УДК 517.5

Ю. М. Дюкарев, А. Е. Чоке Риверо (Харьков. нац. ун-т)

ИНТЕРПОЛЯЦИОННАЯ ЗАДАЧА В КЛАССЕ $\mathcal{R}[a, b]$

We consider an interpolation problem for matrix functions from the class $\mathcal{R}[a, b]$. For the nondegenerate case, we describe all the solutions in terms of linear fractional transformations. We obtain an explicit formula for the resolvent matrix.

Розглянуто інтерполяційну задачу для матриць-функцій класу $\mathcal{R}[a, b]$. У невиродженому випадку всі розв'язки описано у термінах дробово-лінійних перетворень. Отримано явну формулу для резольвентної матриці.

1. Введение. Пусть задано целое число $m \geq 1$. Обозначим через $\mathcal{R}$ множество матриц-функций $w(z)$ размерности $m \times m$, которые определены и голоморфны в верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ и удовлетворяют условию $\{w(z) - w^*(z)\} / \{2i\} \geq 0$ (назовем их неванлинновскими).

Пусть $[a, b]$ — конечный интервал числовой оси. Обозначим через $\mathcal{R}[a, b]$ множество матриц-функций $s(z)$ размерности $m \times m$, которые определены и голоморфны в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$, определены и непрерывны в точках $x \in (-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ и удовлетворяют условиям:

1) $\{s(z) - s^*(z)\} / \{2i\} \geq 0$, $\operatorname{Im} z > 0$;

2) $s(x) \geq 0$, $x \in (-\infty, a)$, $s(x) \leq 0$, $x \in (b, \infty)$.

Из этого определения видно, что $\mathcal{R}[a, b] \subset \mathcal{R}$. Матрицы-функции $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$ по принципу симметрии Шварца $s(z) = s^*(\bar{z})$ аналитически продолжаются через $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ в нижнюю полуплоскость. Поэтому они фактически определены и голоморфны во всей комплексной плоскости с разрезом по интервалу $[a, b]$.

В настоящей работе поставлена и решена следующая интерполяционная задача Неванлинны – Пика в классе $\mathcal{R}[a, b]$:

Пусть заданы целое число $n \geq 1$, последовательность комплексных чисел

$$z_1, z_2, \ldots, z_n, \quad z_j \neq z_k, \quad z_j \neq \bar{z}_k, \quad j \neq k, \quad \operatorname{Im} z_j \neq 0,$$

и последовательность квадратных матриц $s_1, \ldots, s_n$ размерности $m \times m$.

Требуется описать все матрицы-функции $s(z)$ такие, что

$$s(z_j) = s_j, \quad 1 \leq j \leq n, \quad s(z) \in \mathcal{R}[a, b]. \tag{1}$$

Множество всех решений этой задачи обозначим через $\mathcal{L}$.

Класс скалярных функций $\mathcal{R}[a, b]$ ввел М. Г. Крейн при исследовании степенной проблемы моментов на компактном интервале [1, с. 525]. Этот класс был использован для описания всех решений неопределенной степенной проблемы моментов на компактном интервале. Как известно [2, с. 121], решение проблемы моментов можно свести к описанию неванлинновских функций с предписанной асимптотикой вдоль мнимой оси. В этих терминах можно считать, что при решении проблемы моментов на компактном интервале была решена интерполяционная задача с кратным узлом интерполяции в бесконечно удаленной точке для функций класса $\mathcal{R}[a, b]$.

В данной статье все результаты получены для матричнозначных функций класса $\mathcal{R}[a, b]$. Следует отметить, что проблема моментов на компактном интервале в матричной постановке рассмотрена в [3].

Основными результатами статьи являются теоремы 7 и 8. В теореме 7 дано описание всех решений вполне неопределенной интерполяционной задачи Неванлинны – Пика в классе $\mathcal{R}[a, b]$. В теореме 8 получен критерий разрешимости интерполяционной задачи (1). В работе используется метод В. П. Потапова решения интерполяционных задач [4] и некоторые обобщения для неванлинновских [5] и стильтьесовских [6–9] функций.

2. Сведение интерполяционной задачи к матричным неравенствам. Вместе с каждой матрицей-функцией $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$ будем рассматривать пару матриц-функций

$$s_1(z) = (z-a)s(z), \qquad s_2(z) = (b-z)s(z). \tag{2}$$

Как известно [1, с. 528], матрица-функция $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$ тогда и только тогда, когда $s(z)$ допускает интегральное представление вида

$$s(z) = \int_a^b \frac{d\sigma(t)}{t-z}. \tag{3}$$

Здесь $\sigma(t)$ — неубывающая эрмитова размерности $m \times m$ матрица-функция ограниченной вариации.

По интерполяционным данным задачи (1) построим блочные матрицы

$$K_1 = \left\{ \frac{(z_j - a)s_j - (\bar{z}_k - a)s_k^*}{z_j - \bar{z}_k} \right\}_{j,k=1}^n,$$

$$K_2 = \left\{ \frac{(b - z_j)s_j - (b - \bar{z}_k)s_k^*}{z_j - \bar{z}_k} \right\}_{j,k=1}^n,$$

$$T = \begin{bmatrix} z_1 I & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & z_2 I & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & z_n I \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} I \\ I \\ \vdots \\ I \end{bmatrix},$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} (z_1 - a)s_1 \\ (z_2 - a)s_2 \\ \vdots \\ (z_n - a)s_n \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \begin{bmatrix} (b - z_1)s_1 \\ (b - z_2)s_2 \\ \vdots \\ (b - z_n)s_n \end{bmatrix},$$

$$R_T(z) = (T - zI)^{-1} = \begin{bmatrix} (z_1 - z)^{-1} I & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & (z_n - z)^{-1} I \end{bmatrix}.$$

