty)=\bigcup_{s=-\infty}^{\infty}[2^{s-1};2^s]$), завершуємо доведення леми.

Через Y позначимо вектор, складений з усіх коефіцієнтів і параметрів задачі (2), (3), за винятком параметра T.

Теорема 3. *Нерівності* (38) *виконуються для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$ *для довільного фіксованого вектора* (T,Y) *при* $\gamma_1=0$, *якщо* $q<2d$, *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* $T>0$ *та для довільного фіксованого вектора* Y *при* $\gamma_1>p$, *якщо* $q\ge 2d$.

Доведення. Якщо $q<2d$, то згідно з (16) при $|k|\to\infty$, $\mu\exp(\rho_j(k)T)\to\mu$, $j=1,\ldots,n$. Отже, в крузі з центром в точці $z=1\in\mathbb{C}$ і радіусом θ, $0<\theta<|1-\mu|$, є лише скінченна кількість точок множини $\{\mu\exp(\rho_j(k)T),\ j=1,\ldots,n,\ k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}\}$. Тому існує лише скінченна кількість векторів $k\in\mathbb{Z}^p\setminus\{(0)\}$, для яких справджується рівність $\mu\exp(\rho_j(k)T)=1$ хоча б для одного j, $1 \leq j \leq n$. Позначимо $K_* = \{ k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\} : \mu \exp(\rho_j(k)T) \neq 1, \quad j = 1, \ldots, n \}$. Тоді для всіх $k \in K_*$ справджуються оцінки

$$|1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)| \geq \inf_{1 \leq j \leq n} \inf_{k \in K_*} |1 - \mu \exp(\rho_j(k)T)| = C_{16}, \quad j = 1, \ldots, n,$$

де $0 < C_{16} < \theta$, що завершує доведення теореми для випадку $q < 2d$. Якщо $q \geq 2d$, то доведення теореми випливає з леми 2.

Розглянемо оцінку (39). Визначник (18) є многочленом степеня $n\delta$ відносно змінних $k_1, \ldots, k_p$, який можна зобразити у вигляді

$$S(k) = \sum_{\omega=0}^{\tilde{v}} \sum_{|\eta|=2\omega} v_\eta k_1^{\eta_1} \ldots k_p^{\eta_p} + i \sum_{\omega=0}^{\tilde{w}} \sum_{|\eta|=2\omega+1} w_\eta k_1^{\eta_1} \ldots k_p^{\eta_p}, \tag{49}$$

де $\tilde{v} = [(2n\delta + 1)/4]$, $\tilde{w} = [(2n\delta - 1)/4]$, а коефіцієнти v_η та w_η є дійсними числами, що визначаються через γ_{hls}. Позначимо через $V \in \mathbb{R}^{\tilde{v}}$ і $W \in \mathbb{R}^{\tilde{w}}$ вектори, складені відповідно із коефіцієнтів v_η і w_η многочлена (49).

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі $\mathbb{R}^{\tilde{v}}$) векторів V і для довільного фіксованого вектора W (або для майже всіх W та довільного фіксованого V) нерівність* (39) *виконується при $\gamma_2 > p$ для всіх (крім скінченної кількості) векторів $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.*

Доведення. Зауважимо, що $|S(k)| \geq \max\{|\operatorname{Re} S(k)|, |\operatorname{Im} S(k)|\}$, $k \in \mathbb{Z}^p \setminus \{(0)\}$.

Розглянемо $\operatorname{Re} S(k)$. Не обмежуючи загальності вважатимемо, що $\deg \operatorname{Re} S(k) \neq 0$. Якщо вільний член v_0 многочлена $\operatorname{Re} S(k)$ відмінний від нуля, то доведення теореми проводиться за схемою доведення теореми 4.4 із [21] (гл. 2), якщо ж $v_0 = 0$, то доведення випливає з теорем 2.3 та 2.4 [21] (гл. 1).

Зауважимо, що отримані результати поширено на випадок кратних коренів рівняння (14), а також на випадок, коли рівняння (2) є неоднорідним із правою частиною $f(t, x)$.

