УДК 517.53/57

М. Т. Бродович (Нац. ун-т „Львів. політехніка")

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ ГОЛОМОРФНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ ПЛОСКОЙ ОБЛАСТИ В ПЛОСКОСТЬ

We prove the holomorphy of a function that, at every point, preserves either angles or dilatations with respect to some set.

Доводиться голоморфність функції, що зберігає в кожній точці або кути, або розтяги відносно деякої множини.

Пусть $f: D \to C$ — отображение комплексной плоскости C в комплексную плоскость C. В настоящей работе доказана следующая теорема.

Теорема. *Пусть взаимно однозначное отображение* $f: D \to C$ *удовлетворяет условиям:*

1) *для каждой точки* $z \in D$ *найдется измеримое множество* $E(z)$, *для которого выполняются условие*

$$\varliminf_{r \to 0} \frac{m(E(z) \cap C(z,r))}{\pi r^2} \geq b > \frac{1}{2},$$

где $C(z,r) = \{z' : |z'-z| < r\}$, *и неравенство*

$$\varlimsup_{\substack{z' \to z \\ z' \in E(z)}} \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| < \infty;$$

2) *для почти всех точек* z *области* D *найдется множество* $\xi(z)$, *для которого выполняются неравенство*

$$\varlimsup_{r \to 0} \frac{m^*(\xi(z) \cap C(z,r))}{\pi r^2} > 0$$

и одно из следующих условий:

а) *существует предел* $\lim\limits_{\substack{z' \to z \\ z' \in \xi(z)}} \operatorname{Arg} \dfrac{f(z') - f(z)}{z' - z}$ *и функция* f *непрерывна по множеству* $\xi(z)$ *в точке* z,

б) *существует предел* $\lim\limits_{\substack{z' \to z \\ z' \in \xi(z)}} \left| \dfrac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right|$ *и для произвольных последовательностей* $\{z_n'\}$, $\{z_n''\}$ *множества* $\xi(z)$, *сходящихся к точке* z, *для которых направления лучей* $\overrightarrow{zz_n'}$ *и* $\overrightarrow{zz_n''}$ *сходятся соответственно к направлениям лучей* t', t'', *а направления лучей* $\overrightarrow{f(z)f(z_n')}$ *и* $\overrightarrow{f(z)f(z_n'')}$ — *к направлениям лучей* T', T'', *из условия* $0 < \{t' \hat{} t''\} < \pi$ *следует* $0 < \{T' \hat{} T''\} < \pi$. *Через* $\{t' \hat{} t''\}$ *обозначен угол, который отсчитывается в положительном направлении от луча* t', *угол* $\{T' \hat{} T''\}$ *определен аналогично.*

Тогда функция $f: D \to C$ *голоморфна.*

Непрерывность отображения $f\colon D \to C$ в сформулированной теореме не предполагается.

Заметим, что, если функция f ограничена в области D, сформулированная теорема справедлива, если ослабить условие а), а именно, не требовать непрерывности функции f в точке z относительно множества $\xi(z)$.

Доказанная здесь теорема продолжает ряд теорем — критериев голоморфности отображения $f\colon D \to C$, начало которым положила теорема Д. Е. Меньшова об асимптотически (аппроксимативно) голоморфных функциях [1]. Д. Е. Меньшову принадлежат следующие определение и теорема.

Определение. *Асимптотической (аппроксимативной) производной функции $f\colon D \to C$ в точке $z \in D$ называется предел*

$$\lim_{\substack{z' \to z \\ z' \in E(z)}} \frac{f(z') - f(z)}{z' - z},$$

где $E(z)$ — измеримое множество в области D, для которого справедливо равенство

$$\lim_{r \to 0} \frac{m(E(z) \cap C(z, r))}{\pi r^2} = 1.$$

Теорема Меньшова. *Пусть $f\colon D \to C$ — непрерывная функция, имеющая в каждой точке области D, за исключением разве что счетного их множества, конечную асимптотическую производную. Тогда функция $f\colon D \to C$ голоморфна.*

На случай взаимно однозначных отображений, не предполагаемых непрерывными, теорема Меньшова распространена автором в работе [2], в последующем обобщении [3] теоремы работы [2] автор заменила условие существования конечной аппроксимативной производной более слабым — существованием конечной производной относительно некоторого множества. Сформулированная выше теорема является усилением теоремы работы [3]. Обобщению теоремы Меньшова посвящены работы [4, 5].

