УДК 517.9

А. В. Капустян, Н. А. Перестюк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ГЛОБАЛЬНЫЙ АТТРАКТОР ЭВОЛЮЦИОННОГО ВКЛЮЧЕНИЯ С ИМПУЛЬСНЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ В ФИКСИРОВАННЫЕ МОМЕНТЫ ВРЕМЕНИ*

We consider an autonomous evolution inclusion with impulse perturbations at fixed times. Under conditions of the global solvability, we prove the existence of minimal compact set in the phase space that attracts all the trajectories.

Розглядається автономне еволюційне включення з імпульсними збуреннями у фіксовані моменти часу. За умов глобальної розв'язності доведено існування у фазовому просторі мінімальної компактної множини, що притягує всі траєкторії.

В настоящей работе методами теории неавтономных динамических систем исследуется качественное поведение решений эволюционного включения с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени [1]

$$\frac{du}{dt} \in -\partial\varphi(u) + F(u), \qquad u\big|_{t=\tau} = u_\tau \in H, \tag{1}$$

$$u(t_i^0+0) - u(t_i^0) \in G_i\big(u(t_i^0)\big), \quad i \geq 1, \quad 0 < t_1^0 < t_2^0 < \ldots, \quad t_i^0 \to +\infty. \tag{2}$$

Здесь $(H, \|\cdot\|)$ — гильбертово пространство, $\varphi: H \mapsto (-\infty, +\infty)$ — собственная, выпуклая, полунепрерывная снизу функция, $\partial\varphi: D(\partial\varphi) \mapsto 2^H$ — ее субдифференциал.

Далее $\|\cdot\|$ и $(\cdot,\cdot)$ — норма и скалярное произведение в H, для любых A, $B \subset H$ $\operatorname{dist}(A, B) = \sup_{x\in A} \inf_{y\in B} \|x-y\|$, $B_r(A) = \{x \in H \mid \operatorname{dist}(x, A) < r\}$, $\|A\|_+ := \sup_{x\in A} \|A\|$, $\overline{A}$ — замыкание A в H, $P(H)$ $(\beta(H))$ — совокупность всех непустых (непустых, ограниченных) подмножеств H, $R_+ = [0, +\infty)$, $R_{+d} = \{(t, \tau) \in R_+^2 \mid t \geq \tau\}$.

Известно [2], что $\overline{D(\partial\varphi)} = \overline{D(\varphi)} := X$ и $(X, \|x-y\|)$ — полное метрическое пространство. Пусть выполнены следующие условия:

1) $F: H \mapsto C_v(H)$, т. е. для любого $u \in H$ $F(u)$ — ограниченное, замкнутое, выпуклое множество;

2) $\exists D_1, D_2 \geq 0 \ \ \forall u \in H \ \ \|F(u)\|_+ \leq D_1 + D_2\|u\|$;

3) F — w-полунепрерывно сверху, т. е. для любых $\varepsilon > 0$ и $u_0 \in H$ существует $\delta > 0$ такое, что $F(B_\delta(u_0)) \subset B_\varepsilon(F(u_0))$;

4) $\exists \delta > 0, M > 0 \ \ \forall u \in D(\partial\varphi), \ \|u\| > M, \ \forall y \in -\partial\varphi(u) + F(u)$ $(y, u) \leq -\delta$;

5) для любого $R > 0$ множество $M_R = \{u \in D(\varphi) \mid \|u\| \leq R, \ \varphi(u) \leq R\}$ — компакт в H;

6) $\forall i \geq 1 \ \ G_i: H \mapsto \beta(H) \ \ \forall u \in H \ \ \|G_i(u)\|_+ \leq a_i$, где $a_i \to 0, \ i \to \infty$;

7) для любых $u \in X$ и $i \geq 1$ справедливо вложение $u + G_i(u) \subset X$;

* Выполнена при поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований Украины (грант № 01.07/00047).

8) существует $\alpha > 0$ такое, что $t_1^0 \geq \alpha$, $t_{i+1}^0 - t_i^0 \geq \alpha \;\; \forall i \geq 1$.

Согласно [3], условия 1 – 5 гарантируют для любых $\tau \geq 0$, $u_\tau \in X$ и $T > \tau$ существование по крайней мере одного сильного решения включения (1) на $[\tau, T]$, исходящего из точки u_τ, т. е. существуют $f(\cdot) \in L_2(\tau, T; H)$ и почти всюду на $(0, T)$ дифференцируемая функция $u(\cdot) \in C([\tau, T]; X)$ такие, что $u(\cdot)$ — единственное решение задачи

$$\frac{du(t)}{dt} \in -\partial\varphi(u(t)) + f(t), \quad t \in [\tau, T],$$
$$u\big|_{t=\tau} = u_\tau, \tag{3}$$

где $u(\cdot)$ удовлетворяет включению почти всюду на $[\tau, T]$ и $f(t) \in F(u(t))$ для почти всех $t \in [\tau, T]$.

Условия 6, 7 позволяют обобщить этот результат на задачу (1), (2), понимая решение как абсолютно непрерывную функцию на каждом из интервалов $\left[\tau + 0, t_i^0\right]$, $\left[t_i^0 + 0, t_{i+1}^0\right], \ldots$, которая удовлетворяет (1) почти всюду и имеет скачки (2). Таким образом, условия 1 – 7 гарантируют разрешимость (1), (2) на $[\tau, T]$ для любых $T > \tau$.

Наша цель — доказать существование в фазовом пространстве X минимального компактного множества (глобального аттрактора), которое притягивает все траектории. При отсутствии импульсных воздействий (2) задача (1) автономна и порождает многозначную полугруппу, для которой в [4] доказано существование глобального аттрактора. Для неавтономных систем динамика решений может быть описана с помощью теории м-полупроцессов [5]. Поскольку сдвиг решений по времени уже не будет решением (1), (2) в силу фиксированности точек импульса, задача (1), (2) не порождает многозначную полугруппу и представляется естественным связать с ней семейство м-полупроцессов.

Построение семейства м-полупроцессов для задачи (1), (2).