Теорема 1. *Пусть $s(z)$ является решением задачи* (1). *Тогда $s(z)$ удовлетворяет системе Основных Матричных Неравенств (ОМН) В. П. Потапова* ($\operatorname{Im} z \neq 0$, $z \neq \bar{z}_j$, $1 \leq j \leq n$)

$$\left[\begin{array}{c|c} K_r & R_{T^*}^*(z)\{u_r - v s_r^*(z)\} \\ \hline * & \{s_r(z) - s_r^*(z)\}/\{z - \bar{z}\} \end{array}\right] \geq 0, \qquad r = 1, 2. \tag{4}$$

Доказательство. По условию теоремы $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$. Согласно теореме . она допускает интегральное представление (3). Пусть $r = 1$. Найдем интегральные представления для блоков ОМН (4). Имеем

$$\frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} = \int_a^b \frac{1}{t - z}(t-a)\, d\sigma(t) \frac{1}{t - \bar{z}}.$$

$$K_1 = \int_a^b \begin{bmatrix} \dfrac{I}{t-z_1} \\ \dfrac{I}{t-z_2} \\ \vdots \\ \dfrac{I}{t-z_n} \end{bmatrix} (t-a)\, d\sigma(t) \left[\frac{I}{t-\bar{z}_1}\ \frac{I}{t-\bar{z}_2} \cdots \frac{I}{t-\bar{z}_n} \right] =$$

$$= \int_a^b R_{T^*}^*(t) v (t-a) d\sigma(t) v^* R_{T^*}(t).$$

$$R_{T^*}^*(z)\left[u_r - v s_1^*(z)\right] = -\int_a^b R_{T^*}^*(t) v (t-a) d\sigma(t) \frac{1}{t - \bar{z}}.$$

Следовательно,

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & R_{T^*}^*(z)\left\{u_1 - v s_1^*(z)\right\} \\ \hline * & \left\{s_1(z) - s_1^*(z)\right\} / \{z - \bar{z}\} \end{array} \right] =$$

$$= \int_a^b \begin{bmatrix} R_{T^*}^*(t) v \\ -(t-z)^{-1} I \end{bmatrix} (t-a) d\sigma(t) \left[v^* R_{T^*}(t),\ -(t-\bar{z})^{-1} I \right] \geq 0.$$

Аналогично, при $r = 2$ имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} K_2 & R_{T^*}^*(z)\left\{u_2 - v s_2^*(z)\right\} \\ \hline * & \left\{s_2(z) - s_2^*(z)\right\} / \{z - \bar{z}\} \end{array} \right] =$$

$$= \int_a^b \begin{bmatrix} R_{T^*}^*(t) v \\ -(t-z)^{-1} I \end{bmatrix} (b-t) d\sigma(t) \left[v^* R_{T^*}(t),\ -(t-\bar{z})^{-1} I \right] \geq 0.$$

Теорема доказана.

Докажем теперь утверждение, обратное теореме 1.

Теорема 2. *Пусть матрица-функция $s(z)$ голоморфна в плоскости с разрезом по отрезку $[a, b]$ и построенные по ней с помощью формул (3) матрицы-функции $s_1(z)$, $s_2(z)$ удовлетворяют системе ОМН (4).*

Тогда $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$ и является решением интерполяционной задачи (1).

Доказательство. Из системы ОМН следует, что в верхней полуплоскости

$$\left\{s_r(z) - s_r^*(z)\right\} / \{2i\} \geq 0, \qquad r = 1, 2.$$

Отсюда следует [1, с. 528], что $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$.

Покажем, что матрица-функция $s(z)$ является решением интерполяционной задачи (1). Из ОМН (4) следует

$$\left[\begin{array}{c|c} \dfrac{(z_j - a)s_j - (\bar{z}_j - a)s_j^*}{z_j - \bar{z}_j} & \dfrac{(z_j - a)s_j - s_1^*(z)}{z_j - \bar{z}} \\ \hline \dfrac{(\bar{z}_j - a)s_j^* - s_1(z)}{\bar{z}_j - z} & \dfrac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} \end{array}\right] \ge 0.$$

Пусть e и f — m-мерные вектор-столбцы такие, что $\|e\| \le 1$ и $\|f\| \le 1$. Из последнего неравенства получаем

$$\left[\begin{array}{c|c} f^* \dfrac{(z_j - a)s_j - (\bar{z}_j - a)s_j^*}{z_j - \bar{z}_j} f & f^* \dfrac{(z_j - a)s_j - s_1^*(z)}{z_j - \bar{z}} e \\ \hline e^* \dfrac{(\bar{z}_j - a)s_j^* - s_1(z)}{\bar{z}_j - z} f & e^* \dfrac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} e \end{array}\right] \ge 0.$$

Следовательно,

$$\left| f^* \frac{(z_j - a)s_j - s_1^*(z)}{z_j - \bar{z}} e \right|^2 \le \left[f^* \frac{(z_j - a)s_j - (\bar{z}_j - a)s_j^*}{z_j - \bar{z}_j} f \right] \cdot \left[e^* \frac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z - \bar{z}} e \right].$$

Из ограниченности правой части этого неравенства при $z \to \bar{z}_j$ следует

$$f^*\left[s_1^*(\bar{z}_j) - (z_j - a)s_j\right]e = f^*\left[(z_j - a)s^*(\bar{z}_j) - (z_j - a)s_j\right]e = 0.$$

В последнем равенстве векторы e и f являются произвольными m-мерными вектор-столбцами такими, что $\|e\| \le 1$ и $\|f\| \le 1$. Отсюда следует $s^*(\bar{z}_j) = s_j$. Согласно принципу симметрии $s(z_j) = s_j$, $1 \le j \le n$.