1. *Дезин А. А.* Простейшие разрешимые расширения для ультрагиперболического и псевдопараболического операторов // Докл. АН СССР. – 1963. – **148**, № 5. – С. 1013 – 1016.
2. *Дезин А. А.* Общие вопросы теории граничных задач. – М.: Наука, 1980. – 208 с.
3. *Романко В. К.* О системах операторных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1987. – **23**, № 9. – С. 1574 – 1585.
4. *Каленюк П. І., Нитребич З. М.* Побудова розв'язків деяких крайових задач для лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, що допускають відокремлення змінних // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 1990. – С. 62 – 71.
5. *Кигурадзе Т. И.* Об ограниченных и периодических в полосе решениях квазилинейных гиперболических систем // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 10. – С. 1760 – 1773.
6. *Митропольский Ю. А., Урманчева Л. Б.* О двухточечной задаче для систем гиперболических уравнений // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 2. – С. 1657 – 1663.
7. *Митропольский Ю. А., Шханукова М. Х., Березовский А. А.* Об одной нелокальной задаче для параболического уравнения // Там же. – 1995. – **47**, № 6. – С. 790 – 800.
8. *Романко В. К.* Нелокальные граничные задачи для некоторых систем уравнений // Мат. заметки. – 1985. – **37**, № 5. – С. 727 – 733.
9. *Романко В. К.* Об общих краевых задачах для нелинейных систем уравнений с постоянными коэффициентами // Мат. методы и физ.-мех. поля. – 1986. – Вып. 23. – С. 3 – 7.
10. *Фардигола Л. В.* Корректные задачи в слое с дифференциальными операторами в краевом условии // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 8. – С. 1083 – 1090.
11. *Фардигола Л. В.* Нелокальная краевая задача в слое для эволюционного уравнения второго порядка по временной переменной // Дифференц. уравнения. – 1995. – **31**, № 4. – С. 662 – 671.
12. *Фардигола Л. В.* Нелокальные двухточечные задачи в слое с дифференциальным оператором в краевом условии // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 8. – С. 1122 – 1128.

13. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения. – 1982. – **18**, № 4. – С. 689 – 699.
14. *Гой Т. П.* Задача з нелокальними умовами для рівняння з частинними похідними, збуреного нелінійним інтегро-диференціальним доданком // Мат. студії: Пр. Львів. мат. т-ва. – 1997. – **8**, № 1. – С. 71 – 78.
15. *Задорожна Н. М., Пташник Б. Й.* Нелокальна крайова задача для параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 1995. – **47**, № 7. – С. 915 – 921.
16. *Илькив В. С., Полищук В. Н., Пташник Б. И.* Нелокальная краевая задача для систем псевдодифференциальных уравнений // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – Киев: Наук. думка, 1989. – С. 75 – 79.
17. *Комарницька Л. І.* Нелокальна крайова задача для рівняння зі змінними коефіцієнтами, не розв'язаного відносно старшої похідної // Вісн. Львів. ун-ту . Сер. мех.-мат. – 1994. – Вип. 40. – С. 17 – 23.
18. *Комарницька Л. І., Пташник Б. Й.* Задача з нелокальними умовами для диференціального рівняння з частинними похідними, яке не розв'язане відносно старшої похідної по часу // Крайові задачі з різними виродженнями і особливостями. – Чернівці: Рута, 1990. – С. 86 – 95.
19. *Комарницька Л. І.* Крайові задачі для диференціальних рівнянь та систем із частинними похідними, не розв'язаних відносно старшої похідної за часом: Автореф. дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 1995. – 24 с.
20. *Полищук В. Н.* Задача с нелокальными краевыми условиями для гиперболических систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1979. – № 3. – С. 171 – 175.
21. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
22. *Пташник Б. Й., Симотюк М. М., Задорожна Н. М.* Задача з нелокальними умовами для квазілінійних гіперболічних рівнянь // Нелинейные граничные задачи. – 2001. – Вып. 11. – С. 161 – 167.
23. *Симотюк М. М.* Нелокальна задача для неізотропних рівнянь з частинними похідними // Відкрита наук.-техн. конф. мол. науковців і спеціалістів Фіз.-мех. ін-ту ім. Г. В. Карпенка НАН України. – Львів, 2002. – С. 161 – 164.
24. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. – М.: Наука, 1965. – 327 с.
25. *Фаддеев Д. К., Соминский И. С.* Сборник задач по высшей алгебре. – М.: Наука, 1972. – 304 с.
26. *Берник В. И., Пташник Б. И., Салыга Б. О.* Аналог многоточечной задачи для гиперболического уравнения с постоянными коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 4. – С. 637 – 645.
27. *Спринджук В. Г.* Метрическая теория диофантовых приближений. – М.: Наука, 1977. – 144 с.

Одержано 23.12.2002