Определение 1 [5]. *Семейство многозначных отображений* $U_\sigma : R_{+d} \times X \mapsto P(X)$, $\sigma \in \Sigma$, *будем называть семейством м-полупроцессов, если* Σ — *компактное метрическое пространство, на котором определена непрерывная полугруппа* $\{T(s),\; s \geq 0\}$, *причем для любого* $s \geq 0$ $T(s)\Sigma \subset \Sigma$ *и для* $\sigma \in \Sigma$, $u \in X$ *выполнены следующие условия*:

а) $U_\sigma(t, t, u) = u \;\; \forall t \in R_+$;

б) $U_\sigma(t, \tau, u) \subset U_\sigma(t, s, U_\sigma(s, \tau, u))$, $t \geq s \geq \tau$;

в) $U_\sigma(t + h, \tau + h, u) \subset U_{T(h)\sigma}(t, \tau; u) \;\; \forall (t, \tau) \in R_{+d}$, $h \geq 0$.

Для задачи (1), (2) рассмотрим множество

$$\Sigma = \left\{ \begin{array}{ll} \{0\} \times \left(t_1^0, t_2^0, \ldots, t_i^0, \ldots\right), & h = 0, \\ \{1\} \times \left(t_1^0 - h, t_2^0 - h, \ldots, t_i^0 - h, \ldots\right), & 0 < h \leq t_1^0, \\ \{2\} \times \left(t_2^0 - h, t_3^0 - h, \ldots, t_i^0 - h, \ldots\right), & t_1^0 < h \leq t_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \\ \{i\} \times \left(t_i^0 - h, t_{i+1}^0 - h, \ldots\right), & t_{i-1}^0 < h \leq t_i^0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots \end{array} \right\}. \tag{4}$$

Будем писать $\sigma_h \in \Sigma$, если $\sigma_h = \{i\} \times \left(t_i^0 - h, t_{i+1}^0 - h, \ldots\right)$.

Дополним множество Σ элементом σ_∞ (что соответствует $h = \infty$, $i = \infty$) и введем на Σ метрику ρ таким образом:

$$\forall\, \sigma_{h_1}, \sigma_{h_2} \in \Sigma \quad \rho\left(\sigma_{h_1}, \sigma_{h_2}\right) := \left|\frac{1}{h_1+1} - \frac{1}{h_2+1}\right|, \quad \rho\left(\sigma_\infty, \sigma_{h_1}\right) := \frac{1}{h_1+1}.$$

Лемма 1. (Σ, ρ) — *компактное метрическое пространство.*

Доказательство. Легко проверить, что (Σ, ρ) — метрическое пространство. Докажем его компактность. Пусть $\left\{\sigma_{h_n}\right\} \subset \Sigma$.

1. Если существует подпоследовательность $h_m \to \infty$, то $h_m \in \left(t^0_{i_m-1}, t^0_{i_m}\right]$ и $i_m \to \infty$. Следовательно, $\rho\left(\sigma_{h_m}, \sigma_\infty\right) = 1/(h_m+1) \to 0$, т. е. $\sigma_{h_m} \to \sigma_\infty \in \Sigma$.

2. Если $|h_n| \le \text{const}$, то существует подпоследовательность $h_m \to h_0$. Отсюда $\rho\left(\sigma_{h_m}, \sigma_{h_0}\right) = |1/(1+h_m) - 1/(1+h_0)| \to 0$, $m \to \infty$ и $\sigma_{h_m} \to \sigma_{h_0} \in \Sigma$, что и означает компактность Σ.

Лемма доказана.

Теперь определим на Σ для каждого $s \ge 0$ отображение $T(s): \Sigma \mapsto \Sigma$, которое действует таким образом: $\forall\, \sigma_h \in \Sigma\ T(s)\sigma_h := \sigma_{h+s}$, $T(s)\sigma_\infty := \sigma_\infty$. Очевидно, $T(s_1)T(s_2)\sigma_h = T(s_1+s_2)\sigma_h = \sigma_{h+s_1+s_2}$, т. е. $\{T(s) \mid s \ge 0\}$ — полугруппа, причем $T(s)\Sigma \subset \Sigma$. Далее, $T(s)$ непрерывно для любого $s \ge 0$. Действительно, если $\sigma_{h_n} \to \sigma_{h_0}$, то $T(s)\sigma_{h_n} = \sigma_{h_n+s} \to \sigma_{h_0+s} = T(s)\sigma_{h_0}$ при $h_n \to h_0$.

Для произвольных $\sigma \in \Sigma$, $(t, \tau) \in R_{+d}$, $u_\tau \in X$ корректно определено многозначное отображение $U_\sigma: R_{+d} \times X \mapsto 2^X$:

$$U_\sigma(t, \tau, u_\tau) = \{u(t) \mid u(\cdot) \text{ — сильное решение (1)}$$

$$\text{с набором импульсов } \sigma \in \Sigma,\ u(\tau) = u_\tau\}, \tag{5}$$

причем если $\sigma = \{i\} \times \left(t^0_i - h, \ldots\right)$, $h \in \left(t^0_{i-1}, t^0_i\right]$, то в момент $t^0_i - h$ наблюдается скачок величины a_i, в момент $t^0_{i+1} - h$ — скачок величины a_{i+1} и т. д. Элементу σ_∞ соответствует отсутствие скачков.

Лемма 2. *Семейство* $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ *из* (5) *является семейством м-полупроцессов и в условиях* б), в) *определения* 1 *имеют место равенства.*

Доказательство. Проверим выполнение условий определения 1. Из леммы 1 следуют необходимые условия на Σ. Свойство а) очевидно в силу (5). Пусть $z \in U_\sigma(t_1 + t_2, \tau, u)$. Тогда существует $u(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов σ, причем $z = u(t_1 + t_2)$, $u(\tau) = u$. В этом случае $u(t_2) \in U_\sigma(t_2, \tau, u)$. Определим $y(t) = u(t)$, $t \ge t_2$. Тогда $y(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов σ, $y(t_2) \in U_\sigma(t_2, \tau, u)$, $y(t_1 + t_2) = u(t_1 + t_2) = z \in U_\sigma(t_1 + t_2, t_2, y(t_2)) \subset U_\sigma(t_1 + t_2, t_2, U_\sigma(t_2, \tau, u))$ и вложение б) доказано. Докажем равенство. Пусть $z \in U_\sigma(t, s, U_\sigma(s, \tau, u))$. Тогда существуют $u(\cdot)$, $v(\cdot)$ — решения (1) с набором импульсов σ такие, что $u(\tau) = u$, $u(s) = v(s)$, $v(t) = z$. Функция

$$w(p) = \begin{cases} u(p), & p \in [\tau, s]; \\ v(p), & p \in [s, t], \end{cases}$$