Теорема доказана.

Теоремы 1 и 2 показывают, что множество решений интерполяционной задачи (1) совпадает с множеством голоморфных в плоскости с разрезом по отрезку $[a, b]$ матриц-функций $s(z)$, которые удовлетворяют системе ОМН (4). Поэтому в дальнейшем будем решать систему ОМН (4).

3. Факторизация матричных неравенств. Интерполяционная задача (1) называется невырожденной, если

$$K_1 > 0, \quad K_2 > 0. \tag{5}$$

С каждой невырожденной задачей (1) свяжем две матрицы-функции размерности $2m \times 2m$

$$\begin{aligned} U_1(z) &= \left[\begin{array}{c|c} I & M_1 \\ \hline 0 & I \end{array}\right] \left\{ I - i(z-a)\, J \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] \right\}, \\ U_2(z) &= \left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -M_2 & I \end{array}\right] \left\{ I - i(z-a)\, J \begin{bmatrix} u_2^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(a)\, K_2^{-1} R_T(z)\,[u_2, v] \right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь

$$M_1 = (a-b)v^* R_T^*(a)\, K_2^{-1} R_T(a) v, \qquad J = \left[\begin{array}{c|c} 0 & -iI \\ \hline iI & 0 \end{array}\right].$$
$$M_2 = (a-b)u_1^* R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(a) u_1,$$

Теорема 3. *При* $r = 1, 2$ J-*формы* $U_r^*(z)JU_r(z)$ — J *матриц-функций* $U_1(z)$ *и* $U_2(z)$ *имеют вид*

$$U_r^*(z)JU_r(z) - J = i(\bar{z}-z)\begin{bmatrix} u_2^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_r^{-1} R_T(z)\,[u_r, v]. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем равенство (7) при $r = 1$. Имеем

$$U_1^*(z)JU_1(z) - J =$$

$$= \left\{ I + i(\bar{z}-a)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a)\,[u_1, v] J \right\} J \times$$

$$\times \left\{ I - i(z-a)\, J \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] \right\} - J =$$

$$= i(\bar{z}-a)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a)\,[u_1, v] - i(z-a)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] +$$

$$+ |z-a|^2 \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a)\,[u_1, v]\, J \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] =$$

$$= i(\bar{z}-a)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a)\,[u_1, v] - i(z-a)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] -$$

$$- i|z-a|^2 \begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a)(K_1T^* - TK_1)\, R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] =$$

$$= i\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a) \Big\{ (\bar{z}-a)(T-zI)K_1(T^*-aI) -$$

$$- (z-a)(T-aI)K_1(T^*-\bar{z}I) - |z-a|^2(K_1T^* - TK_1) \Big\}\, R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] =$$

$$= i\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a) \Big\{ (\bar{z}-z)TK_1T^* - (\bar{z}-z)aTK_1 -$$

$$- (\bar{z}-z)aK_1T^* + (\bar{z}-z)a^2K_1 \Big\}\, R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] =$$

$$= i(\bar{z}-z)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(a)(T-aI)K_1(T^*-aI)\, R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v] =$$

$$= i(\bar{z}-z)\begin{bmatrix} u_1^* \\ v^* \end{bmatrix} R_T^*(z)\, K_1^{-1} R_T(z)\,[u_1, v].$$

Первое, второе и третье равенства в этой цепочке равенств вытекают из следующих очевидных тождеств:

$$\begin{pmatrix} I & 0 \\ M_1 & I \end{pmatrix} J \begin{pmatrix} I & M_1 \\ 0 & I \end{pmatrix} = J, \qquad J^2 = J,$$

$$K_r T^* - TK_r = u_r v^* - v u_r^*, \quad r = 1, 2.$$

Аналогичным образом равенство (7) можно доказать при $r = 2$.

Теорема доказана.

Введем обозначение

$$U_r(z) = \left[\begin{array}{c|c} \alpha_r(z) & \beta_r(z) \\ \hline \gamma_r(z) & \delta_r(z) \end{array}\right], \quad r = 1, 2, \tag{8}$$

где $\alpha_r(z)$, $\beta_r(z)$, $\gamma_r(z)$, $\delta_r(z)$ — матрицы-функции размерности $m \times m$.

Теорема 4. *Матрицы-функции* $U_1(z)$ *и* $U_2(z)$ *связаны соотношением*

$$\begin{pmatrix} (z-a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U_1(z) \begin{pmatrix} \dfrac{I}{z-a} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (b-z)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U_2(z) \begin{pmatrix} \dfrac{I}{b-z} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Доказательство. Учитывая (8), соотношение (9) записываем в виде

$$\begin{pmatrix} \alpha_2(z) & \beta_2(z) \\ \gamma_2(z) & \delta_2(z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1(z) & (z-a)(b-z)^{-1}\beta_1(z) \\ (b-z)(z-a)^{-1}\gamma_1(z) & \beta_1(z) \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Покажем, что $\alpha_1(z) = \alpha_2(z)$. Имеем

$$\alpha_1(z) - \alpha_2(z) = I - (z-a)v^* R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z) u_1 +$$

$$+ M_1(z-a)u_1^* R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z) u_1 - I + (z-a)v^* R_T^*(a)\, K_2^{-1} R_T(z) u_2 =$$

$$= (z-a)\Big(-v^* R_T^*(a)\, K_1^{-1} R_T(z) u_1 + v^* R_T^*(a)\, K_2^{-1}(K_2 +$$