является решением (1) с набором импульсов σ, причем $w(t) = z$, $w(\tau) = u$. Отсюда $z = w(t) \in U_\sigma(t, \tau, u)$. Докажем равенство в). Пусть $z \in U_\sigma(t_1 + h, \tau + h,$

u). Тогда существует $u(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов $\sigma = \{i\} \times (s_i, s_{i+1}, \ldots)$ такое, что $u(t_1 + h) = z$, $u(\tau + h) = u$. Рассмотрим функцию $w(t) = u(t+h)$. Поскольку $u(s_i) = w(s_i - h)$, $w(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов $T(h)\sigma$ такое, что $w(t_1) = z$, $w(\tau) = u$. Отсюда $z \in U_{T(h)\sigma}(t_1, \tau, u)$. Пусть теперь $z \in U_{T(h)\sigma}(t_1, \tau, u)$. Тогда существует $u(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов $T(h)\sigma$ такое, что $u(t_1) = z$, $u(\tau) = u$. Рассмотрим функцию $w(t) = u(t-h)$. Тогда $w(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов σ, причем $w(t_1 + h) = z$, $w(\tau + h) = u$. Отсюда $z \in U_\sigma(t_1 + h, \tau + h, u)$. Поскольку для σ_∞ соотношения а) – в) очевидны, лемма доказана.

Глобальный аттрактор семейства м-полупроцессов (5).

Определение 2[5]. *Множество $\Theta_\Sigma \subset X$ называется глобальным аттрактором семейства м-полупроцессов $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$, если*

Θ_Σ — равномерно притягивающее множество, т. е.

$$\forall \tau \geq 0, \ \forall B \in \beta(X) \ \ \operatorname{dist}\left(\bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(t, \tau, B), \Theta_\Sigma\right) \to 0, \quad t \to \infty;$$

$\Theta_\Sigma \neq X$ и для любого равномерно притягивающего множества Y $\Theta_\Sigma \subset \overline{Y}$.

Таким образом, если мы докажем существование у семейства (5) глобального аттрактора Θ_Σ, то в силу определения 2 и конструкции множества Σ это, в частности, будет означать, что любое решение (1), (2) с течением времени притягивается к Θ_Σ. Доказательство существования Θ_Σ основывается на следующей лемме.

Лемма 3 [5]. *Пусть X — бесконечномерное банахово пространство и для семейства м-полупроцессов $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ выполнены следующие условия*:

1) $\forall B \in \beta(X)$, $\tau \geq 0$, $\exists T \geq \tau$ $\displaystyle\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcup_{t \geq T} U_\sigma(t, \tau, B) \in \beta(X)$;

2) $\forall B \in \beta(X)$, $\forall \xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n, \tau, B)$, $\sigma_n \in \Sigma$, $t_n \to \infty$: $\{\xi_n\}$ — *предкомпактна в* X;

3) *существует* $t_* > 0$ *такое, что отображение* $\Sigma \times X \ni (\sigma, u) \mapsto U_\sigma(t, 0, u)$ *имеет замкнутый график для всех* $t \in (0, t_*)$;

4) $\exists B_0 \in \beta(X)$ $\forall u \in X$ $\operatorname{dist}\left(\displaystyle\bigcup_{\sigma \in \Sigma} U_\sigma(t, 0, u), B_0\right) \to 0, \quad t \to \infty.$

Тогда множество

$$\Theta_\Sigma = \bigcup_{\tau \geq 0} \bigcup_{B \in \beta(X)} \bigcap_{t \geq \tau} \overline{\bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcup_{p \geq t} U_\sigma(p, \tau, B)}$$

является компактным глобальным аттрактором семейства $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$.

Положим $t_* = \alpha / 4$, где α взято из условия 8, и докажем основной результат работы.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1 – 8, $\overline{D(\varphi)} = H$, *для любого* $i \geq 1$ *отображение* $G_i : H \mapsto C_v(H)$ *полунепрерывно сверху,* $\forall u \in D(\partial\varphi)$ $\sup_{v \in \partial\varphi(u)} \|v\| < \infty$, $\forall \xi \in \partial\varphi(u)$ $\forall g \in D(\partial\varphi)$ $\exists \theta \in \partial\varphi(g)$ $(\xi, g) = (u, \theta)$. *Тогда семейство м-полупроцессов* $\{U_\sigma \mid \sigma \in \Sigma\}$ *из* (5) *имеет компактный в* H *глобальный аттрактор.*

Доказательство. В силу условия теоремы $X = H$. Обозначим $D =$

$=\sum_{i=1}^{N_0} a_i$, где $N_0 = \max\{i \mid a_i > 2\alpha\delta\}$, α, δ определены условиями 4, 8, $B_R = \{u \in X \mid \|u\| \le R\}$ и если $u(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов σ, будем писать $(u(\cdot), \sigma)$ — решение (1). Сначала докажем, что

$$\forall \sigma \in \Sigma \quad \forall t \ge 0: U_\sigma(t, 0, B_{M+\varepsilon}) \subset B_{M+\varepsilon+D}, \tag{6}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольно. Предположим, что это не так. Тогда существуют $(u(\cdot), \sigma)$ — решение (1) и $t_0 > 0$ такие, что $u(0) \in B_{M+\varepsilon}$, $\|u(t_0)\| > M + D + \varepsilon > M + \varepsilon$. Если $t_0 \in (s_k, s_{k+1})$, где $\{s_k\}_{k=i}^{\infty}$ — моменты импульсов, которые соответствуют σ, и $\|u(s_k + 0)\| \le M + \varepsilon$, то в силу непрерывности $u(\cdot)$ на (s_k, s_{k+1}) существует $t_1 \in (s_k, t_0)$ такое, что $\|u(t_1)\| > M + \varepsilon$, $\|u(t)\| \ge M + \varepsilon > M$ $\forall t \in [t_1, t_0]$. Тогда на $[t_1, t_0]$ можно домножить (1) на $u(t)$ и воспользоваться условием 4. Получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(t)\|^2 \le -\delta, \qquad t \in [t_1, t_0].$$

Тогда $\|u(t_0)\|^2 \le \|u(t_1)\|^2 - 2\delta(t_0 - t_1) < (M+\varepsilon)^2$ и приходим к противоречию. Следовательно, выход из $B_{M+\varepsilon}$ возможен лишь в момент импульса. Пусть это произошло в момент s_j, $j \ge i$. Тогда $\forall t \in [0, s_j]$ $\|u(t)\| \le M + \varepsilon$, $\|u(s_j + 0)\| > M + \varepsilon$, $\|u(s_j + 0)\| \le M + \varepsilon + a_j$. Если для некоторого $t_1 \in (s_j, s_{j+1})$ $\|u(t_1)\| = M + \varepsilon$, то $\forall t \in (s_j, t_1)$ $\|u(t)\|^2 \le \|u(s_j + 0)\|^2 - 2\delta(t_1 - s_j)$, а из предыдущих рассуждений $\forall t \in [t_1, s_{j+1}]$ $\|u(t)\| \le M + \varepsilon$. Иначе $\forall t \in (s_j, s_{j+1}]$ $\|u(t)\| > M + \varepsilon$, следовательно, $\|u(t)\|^2 \le \|u(s_j + 0)\|^2 - 2\delta(t - s_j) \le M + \varepsilon + a_j - 2\delta(t - s_j)$, $\|u(s_{j+1})\| \le M + \varepsilon + a_j - 2\delta\alpha$. Таким образом, $\forall t \in [0, s_{N_0+1}]$ $\|u(t)\| \le M + \varepsilon + D$, $\left\|u(s_{N_0+1} + 0)\right\| \le M + \varepsilon + D + a_{N_0+1} - 2\delta\alpha \le M + \varepsilon + D$. Следовательно, $\forall t \ge 0$ $\|u(t)\| \le M + \varepsilon + D$, что противоречит предположению. Из (6) следует, что

$$\forall N > M \quad \forall \sigma \in \Sigma \quad \forall t \ge 0: U_\sigma(t, 0, B_N) \subset B_{N+D}. \tag{7}$$

Поскольку $U_\sigma(t, \tau, u) \subset U_{T(\tau)\sigma}(t - \tau, 0, u)$, то п. 1 леммы 3 доказан.

Докажем п. 4. В качестве B_0 возьмем B_{M+1+2D}. Покажем, что $\forall u_0 \notin B_{M+1}$ $\exists t_0 > 0$ $\forall \sigma \in \Sigma$ $U_\sigma(t, 0, u_0) \subset B_{M+1+D}$. Предположим, что это не так. Тогда найдется $u_0 \notin B_{M+1}$ такое, что для любого $T \ge 0$ существует $(u(\cdot), \sigma)$ — решение (1), причем $u(0) = u_0$ и $\|u(T)\| > M + 1 + D$. Отсюда и из (6) следует, что $\|u(s)\| > M + 1$ $\forall s \in [0, T]$. Однако $\exists N > M + 1$ $\|u_0\| \le N$. Тогда в силу (7) $\|u(t)\| \le N + D$ $\forall t \ge 0$. Далее, поскольку $\|u(s_k + 0)\| \le \|u(s_k)\| + a_k$, то $\|u(s_k + 0)\|^2 \le (1 + a_k)\|u(s_k)\|^2 + 4a_k + a_k^2$. В силу предположения $\|u(t)\| > M + 1 > M$ $\forall t \in [0, T]$ из условия 4 выводим неравенства

$$\|u(s_i)\|^2 \le \|u_0\|^2 - 2\delta\alpha,$$

$$\|u(s_{i+1})\|^2 \le (1 + a_i)\|u(s_i)\|^2 + 4a_i + a_i^2 - 2\delta\alpha,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\|u(s_{i+j+1})\|^2 \le (1 + a_{i+j})\|u(s_{i+j})\|^2 + 4a_{i+j} + a_{i+j}^2 - 2\delta\alpha,$$

где s_{i+j+1} — последний импульс перед моментом времени T. Теперь сложим все эти неравенства и с учетом $\|u(t)\| \le N+D$ для любого $t \ge 0$ получим $\|u(s_{l+j+1})\|^2 \le (N+D)^2(D+1)+4D+D^2-2j\delta\alpha$. Поскольку момент T можно выбрать произвольно большим, приходим к противоречию с неравенством $\|u(s_{l+j})\| > M+1$, и требуемое доказано.

Тогда $\forall t > t_0 \ \forall u_0 \in H \ \forall \sigma \in \Sigma \ U_\sigma(t, 0, u_0) \subset U_\sigma(t, t_0, U_\sigma(t_0, 0, u_0)) \subset U_\sigma(t, t_0, B_{M+1+D}) \subset U_{T(t_0)\sigma}(t-t_0, 0, B_{M+1+D}) \subset B_{M+1+2D}$ и п. 4 леммы 3 доказан.

Докажем п. 2. Для заданных $B \in \beta(H)$, $\tau \ge 0$ и последовательностей $\{t_n\}$, $\{\sigma_n\}$ начиная с некоторого номера n_0 имеем

$$\xi_n \in U_{\sigma_n}(t_n, \tau, B) \subset U_{T(\tau)\sigma_n}(t_n-\tau, 0, B) \subset$$

$$\subset U_{T(\tau)\sigma_n}\left(t_n-\tau, t_n-\tau-t^*, U_{T(\tau)\sigma_n}(t_n-\tau-t^*, 0, B)\right) \subset$$

$$\subset U_{T(\tau)\sigma_n}(t_n-\tau, t_n-\tau-t^*, B_0) \subset U_{T(t_n-\tau-t^*)T(\tau)\sigma_n}(t^*, 0, B_0) \subset$$

$$\subset U_{T(t_n-t^*)\sigma_n}(t^*, 0, B_0),$$

где момент времени $t^* > 0$ — произвольный. Пусть $\sigma_n = \{i_n\} \times \times \left(t^0_{i_n} - h_n, t^0_{i_n+1} - h_n, \ldots\right)$. Поскольку $t_n \to \infty$, независимо от значений h_n и t^* $T(t_n - t^*)\sigma_n \to \sigma_\infty$. Заметим, что для $n \ge 1$ мы знаем элементы $t^0_i - h_n - t_n$. Тогда для любого $n \ge n_0$ существует номер $m(n)$ такой, что $\tau^1_n := t^0_{m(n)} - t_n - h_n < 0$, $\tau_n := t^0_{m(n)+1} - t_n - h_n > 0$. При этом $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$ и $\tau_n - \tau^1_n \ge \alpha > 0 \ \forall n \ge n_0$ в силу условия 8. Поскольку всегда можно перейти к рассмотрению подпоследовательности (нужно доказать предкомпактность $\{\xi_n\}$), возможны две ситуации.