$$+ R_T^{-1}(b) R_T(a) K_1) K_1^{-1} R_T(z) u_1 + v^* R_T^*(a)\, K_2^{-1} R_T(z) u_2\Big) =$$

$$= (z-a)\Big(v^* R_T^*(a)\, K_2^{-1} R_T(z) R_T^{-1}(b) R_T(a) u_1 +$$

$$+ v^* R_T^*(a)\, K_2^{-1} R_T(z) u_2\Big) = 0.$$

Здесь мы использовали очевидное тождество

$$u_2 = -R_T^{-1}(b) R_T(a) u_1$$

и тождество

$$(a-b) R_T(a) v u_1^* R_T^*(a) = K_2 + R_T^{-1}(b) R_T(a) K_1. \tag{11}$$

Докажем (11). Для этого достаточно доказать равенства

$$\left\{(a-b)\frac{1}{z_j - a} s_k^*\right\}_{j,k=1}^n =$$

$$= \left\{\left((b-z_j)s_j - (b-\bar{z}_k)s_k^* - \frac{b-z_j}{z_j-a}\big((z_j-a)s_j - (\bar{z}_k - a)s_k^*\big)\right)\frac{1}{z_j - \bar{z}_k}\right\}_{j,k=1}^n.$$

Имеем

$$\left((b-z_j)s_j - (b-\bar{z}_k)s_k^* - \frac{b-z_j}{z_j-a}\big((z_j-a)s_j - (\bar{z}_k - a)s_k^*\big)\right)\frac{1}{z_j - \bar{z}_k} =$$

$$= \left(-(b-\bar{z}_k) + \frac{b-z_j}{z_j-a}(\bar{z}_k-a)\right)\frac{s_k^*}{z_j-\bar{z}_k} =$$

$$= (a-b)\frac{1}{z_j-a}(\bar{z}_j-a)s_k^*\frac{1}{\bar{z}_j-a} = (a-b)\frac{s_k^*}{z_j-a}.$$

Тождество (11) доказано.

Покажем, что

$$\frac{b-z}{z-a}\gamma_1(z) = \gamma_2(z).$$

Имеем

$$\frac{b-z}{z-a}\gamma_1(z) - \gamma_2(z) =$$

$$= (b-z)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}R_T(z)u_1 - \Big((b-a)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}R_T(a)u_1\big[I -$$

$$- (z-a)v^*R_T^*(a)\,K_2^{-1}R_T(z)u_2\big] + (z-a)u_2^*R_T^*(a)\,K_2^{-1}R_T(z)u_2\Big) =$$

$$= (b-z)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}R_T(z)u_1 - (b-a)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}R_T(z)u_1 +$$

$$+ (z-a)(b-a)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}R_T(a)u_1v^*R_T^*(a)\,K_2^{-1}R_T(z)u_2 -$$

$$- (z-a)u_2^*R_T^*(a)\,K_2^{-1}R_T(z)u_2 =$$

$$= (b-z)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}R_T(z)u_1 - (b-a)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}R_T(z)u_1 -$$

$$- (z-a)u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}\Big(K_2 + K_1R_T^*(a)R_T^{*^{-1}}(b)\Big)K_2^{-1}R_T(z)u_2 -$$

$$- (z-a)u_2^*R_T^*(a)\,K_2^{-1}R_T(z)u_2 =$$

$$= -(b-a)u_1^*R_T^*(a)\,K_1R_T(a)u_1 + u_1^*R_T^*(a)\,K_1^{-1}((b-z)(T-aI) +$$

$$+ (z-a)(T-bI)\,R_T(z)\,R_T(a)u_1 = 0.$$

Аналогично доказывается, что

$$\beta_2(z) = \frac{z-a}{b-z}\beta_1(z), \qquad \delta_2(z) = \delta_1(z).$$

Теорема доказана.

Матрица-функция

$$U(z) = \begin{pmatrix} (z-a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U_1(z) \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (b-z)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U_2(z) \begin{pmatrix} (b-z)^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \tag{12}$$

называется резольвентной матрицей интерполяционной задачи (1). Отметим, что определение резольвентной матрицы корректно в силу (9).

Теорема 5. *Во всей комплексной плоскости, за исключением узлов интерполяции и сопряженных точек, матрицы-функции $U_1(z)$ и $U_2(z)$ обратимы и обратные матрицы-функции могут быть найдены по принципу симметрии*

$$U_r^{-1}(z) = JU_r^*(\bar{z})J, \quad r = 1, 2. \tag{13}$$

Более того,

$$U_r^{-1}(z)JU_r^{-1^*}(z) - J =$$
$$= -i(\bar{z}-z)J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)\,K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r, v]J, \quad r = 1, 2. \tag{14}$$

Доказательство. Если в (7) положить $z = \bar{z} = x$, то

$$U_r^*(x)JU_r(x) - J = 0.$$

Умножая это равенство слева на J, получаем

$$JU_r^*(x)JU_r(x) - I = 0. \tag{15}$$

Рассмотрим рациональную матрицу-функцию

$$F(z) = JU_r^*(\bar{z})JU_r(z) - I.$$

Из (15) следует, что на вещественной оси $F(x) = 0$. Согласно теореме единственности $F(z) = 0$. Отсюда следует (13). Подставляя в (7) $\bar{z}$ вместо z и умножая (7) слева и справа на J, получаем

$$JU_r^*(\bar{z})JJJU_r(\bar{z})J - J =$$
$$= i(z-\bar{z})J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)\,K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r, v]J, \quad r = 1, 2.$$

Из (13) следует

$$U_r^{-1}(z)JU_r^{-1^*}(z) - J =$$
$$= -i(\bar{z}-z)J\begin{bmatrix} u_r^* \\ v^* \end{bmatrix} R_{T^*}(z)\,K_r^{-1}R_{T^*}^*(z)[u_r, v]J.$$

Теорема доказана.