1. $\exists \varepsilon \in (0, \alpha) \ \forall n \ge n_0 \ \tau^1_n < -\varepsilon$. Тогда для $t^* \in (0, \varepsilon)$ $\tau^1_n + t^* < 0$, $\tau_n + t^* > t^*$ и на интервале $[0, t^*]$ любое решение $u_n(\cdot)$ такое, что $u_n(t^*) \in U_{T(t_n-t^*)\sigma_n}(t^*, 0, B_0)$, не имеет импульсов. Таким образом, имеем последовательность решений $\{u_n(\cdot)\}$ включения (1), причем на $[0, t^*]$ импульсов нет, $u_n(t^*) = \xi_n$, $u_n(0) \in B_0$. Далее нам понадобится следующий результат.

Лемма 4 [2]. *Если* $f \in L_2(\tau, T; H)$, $u_\tau \in X$, *то задача* (3) *на* $[\tau, T]$ *с начальным условием* $u(\tau) = u_\tau$ *имеет единственное решение в классе* $C([\tau, T]; X)$, *причем для любого* $t \in (\tau, T]$ $u(t) \in D(\varphi)$ *и справедлива оценка*

$$(t-\tau)\varphi(u(t)) \le \frac{1}{2}\int_\tau^t (s-\tau)\|f(s)\|^2 ds + \left(\|u(\tau)\| + \int_\tau^t \|f(s)\| ds\right)^2. \tag{8}$$

Воспользуемся оценкой (8) для функции $u_n(\cdot)$ — решения задачи (3) на $[0, t^*]$ с правой частью f_n. Поскольку $u_n(0) \in B_0$, $f_n(t) \in F(u_n(t))$ для почти всех $t \in [0, t^*]$, то в силу (7) и условия 2 $\|f_n(t)\| \le D_1 + D_2\|u_n(t)\|$ и

$$\forall t \ge 0 \ \ \|u_n(t)\| \le M + 1 + 3D. \tag{9}$$

Тогда из оценки (8) следует существование константы $R > 0$ такой, что для любого $n \ge n_0$ $\varphi(u_n(t^*)) \le R$. Отсюда $\{\xi_n\} \subset M_R$ и предкомпактность $\{\xi_n\}$ доказана.

2. $\tau^1_n < 0$, $\tau^1_n \to 0$ при $n \to \infty$. Выберем $t^* \in (0, \alpha)$. Тогда для любого $n \ge$

$\geq n_0$ решение $u_n(\cdot)$ на интервале $[0, t^*]$ имеет единственный импульс — в момент времени $s_n := \tau_n^1 + t^*$, величина которого равна $a_{m(n)}$, т. е. $\| u_n(s_n+0) - u_n(s_n) \| \leq a_{m(n)} \to 0$, $n \to \infty$. Пусть $f_n(t) \in F(u_n(t))$ для почти всех $t \in [0, t^*]$ — правая часть задачи (3), которая соответствует $u_n(\cdot)$ на $[0, s_n] \cup [s_n+0, t^*]$. Рассмотрим на $[s_n + 0, t^*]$ задачу (3) с правой частью f_n и начальной точкой $u_n(s_n)$. Пусть $\upsilon_n(\cdot)$ — решение этой задачи. Тогда в силу леммы 4 функция

$$w_n(t) = \begin{cases} u_n(t), & t \in [0, s_n]; \\ \upsilon_n(t), & t \in [s_n + 0, t^*], \end{cases}$$

— единственное решение задачи (3) на $[0, t^*]$ с правой частью f_n и начальной точкой $u_n(0)$ из $C([0, t^*]; X)$. Из оценки (8) для функции $w_n(\cdot)$ следует существование константы $R > 0$ такой, что $\varphi(w_n(t^*)) = \varphi(\upsilon_n(t^*)) \leq R$. Отсюда имеем предкомпактность $\{\upsilon_n(t^*)\}$. Далее сравним задачи (3) на $[s_n + 0, t^*]$ для функций $u_n(\cdot)$ и $\upsilon_n(\cdot)$. В силу монотонности субдифференциала имеем неравенство $\| u_n(t^*) - \upsilon_n(t^*) \| \leq \| u_n(s_n+0) - u_n(s_n) \|$, из которого и следует искомая предкомпактность $\{u_n(t^*)\}$.

Для завершения доказательства теоремы осталось проверить п. 3 леммы 3. Докажем более сильное утверждение: для любых $T \in (0, \alpha/2)$ и $\tau \in [0, T]$ отображение $\Sigma \times X \ni (\sigma, u) \mapsto U_\sigma(T, \tau, u)$ имеет замкнутый график. При этом используем следующую лемму.

Лемма 5 [3]. *Пусть* $u_n(\cdot)$ *— сильное решение задачи* (3) *на* $[0, T]$ *с правой частью* $f_n \in L_1(0, T; H)$ *и начальной точкой* u_n^0, *причем* $f_n(t) \in F(u_n(t))$ *для почти всех* $t \in [0, T]$, $\operatorname{esssup}_{t \in [0,T]} \|f_n(t)\| \leq C$, *где константа* $C > 0$ *не зависит от* n, *и* $u_n^0 \to u^0$. *Тогда существуют* $u(\cdot) \in C([0, T]; H)$ *и* $f \in L_1(0, T; H)$ *такие, что* $u_n(\cdot) \to u(\cdot)$ *в* $C([0, T]; H)$, $f_n \to f$ *слабо в* $L_1(0, T; H)$ *и* $u(\cdot)$ *— решение задачи* (3) *на* $[0, T]$ *с правой частью* f *и начальной точкой* u^0, *причем* $f(t) \in F(u(t))$ *для почти всех* $t \in [0, T]$.

Утверждение леммы не изменится, если в качестве начального момента времени взять $\tau < T$.

Пусть $\sigma_n \to \sigma$, $u_n^0 \to u^0$, $u_n(T) \in U_{\sigma_n}(T, \tau, u_n^0)$, $u_n(T) \to \xi$, где $u_n(\cdot)$ — решение (1) на $[\tau, T]$ с набором импульсов σ_n и начальной точкой u_n^0. Докажем, что существует $u(\cdot)$ — решение (1) с набором импульсов σ, причем $u(T) = \xi \in U_\sigma(T, \tau, u^0)$. Рассмотрим все возможные ситуации.

1. Пусть $\sigma_n \to \sigma_\infty$ и s_n — ближайший к T импульс, $s_n \in [\tau, T]$. Поскольку $T \in (0, \alpha/2)$, для каждого $n \geq 1$ возможен не более чем один импульс на $[\tau, T]$. Если таких s_n нет или конечное число, то начиная с некоторого n_0 $u_n(\cdot)$ не испытывают импульсных воздействий и искомое следует из [4].

Теперь пусть $s_n \to t_1 \leq T$, $s_n \in [\tau, t_1]$. Поскольку $\sigma_n \to \sigma_\infty$, то, как и в предыдущих рассуждениях, для любого $n \geq n_0$ существует $m(n)$ такое, что $\| u_n(s_n+0) - u_n(s_n) \| \leq a_{m(n)}$ и $m(n) \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть $f_n(t) \in F(u_n(t))$ для почти всех $t \in [\tau, T]$ — правая часть задачи (3), что соответствует $u_n(\cdot)$ на $[\tau, s_n] \cup [s_n + 0, T]$.

Рассмотрим на интервале $[\tau, s_n]$ для каждого $n > n_0$ задачу (3) с правой частью f_n и начальным данным u_n^0, единственным решением которой является данная функция $u_n(\cdot)$. Поскольку $u_n^0, u^0 \in B_N$ для некоторого $N \geq 1$, то $\| f_n(t) \| \leq D_1 + D_2(N + D) := L$. Пусть $\hat{f}_n$ — правая часть задачи (3), которая соответствует решению $u_n(\cdot)$ на $[s_n + 0, T]$. Тогда функция

$$g_n(t) = \begin{cases} f_n(t), & t \in [\tau, s_n]; \\ \hat{f}_n(t), & t \in (s_n, T], \end{cases} \tag{10}$$

удовлетворяет оценке $\| g_n \| \leq L$. Рассмотрим задачу (3) на $[\tau, T]$ с правой частью g_n, начальной точкой u_n^0 и без импульсов. Пусть $z_n(\cdot)$ — единственное решение этой задачи. Тогда в силу леммы 5 существуют $z(\cdot)$ и $f(\cdot)$ такие, что с точностью до подпоследовательности $z_n(\cdot) \to z(\cdot)$ в $C([\tau, T]; H)$ $g_n \to f$ слабо в $L_1(\tau, T; H)$ и $z(\cdot)$ является решением задачи (3) на $[\tau, T]$ с правой частью f и начальной точкой u^0. Поскольку для любого $t \in [\tau, s_n]$ $u_n(t) = z_n(t)$, то $\| u_n(t) - z \| \to 0$. Тогда в силу непрерывности $z(\cdot)$ на $[\tau, t_1]$ имеем

$$\| u_n(s_n + 0) - z(s_n + 0) \| = \| u_n(s_n + 0) - z(s_n) \| \leq \| u_n(s_n + 0) - u_n(s_n) \| +$$

$$+ \| u_n(s_n) - z(s_n) \| \leq a_{m(n)} + \| u_n(s_n) - z(s_n) \| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Поскольку $s_n \to t_1$ и на интервале $[s_n + 0, t_1]$ $u_n(\cdot)$ не имеет импульсов, повторяя предыдущие рассуждения, получаем $\| u_n(s_n + 0) - u_n(t_1) \| \to 0$. Отсюда следует $\| u_n(t_1) - z(t_1) \| \to 0$. Таким образом, $\max_{t \in [\tau, t_1]} \| u_n(t) - z(t) \| \to 0$, $g_n \to f$ слабо в $L_1(\tau, t_1; H)$, $g_n(t) \in F(u_n(t))$ для почти всех $t \in [\tau, t_1]$. Тогда в силу леммы 5 $f(t) \in F(z(t))$ для почти всех $t \in [\tau, t_1]$ и, следовательно, $z(t_1) \in U_{\sigma_\infty}(t_1, \tau, u^0)$. Отсюда, если $t_1 = T$, все доказано. Если же $t_1 < T$, то рассматривая те же функции $u_n(\cdot)$, $z(\cdot)$ на интервале $[t_1, T]$ и учитывая сходимость $u_n(t_1) \to z(t_1)$ в H и отсутствие импульсов, стандартно из [4] имеем $u_n(T) \to z(T)$ в H.

Пусть теперь $s_n \to t_1 \leq T$, $s_n \in [t_1, T]$. В обозначениях предыдущего пункта получаем $\| u_n(t) - z(t) \| \to 0$ $\forall\, t \in [\tau, s_n]$. В частности, $\| u_n(t_1) - z(t_1) \| \to 0$. Если $t_1 < T$, то на $[t_1, T]$ $u_n(\cdot)$ имеет импульс в момент времени s_n, величина которого равна $a_{m(n)}$. Поскольку $\| u_n(s_n) - z(s_n) \| \to 0$, $\| u_n(s_n + 0) - u_n(s_n) \| \to 0$, то $\| u_n(s_n + 0) - z(t_1) \| \to 0$. Рассмотрим задачу (3) на $[t_1, T]$ без импульсов с правой частью g_n и начальной точкой $z(t_1)$. Полученное решение обозначим $w_n(\cdot)$. Сравнивая задачи (3) для функций $w_n(\cdot)$ и $u_n(\cdot)$ на интервале $[s_n + 0, T]$, получаем $\| w_n(t) - u_n(t) \| \leq \| w_n(s_n) - u_n(s_n + 0) \|$ $\forall\, t \in [s_n + 0, T]$. Однако, сравнивая задачи (3) для $w_n(\cdot)$ и $u_n(\cdot)$ на $[t_1, s_n]$, имеем $\| w_n(s_n) - u_n(s_n) \| \leq \| z(t_1) - u_n(t_1) \| \to 0$. Следовательно, для любого $t \in [s_n + 0, T]$ $\| w_n(t) - u_n(t) \| \leq \| w_n(s_n) - u_n(s_n) \| + a_{m(n)} \to 0$. Поскольку $w_n(\cdot)$ и $z(\cdot)$ на $[t_1, T]$ не подвергаются импульсному воздействию, $w_n(t_1) = z(t_1)$ и $g_n \to f$ слабо в $L_1(\tau, T; H)$, в силу леммы 5 $\max_{t \in [t_1, T]} \| w_n(T) - z(T) \| \to 0$. Отсюда $\| u_n(T) - z(T) \| \leq \| u_n(T) - w_n(T) \| + \| w_n(T) - z(T) \| \to 0$. Осталось заметить, что $\| u_n(t) - z(t) \| \to 0$ $\forall\, t \in [\tau, s_n]$, $\| w_n(t) - u_n(t) \| \to 0$ $\forall\, t \in [s_n + 0, T]$, $\| w_n(t) - z(t) \| \to 0$ $\forall\, t \in [t_1, T]$. Тогда из неравенства $t_1 \leq s_n$ получаем искомое.