Теорема 6. *Во вполне неопределенном случае система ОМН В. П. Потапова* (4) *эквивалентна следующей факторизованной системе ОМН:*

$$[s_r(z)I]\,\frac{U_r^{-1}(z)JU_r^{-1^*}(z)}{i(\bar{z}-z)}\begin{bmatrix} s_r^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0. \tag{16}$$

Доказательство. Умножая неравенство (4) при $r = 1$ слева и справа на матрицы

$$\left[\begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline -\{u_1^* - s_1(z)v^*\}R_{T^*}(z)\,K_1^{-1} & I \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{c|c} I & -K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)\{u_1 - v^*s_1^*(z)\} \\ \hline 0 & I \end{array}\right],$$

имеем

$$\left[\begin{array}{c|c} K_1 & 0 \\ \hline 0 & \dfrac{s_1(z) - s_1^*(z)}{z-\bar{z}} - \{u_1^* - s_1(z)v^*\}R_{T^*}(z)\,K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)\{u_1 - vs_1^*(z)\} \end{array}\right] \geq 0.$$

Отсюда

$$\frac{s_1(z)-s_1^*(z)}{z-\bar z}-\left\{u_1^*-s_1(z)v^*\right\}R_{T^*}(z)\,K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)\left\{u_1-vs_1^*(z)\right\}\geq 0.$$

Последнее неравенство можно записать в виде

$$\left[s_1(z)I\right]\left\{\frac{J}{i(\bar z-z)}-J\begin{bmatrix}u_1^*\\ v^*\end{bmatrix}R_{T^*}(z)\,K_1^{-1}R_{T^*}^*(z)\left[u_1,v\right]J\right\}\begin{bmatrix}s_1^*(z)\\ I\end{bmatrix}\geq 0.$$

Отсюда и из (14) получаем

$$\left[s_1(z)I\right]\frac{U_1^{-1}(z)JU_1^{-1^*}(z)}{i(\bar z-z)}\begin{bmatrix}s_1^*(z)\\ I\end{bmatrix}\geq 0.$$

Таким образом, неравенство (16) доказано при $r=1$. Аналогичным образом неравенство (16) может быть доказано при $r=2$.

4. Решение интерполяционной задачи в классе $\mathcal{R}[a,b]$. Пусть дана пара мероморфных в $C\setminus[a,b]$ м.ф. $[p(z),q(z)]$ и для этой пары существует множество $\mathcal{D}$ изолированных в $C\setminus[a,b]$ точек такое, что

$$\operatorname{rank}[p(z),q(z)]=m,\qquad z\in C\setminus\{[a,b]\cup\mathcal{D}\},\tag{17}$$

$$\left[(z-a)p(z),q(z)\right]\frac{J}{i(\bar z-z)}\begin{bmatrix}(\bar z-a)p^*(z)\\ q^*(z)\end{bmatrix}\geq 0,\quad \operatorname{Im}z\neq 0,\quad z\notin\mathcal{D},\tag{18}$$

$$\left[(b-z)p(z),q(z)\right]\frac{J}{i(\bar z-z)}\begin{bmatrix}(b-\bar z)p^*(z)\\ q^*(z)\end{bmatrix}\geq 0,\quad \operatorname{Im}z\neq 0,\quad z\notin\mathcal{D}.\tag{19}$$

Множество пар, удовлетворяющих условиям (17)–(19), не пусто. Например, пары вида $[s(z),I]$, где $s(z)\in\mathcal{R}[a,b]$, удовлетворяют условиям (17)–(19).

На множестве пар введем отношение эквивалентности: пара $[p(z),q(z)]$ называется эквивалентной паре $[p_1(z),q_1(z)]$, если существует мероморфная и мероморфно обратимая в плоскости с разрезом по $[a,b]$ матрица-функция $Q(z)$ такая, что $p_1(z)=Q(z)p(z)$ и $q_1(z)=Q(z)q(z)$. Через $\mathcal{R}^\infty[a,b]$ обозначим множество классов эквивалентности пар.

Теорема 7. *Дробно-линейное преобразование*

$$s(z)=\{p(z)\beta(z)+q(z)\delta(z)\}^{-1}\{p(z)\alpha(z)+q(z)\gamma(z)\}\tag{20}$$

устанавливает взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности $\mathcal{R}^\infty[a,b]$ и решениями $\mathcal{L}$ невырожденной интерполяционной задачи (1).

Матрица этого дробно-линейного преобразования

$$U(z)=\left[\begin{array}{c|c}\alpha(z)&\beta(z)\\ \hline \gamma(z)&\delta(z)\end{array}\right]$$

является резольвентной матрицей задачи (1) *и задается формулой* (12).

Доказательство разобьем на несколько шагов.

Шаг 1. *Если пара $[p(z),q(z)]$ удовлетворяет условиям* (17)–(19), *то и пара*

$$[p_1(z),q_1(z)]=[p(z),q(z)]U(z)\tag{21}$$

также удовлетворяет условиям (17)–(19).