В случае $t_1 = \tau$ или совпадения s_n с точками τ или T, начиная с некоторого n_0, все предыдущие рассуждения верны, но значительно упрощаются.

2. Осталось рассмотреть случай, когда $\sigma_{h_n} \to \sigma_h$ (т. е. $h_n \to h$). Имеем $u_n(T) \in U_{\sigma_{h_n}}\left(T, \tau, u_n^0\right)$, $u_n^0 \to u^0$, $u_n(T) \to \xi$. Нужно доказать, что существует $u(\cdot)$ — решение (1) на $[\tau, T]$ с набором импульсов σ_h такое, что $u(\tau) = u^0$ и $u(T) = \xi \in U_{\sigma_h}\left(T, \tau, u^0\right)$.

Если, начиная с некоторого n_0, решения $u_n(\cdot)$ не испытывают импульсного воздействия на $[\tau, T]$, то требуемое следует из [4].

Сходимость $h_n \to h$ означает две возможные ситуации: либо h, $h_n \in \left(t_i^0, t_{i+1}^0\right]$ $\forall\, n \geq n_0$, либо $h_n \to t_i^0 = h$. Рассмотрим первую ситуацию. Тогда для $u_n(\cdot)$ моментом импульса на $[\tau, T]$ является $s_n := t_{i+1}^0 - h_n$, величина которого равна a_{i+1}, $s_n \to t_{i+1}^0 - h := s$. Пусть сначала $s_n < s$. Поскольку $u_n(\cdot)$ — решение задачи (3) на $[\tau, s_n] \cup [s_n + 0, T]$ с правой частью $f_n \in L_1(\tau, T; H)$ и начальной точкой $u_n^0 \to u^0$, аналогично предыдущим рассуждениям существуют $u(\cdot) \in C([\tau, T]; H)$, $f \in L_1(\tau, T; H)$ такие, что $u(\cdot)$ — решение (3) на $[\tau, T]$ без импульсов, с правой частью f, $u(\tau) = u^0$ и $\forall\, t \in [\tau, s_n]$ $\|u_n(t) - u(t)\| \to 0$, $\|u(s_n) - u(s)\| \to 0$. В силу оценки (9) с точностью до подпоследовательности $u_n(s_n + 0) \to \xi_1$ слабо в H. Поскольку $u_n(s_n + 0) - u_n(s_n) \in G_i(u_n(s_n))$, $u_n(s_n) \to u(s)$ в H, $G_i : H \to C_v(H)$, то $\xi_1 - u(s) \in G_i(u(s))$. Рассмотрим задачу (3) на $[s_n + 0, T]$ для функции $u_n(\cdot)$ с начальной точкой $u_n(s_n + 0)$. Домножим включение из (3) на произвольную функцию $g \in D(\partial\varphi)$. В силу условий теоремы и оценки (9) получим неравенство

$$\left|\left(\frac{du_n(t)}{dt}, g\right)\right| \leq K + \|g\|^2 + \sup_{v \in \partial\varphi(g)} \|v\|^2, \tag{11}$$

где константа $K \geq 0$ не зависит от n, t. Тогда $|(u_n(s) - u_n(s_n + 0), g)| \leq C(g)(s - s_n)$, где $C(g) := K + \|g\|^2 + \sup_{v \in \partial\varphi(g)} \|v\|^2$. Следовательно, $u_n(s) \to \xi_1$ слабо в H. Кроме того, для любых $t_1, t_2 \in [s, T]$ и $g \in H$ из (11) следует неравенство

$$|(u_n(t_1) - u_n(t_2), g)| \leq C(g)|t_1 - t_2|. \tag{12}$$

Из (12) и [6] следует существование функции $v(\cdot) \in C([s, T]; H)$ такой, что с точностью до подпоследовательности $u_n(t) \to v(t)$ слабо в H для любого $t \in [s, T]$. Возьмем произвольное $t_1 \in (s, T)$. В силу леммы 4 $u_n(t_1) \to v(t_1)$ в H и согласно лемме 5 существует подпоследовательность $\left\{u_{m^1(n)}(\cdot)\right\} \subset \{u_n(\cdot)\}$ такая, что $u_{m^1(n)}(t) \to v(t)$ в H для любого $t \in [t_1, T]$, $f(t) \in F(v(t))$ для почти всех $t \in [t_1, T]$. Взяв последовательность $t_1 > t_2 > \ldots > t_m > \ldots > s$, получим, что $f(t) \in F(v(t))$ для почти всех $t \in [s, T]$. Тогда функция

$$w(t) = \begin{cases} u(t), & t \in [\tau, s]; \\ v(t), & t \in [s + 0, T], \end{cases}$$

искомая, т. е. $w(T) = \xi \in U_{\sigma_h}\left(T, \tau, u^0\right)$.