Из (12) и (13) следует, что матрица-функция $U(z)$ невырождена во всех точках комплексной плоскости с разрезом по отрезку $[a, b]$, кроме узлов интерполяции и сопряженных точек. Поэтому пара $[p_1(z), q_1(z)]$ удовлетворяет условию (17) вместе с парой $[p(z), q(z)]$. Покажем теперь, что условие (18) выполнено для пары $[p_1(z), q_1(z)]$. При $\operatorname{Im} z \neq 0$ имеем

$$[(z-a)p_1(z), q_1(z)] \frac{J}{i(\overline{z}-z)} \begin{bmatrix} (\overline{z}-a)p_1^*(z) \\ q_1^*(z) \end{bmatrix} =$$

$$= [p(z), q(z)] U(z) \begin{pmatrix} (z-a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{J}{i(\overline{z}-z)} \begin{pmatrix} (\overline{z}-a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U^*(z) \begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} =$$

$$= [(z-a)p(z), q(z)] \begin{pmatrix} (z-a)^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U(z) \begin{pmatrix} (z-a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \frac{J}{i(\overline{z}-z)} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} (\overline{z}-a)I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} U^*(z) \begin{pmatrix} (\overline{z}-a)^{-1}I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{bmatrix} (\overline{z}-a)p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} =$$

$$= [(z-a)p(z), q(z)] U_1(z) \frac{J}{i(\overline{z}-z)} U_1^*(z) \begin{bmatrix} (\overline{z}-a)p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq$$

$$\geq [(z-a)p(z), q(z)] \frac{J}{i(\overline{z}-z)} \begin{bmatrix} (\overline{z}-a)p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} \geq 0.$$

Здесь мы использовали неравенство

$$U_1^*(z) J U_1(z) / i(\overline{z}-z) \geq J / i(\overline{z}-z),$$

которое следует из (7). Аналогичным образом убеждаемся в том, что условие (19) выполнено для пары $[p_1(z), q_1(z)]$.

Шаг 2. *Покажем, что в* (21) $\det q_1(z) \not\equiv 0$.

Действительно, пусть невещественная точка z_0 такова, что в некоторой ее окрестности голоморфны все функции, фигурирующие в формуле (21), и, кроме того, в точке z_0 пары $[p(z_0), q(z_0)]$ и $[p_1(z_0), q_1(z_0)]$ удовлетворяют условиям (17)–(19). Тогда имеем

$$0 \leq [(z_0-a)p(z_0), q(z_0)] \frac{J}{i(\overline{z}_0-z_0)} \begin{bmatrix} (\overline{z}_0-a)p^*(z_0) \\ q^*(z_0) \end{bmatrix} =$$

$$= [(z_0-a)p_1(z_0), q_1(z_0)] \frac{U_1^{-1}(z_0) J U_1^{-1*}(z_0)}{i(\overline{z}_0-z_0)} \begin{bmatrix} (\overline{z}_0-a)p_1^*(z_0) \\ q_1^*(z_0) \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$[(z_0-a)p_1(z_0), q_1(z_0)] \frac{U_1^{-1}(z_0) J U_1^{-1*}(z_0)}{i(\overline{z}_0-z_0)} \begin{bmatrix} (\overline{z}_0-a)p_1^*(z_0) \\ q_1^*(z_0) \end{bmatrix} \geq 0. \qquad (22)$$

Пусть m-мерный вектор-столбец e такой, что $q_1^*(z_0)e = 0$. Из (22) следует

$$\left[e^*(z_0-a)p_1(z_0), 0\right]\frac{J-U_1^{-1}(z_0)JU_1^{-1^*}(z_0)}{i(\bar{z}_0-z_0)}\begin{bmatrix}(\bar{z}_0-a)p_1^*(z_0)e\\ 0\end{bmatrix}\leq 0.$$

Отсюда и из (14) получаем

$$\left[e^*p_1(z_0), 0\right]J\begin{bmatrix}u_1^*\\ v^*\end{bmatrix}R_{T^*}(z_0)\,K_1^{-1}R_{T^*}^*(z_0)[u_1, v]J\begin{bmatrix}p_1^*(z_0)e\\ 0\end{bmatrix}\leq 0.$$

Ядро последнего неравенства строго положительно. Поэтому $p_1^*(z_0)e = 0$. В силу (17) из равенств $p_1^*(z_0)e = q_1^*(z_0)e = 0$ следует $e = 0$. Таким образом, $\det q_1(z_0) \neq 0$. Но тогда $\det q_1(z) \not\equiv 0$.

***Шаг* 3.** *Покажем, что дробно-линейное преобразование* (20) *определено для всех пар* $[p(z), q(z)]$, *которые удовлетворяют условиям* (17)–(19), *и* $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$.

По заданной паре $[p(z), q(z)]$, удовлетворяющей условиям (17)–(19), с помощью формулы (21) построим пару $[p_1(z), q_1(z)]$. Получим

$$[p_1(z), q_1(z)] = [p(z)\alpha_1(z) + q(z)\gamma_1(z),\ p(z)\beta_1(z) + q(z)\delta_1(z)].$$

Из шага 2 следует, что $\det q_1(z) \not\equiv 0$. Поэтому $s(z) = q_1(z)^{-1}p_1(z)$ корректно определена как мероморфная матрица-функция

$$s(z) = \{p(z)\beta_1(z) + q(z)\delta_1(z)\}^{-1}\{p(z)\alpha_1(z) + q(z)\gamma_1(z)\}.$$

Согласно построению пара $[p_1(z), q_1(z)]$ эквивалентна паре $[s(z), I]$. Следовательно, пара $[s(z), I]$ в точках голоморфности удовлетворяет (18) и (19), т. е.

$$\frac{(\bar{z}-a)s^*(z)-(z-a)s(z)}{\bar{z}-z}\geq 0,\qquad \frac{(b-\bar{z})s^*(z)-(b-z)s(z)}{\bar{z}-z}\geq 0. \tag{23}$$

Из этих неравенств следует, что все невещественные особенности матриц-функций $(z-a)s(z)$, $(b-z)s(z)$ и $s(z)$ устранимы (см. [10], лемма 8.1). Более того [1, с. 528], $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$.

***Шаг* 4.** *Пары* $[p(z), q(z)]$ *и* $[p_1(z), q_1(z)]$, *удовлетворяющие условиям* (17)–(19), *в результате дробно-линейного преобразования* (20) *приводят к одной и той же матрице-функции* $s(z)$ *тогда и только тогда, когда эти пары эквивалентны.*

Очевидно, что дробно-линейное преобразование (20), примененное к эквивалентным парам $[p(z), q(z)]$ и $[p_1(z), q_1(z)]$, приводит к одной и той же матрице-функции $s(z)$.

Пусть теперь пары $[p(z), q(z)]$ и $[p_1(z), q_1(z)]$ в результате дробно-линейного преобразования (20) приводят к одной и той же матрице-функции $s(z)$. Введем пары

$$[u(z), v(z)] = [p(z), q(z)]U_1(z),$$
$$[u_1(z), v_1(z)] = [p_1(z), q_1(z)]U_1(z).$$

Отсюда

$$\left[v(z)^{-1}u(z), I\right]U_1^{-1}(z) = \left[v^{-1}(z)p(z), v^{-1}(z)q(z)\right],$$
$$\left[v_1(z)^{-1}u_1(z), I\right]U_1^{-1}(z) = \left[v_1^{-1}(z)p_1(z), v_1^{-1}(z)q_1(z)\right].$$

По условию

$$v^{-1}(z)u(z) = v_1^{-1}(z)u_1(z) = s(z).$$

Поэтому

$$\left[v^{-1}(z)p(z), v^{-1}(z)q(z)\right] = \left[v_1^{-1}(z)p_1(z), v_1^{-1}(z)q_1(z)\right].$$

Окончательно

$$p(z) = v(z)v_1^{-1}(z)p_1(z), \qquad q(z) = v(z)v_1^{-1}(z)q_1(z).$$

Шаг 5. *Если матрица-функция* $s(z)$ *удовлетворяет системе ОМН* (4), *то она допускает представление* (20) *с некоторой парой* $[p(z), q(z)]$, *удовлетворяющей условиям* (17)–(19).

Рассмотрим пару

$$[p(z), q(z)] = [s(z), I]U_1^{-1}(z). \tag{24}$$

Покажем, что условия (17)–(19) выполняются для пары (24). Действительно, для всех невещественных точек z, отличных от узлов интерполяции и комплексно-сопряженных точек, имеем

$$[p(z), q(z)]\begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} = [s(z), I]U_1^{-1}(z)U_1^{-1^*}(z)\begin{bmatrix} s^*(z) \\ I \end{bmatrix} > 0.$$

Отсюда следует условие (17). Далее, с учетом (16)

$$[p(z), q(z)]\frac{J}{i(\bar{z}-z)}\begin{bmatrix} p^*(z) \\ q^*(z) \end{bmatrix} = [s(z), I]\frac{U_1^{-1}(z)JU_1^{-1^*}(z)}{i(\bar{z}-z)}\begin{bmatrix} s^*(z) \\ I \end{bmatrix} \geq 0.$$

Итак, условие (18) выполнено. Аналогичным образом убеждаемся в том, что выполнено условие (19).

Из (24) следует

$$[s(z), I] = [p(z)\alpha_1(z) + q(z)\gamma_1(z),\ p(z)\beta_1(z) + q(z)\delta_1(z)].$$

Поэтому

$$s(z) = p(z)\alpha_1(z) + q(z)\gamma_1(z), \qquad I = p(z)\beta_1(z) + q(z)\delta_1(z).$$

Отсюда следует, что $s(z)$ допускает представление (20) для пары $[p(z), q(z)]$, удовлетворяющей условиям (17)–(19).

Шаг 6. *Если пара* $[p(z), q(z)]$ *удовлетворяет условиям* (17)–(19), *то дробно-линейное преобразование* (20) *задает матрицу-функцию* $s(z)$, *удовлетворяющую системе ОМН* (4).

Рассмотрим пару

$$[p_1(z), q_1(z)] = [p(z), q(z)]U_1(z).$$

Матрица-функция $q_1(z)$ мероморфно обратима. Поэтому

$$\left[q_1^{-1}(z)p_1(z), I\right]U_1^{-1}(z) = \left[q_1^{-1}(z)p(z), q_1^{-1}(z)q(z)\right]. \tag{25}$$

Пусть

$$s(z) = q_1^{-1}(z)p_1(z), \qquad P(z) = q_1^{-1}(z)p(z), \qquad Q(z) = q_1^{-1}(z)q(z).$$

Ясно, что $s(z)$ представлена в виде (20) и по шагу 3 $s(z) \in \mathcal{R}[a, b]$. Пара $[P(z), Q(z)]$ удовлетворяет условиям (17)–(19), так как она эквивалентна паре $[p(z), q(z)]$. Из (25) следует

$$0 \le [P(z), Q(z)] \frac{J}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} P^*(z) \\ Q^*(z) \end{bmatrix} = [s(z), I] \frac{U_1^{-1}(z) J U_1^{-1^*}(z)}{i(\bar{z}-z)} \begin{bmatrix} s^*(z) \\ I \end{bmatrix}.$$

Таким образом, $s(z)$ удовлетворяет ОМН (16) при $r = 1$. Аналогичным образом убеждаемся, что $s(z)$ удовлетворяет (16) при $r = 2$. Следовательно, $s(z) \in \mathcal{L}$.