Пусть $s_n > s$, $s_n \to s$. Тогда, в обозначениях предыдущего пункта, существуют $u(\cdot)$, $f(\cdot)$ такие, что $u(\cdot)$ — решение задачи (3) на $[\tau, T]$ без импульсов с правой частью f, начальной точкой u^0 и $\forall\, t \in [\tau, s]$ $\|u_n(t) - u(t)\| \to 0$, $\|u_n(s_n) - u(s_n)\| \to 0$, $u_n(s_n + 0) \to \xi_1$ слабо в H, $\xi_1 - u(s) \in G_i(u(s))$, $u_n(s) \to \xi_1$ слабо в H. Поскольку s_n — единственный импульс для $u_n(\cdot)$ на $[\tau, T]$, то $u_n(T) \in U_{\sigma_\infty}(T, \tau, u_n(s_n + 0)) = U_{\sigma_\infty}(T - s_n, 0, u_n(s_n + 0))$. Таким образом, $u_n(T) = v_n(T - s_n)$, $v_n(\cdot)$ — решение (3) на $[0, T]$ без импульсов с правой частью g_n и начальной точкой $u_n(s_n + 0)$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта для функций $v_n(\cdot)$, имеем, что с точностью до подпоследовательности $v_n(t) \to v(t)$ слабо в H для любого $t \in [0, T]$, $v(\cdot)$ — решение (3) на $[0, T]$ с правой частью g и начальной точкой ξ_1, причем $g(t) \in F(v(t))$ для почти всех $t \in [0, T]$. Поскольку $v_n(T - s_n) \to v(T - s) \in U_{\sigma_\infty}(T - s, 0, \xi_1)$, то $\xi = v(T - s) \in U_{\sigma_\infty}(T, s, \xi_1)$. Отсюда $\xi \in U_{\sigma_h}(T, \tau, u^0)$.

Теперь пусть $h_n \in \left[t_i^0, t_{i+1}^0\right)$, $h_n \to t_i^0 = h$. Тогда $s_n = t_{i+1}^0 - h_n$. Если $h_n \in \left[0, t_1^0\right)$, $h_n \to 0$, то импульсы в моменты времени t_i^0 и $t_i^0 - h_n$ характеризуются одинаковыми включениями (2) и требуемое следует из предыдущего пункта. Если же $h_n \geq t_1^0$, то рассмотрим следующие преобразования:

$$\xi_n \in U_{\sigma_{h_n}}\left(T, \tau, u^0\right) = U_{\sigma_{h_n - p + p}}\left(T, \tau, u^0\right) =$$

$$= U_{T(p)\sigma_{h_n - p}}\left(T, \tau, u^0\right) = U_{\sigma_{h_n - p}}\left(T + p, \tau + p, u^0\right),$$

где $p \in (0, \alpha/4)$ — произвольно. Тогда, начиная с некоторого номера n_0, $h_n - p \in \left(t_{i-1}^0, t_i^0\right]$, $h_n - p \to h - p \in \left(t_{i-1}^0, t_1^0\right]$ и приходим к предыдущей ситуации. Теорема доказана.

Следствие. *Если включение* (1) *имеет периодические решения, то траектории этих решений лежат в полученном аттракторе.*

Доказательство. Пусть $u(\cdot)$ — решение (1), причем $u(t + T) \equiv u(t)$ и $E = \bigcup_{t \in [0, T]} u(t)$ — траектория такого решения. Тогда для любых $v \in E$ и $t \geq 0$ $v \in \bigcup_{p \geq t} U_{\sigma_\infty}(p, 0, u(0)) \subset \bigcup_{\sigma \in \Sigma} \bigcup_{p \geq t} U_\sigma(p, 0, u(0)) \subset \Xi_\Sigma$.

Пример. Рассмотрим модель регионального экономического роста [7] с импульсным воздействием

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = \Delta y(x,t) + g\left(y(x,t)\right) + u(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times (0, +\infty),$$

$$y|_{\partial\Omega} = 0,$$

$$y(x, 0) = y_0(x), \tag{13}$$

$$0 \leq u(x,t) \leq \theta\left(y(x,t)\right),$$

$$|y(x, t_i + 0) - y(x, t_i)| \leq \frac{1}{i^2} \quad \text{для почти всех} \quad x \in \Omega,$$

где $\Omega \subset R^n$ — ограниченная область, $g : R \mapsto R$, $\theta : R \mapsto R_+$ — непрерывные функции, $\forall\, s \in R$ $|g(s)| + |\theta(s)| \leq D_1 + D_2 |s|$. Сведем задачу (13) к задаче (1), (2). Известно, что $-\Delta$ — субдифференциал собственной, выпуклой, полунепрерывной снизу функции $\varphi(u) = \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx / 2$, причем $D(\varphi) = H_0^1(\Omega)$, $X = H = L_2(\Omega)$. Следуя [4], рассмотрим отображения $F: H \mapsto P(H)$, $G_i: H \mapsto P(H)$, $i \geq 1$, определенные следующим образом: для любого $y(\cdot) \in H$

$$F(y(\cdot)) = \{g(y(\cdot)) + \xi(\cdot) \mid \xi(\cdot) \text{ — измеримо, } \xi(x) \in [0, \theta(y(x))] \text{ для почти всех } x \in \Omega\},$$

$$G_i(y(\cdot)) = \{\eta(\cdot) \mid \eta(\cdot) \text{ — измерима, } |\eta(x)| \leq 1/i^2 \text{ для почти всех } x \in \Omega\}.$$

Тогда выполнено условие 5 и согласно [4] F удовлетворяет условиям 1 – 3, G_i — условиям 6, 7. Пусть выполнено одно из условий

$$(g(s) + \theta(s))s \leq (\lambda_1 - \varepsilon)s^2 + M \quad \forall s \in R,$$

$$D_2 < \lambda_1,$$

где $\lambda_1 > 0$ — первое собственное число $-\Delta$ в $H_0^1(\Omega)$. Тогда будет выполнено условие 4. Следовательно, задача (13) удовлетворяет условиям теоремы о существовании аттрактора, причем последний будет ограниченным множеством в $H_0^1(\Omega)$.

1. *Samoilenko A. M., Perestyuk N. A.* Impulsive differential equations. – New York: World Sci., 1995. – 460 p.
2. *Barbu V.* Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces. – New York: Noordhoff Int., 1976. – 345 p.
3. *Толстоногов А. А., Уманский Я. И.* О решениях включений 2 // Сиб. мат. журн. – 1992. – **33**, № 4. – С. 163 – 173.
4. *Kapustyan A. V., Valero J.* Attractors of multivalued semiflows generated by differential inclusions and their approximations // Abstrs and Appl. Analysis. – 2000. – № 1. – P. 33 – 46.
5. *Melnik V. S., Valero J.* On global attractors of multivalued semiprocesses and nonautonomous evolution inclusions // Set-Valued Analysis. – 2000. – № 3. – P. 83 – 111.
6. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. – М.: Наука, 1967. – 730 с.
7. *Papageorgiou N. S.* Evolution inclusions involving a difference term of subdifferentials and applications // Indian J. Pure and Appl. Math. – 1997. – **28**, № 5. – P. 575 – 610.

Получено 20.11.2001