Теорема доказана.

Теорема 8. *Для разрешимости задачи Неванлинны – Пика* (1) *необходимо и достаточно, чтобы* $K_1 \ge 0$, $K_2 \ge 0$.

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$s(z) = \int_a^b (t-z)^{-1} d\sigma(t)$$

является решением интерполяционной задачи Неванлинны – Пика (1). Как и при доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что

$$K_1 = \int_a^b R_{T^*}^*(t) v(b-t) d\sigma(t) v^* R_{T^*}(t) \ge 0,$$

$$K_2 = \int_a^b R_{T^*}^*(t) v(t-a) d\sigma(t) v^* R_{T^*}(t) \ge 0.$$

Достаточность. Рассмотрим вспомогательную интерполяционную задачу. Узлы интерполяции будут такими же, как и в задаче (1), а интерполируемые значения задаются формулами

$$w_1 = \int_a^b \frac{I dt}{t - z_1},\ w_2 = \int_a^b \frac{I dt}{t - z_2},\ \ldots,\ w_n = \int_a^b \frac{I dt}{t - z_n}.$$

Требуется описать решения интерполяционной задачи

$$w(z_j) = w_j, \quad 1 \le j \le n, \quad w(z) \in \mathcal{R}[a, b]. \tag{26}$$

Легко видеть, что

$$w(z) = \int_a^b I(t-z)^{-1} dt$$

является решением интерполяционной задачи (26). Но тогда, как и при доказательстве теоремы 1, имеем

$$K_1^w = \int_a^b R_{T^*}^*(t) v v^* R_{T^*}(t)(b-t)\, dt \ge 0,$$

$$K_2^w = \int_a^b R_{T^*}^*(t) v v^* R_{T^*}(t)(t-a)\, dt \ge 0.$$

Покажем, что эти матрицы строго положительны. Действительно, пусть на некотором nm-мерном столбце $F = \mathrm{col}\,[f_1, f_2, \ldots, f_n]$ выродилась матрица K_1^w. Тогда

$$0 = F^* K_1^w F = \int_a^b F^*(t) F(t)(b-t)\, dt, \qquad F(t) = v^* R_{T^*}(t) F.$$

Отсюда следует $F(t) \equiv 0$. Но тогда $F = 0$. Таким образом, $K_1^{w} > 0$. Аналогичные рассуждения приводят к выводу $K_2^{w} > 0$. Мы доказали, что вспомогательная интерполяционная задача (26) является невырожденной.

Пусть теперь дана интерполяционная задача (1) и для нее выполнено условие теоремы $K_1 \geq 0$, $K_2 \geq 0$. Покажем, что задача (1) имеет хотя бы одно решение.

При каждом $k \geq 1$ рассмотрим интерполяционную задачу

$$s(z_j) = s_j + w_j/k, \quad 1 \leq j \leq n, \quad s(z) \in \mathcal{R}[a, b]. \tag{27}$$

Из невырожденности задачи (26) вытекает невырожденность задачи (27) при всех k. При каждом k выберем по одному решению $s_k(z)$ задачи (27). Легко видеть, что

$$\| s_k(z_1) \| \leq \| s_1 \| + \| w_1 \| \quad \forall k \geq 1.$$

Отсюда следует [11, с. 32], что существует подпоследовательность $s_{k_l}(z)$, которая равномерно на компактах в полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$ сходится к голоморфной матрице-функции $S(z)$. Для каждой из матриц-функций $s_{k_l}(z)$ запишем систему ОМН (4). Переходя к пределу, получаем, что матрица-функция $S(z)$ удовлетворяет системе ОМН, т. е. является решением задачи (1).

Теорема доказана.

1. *Крейн М. Г., Нудельман А. А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. – М.: Наука, 1973. – 552 с.
2. *Ахиезер Н. И.* Классическая проблема моментов. – М.: Физматгиз, 1961. – 310 с.
3. *Дюкарев Ю. М., Чоке Риверо А. Е.* Степенная проблема моментов на компактном интервале // Мат. заметки. – 2001. – **69**, вып. 2. – С. 200 – 213.
4. *Ковалишина И. В.* Аналитическая теория одного класса интерполяционных задач // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1983. – **47**, № 3. – С. 455 – 497.
5. *Sakhnovich L. A.* Interpolation theory and its applications // Math. and its Appl. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997. – **428**. – 197 p.
6. *Dyukarev Yu. M.* Integral representations of a pair of nonnegative operators and interpolations problems on the Stieltjes class // Operator Theory: Adv. and Appl. – 1997. – **95**. – P. 165 – 184.
7. *Дюкарев Ю. М.* Общая схема решений интерполяционных задач в классе Стилтьеса, основанная на согласованных интегральных представлениях пар неотрицательных операторов. I // Мат. физика, анализ, геометрия. – 1999. – **6**, № 1 / 2. – С. 30 – 54.
8. *Дюкарев Ю. М.* Факторизация оператор-функций мультипликативного класса Стилтьеса // Докл. НАН Украины. – 2000. – № 9. – С. 23 – 26.
9. *Bolotnicov V., Sakhnovich L.* On an operator approach to interpolations problems for Stieltjes functions // Integral Equations and Operator Theory. – 1999. – **35**, № 4. – P. 423 – 470.
10. *Dym H.* On Hermitian block Hankel matrices, matrix polynomials, the hamburger moment problem, interpolation and maximum entropy // Ibid. – 1989. – **12**. – P. 757 – 812.
11. *Donoghue W. F.* Monotone matrix functions and analytic continuation. – New York: Springer, 1974. – 182 p.

Получено 04.12.2001