Доказанная здесь теорема вытекает из ряда лемм.

Лемма 1. *Пусть $f\colon D \to C$, β — совершенное множество в области D и для каждой точки $z \in \beta$ найдется измеримое множество $E(z)$, для которого выполняются условие*

$$\varliminf_{r \to 0} \frac{m(E(z) \cap C(z, r))}{\pi r^2} \ge b > \frac{1}{2}$$

и неравенство

$$\varlimsup_{\substack{z' \to z \\ z' \in E(z)}} \left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| < \infty.$$

Тогда на некоторой порции β_0 множества β функция f удовлетворяет условию Липшица.

Отметим, что приведенное ниже доказательство леммы 1 является более детальным доказательством аналогичной леммы из [3].

Доказательство. Пусть $\eta > 0$ такое, что $b - \eta > 1/2$. Для каждой точки $z \in \beta$ найдется натуральное число k такое, что

$$m(E(z) \cap C(z, r)) > (b - \eta)\pi r^2, \quad \text{если} \quad r < \frac{1}{k}, \tag{1}$$

и

$$\left| \frac{f(z') - f(z)}{z' - z} \right| < k, \quad \text{если} \quad z' \in E(z), \quad |z' - z| < \frac{1}{k}. \tag{2}$$

Пусть β_k, $k \in \{1, 2, \ldots\}$, — множество тех точек множества β, для которых выполняются условия (1), (2). Поскольку $\beta = \bigcup_{k=1}^{\infty} \beta_k$, найдется такое число k_0, что множество β_{k_0} всюду плотно на некоторой части β_0 множества β, $\beta_0 = \beta \cap \delta$, где δ — открытый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат.

Пусть $\{z_1, z_2\} \subset \delta$ и окружности радиуса r с центрами в точках z_1, z_2 пересекаются в точках A и B. Величину равных углов $\angle Az_1B$, $\angle Az_2B$ обозначим через φ, $0 < \varphi < \pi$, пересечение $C(z_1, r) \cap C(z_2, r) = K(z_1, z_2)$. Из простых геометрических соображений видно, что величина $\alpha = \dfrac{m\,(C(z_i, r) - K(z_1, z_2))}{\pi r^2}$, $i = 1, 2$, зависит только от φ, и можно выбрать φ так, чтобы $\alpha < b - \eta - 1/2$. Из определения ромба z_1Az_2B следует $r = \dfrac{|z_1 - z_2|}{2\cos\varphi/2} < \dfrac{\operatorname{diam}\delta}{2\cos\varphi/2}$. Пусть $\dfrac{\operatorname{diam}\delta}{2\cos\varphi/2} < 1/k_0$, в противном случае в качестве прямоугольника δ примем меньший прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат, имеющий непустое пересечение с множеством β_0. Предположим, что $\{z_1, z_2\} \subset \subset \beta_{k_0} \cap \delta$. Перепишем неравенство (1) в виде

$$m\,(E(z_i) \cap K(z_1, z_2)) + m\,(E(z_i) \cap (C(z_i, r) - K(z_1, z_2))) > (b - \eta)\pi r^2, \quad i = 1, 2.$$

В силу выбора угла φ получаем

$$m\,(E(z_i) \cap K(z_1, z_2)) > \frac{1}{2}\pi r^2, \quad i = 1, 2.$$

Поскольку $m\,K(z_1, z_2) < \pi r^2$, то $E(z_1) \cap E(z_2) \cap K(z_1, z_2) \neq \varnothing$ и найдется точка $\bar{z} \in E(z_1) \cap E(z_2) \cap K(z_1, z_2)$. Для точки $\bar{z}$ согласно неравенству (2) выполняются условия $|f(\bar{z}) - f(z_1)| < k_0|\bar{z} - z_1|$, $|f(\bar{z}) - f(z_2)| < k_0|\bar{z} - z_2|$. Следовательно,

$$|f(z_1) - f(z_2)| < k_0(|\bar{z} - z_1| + |\bar{z} - z_2|) \leq k_0 \cdot 2r = \frac{k_0}{\cos\varphi/2}|z_1 - z_2|.$$

Условие Липшица для функции f на множестве $\beta_{k_0} \cap \delta$ доказано: для $\{z_1, z_2\} \subset \beta_{k_0} \cap \delta$ выполняется неравенство

$$|f(z_1) - f(z_2)| < L|z_1 - z_2|, \tag{3}$$

где $L = \dfrac{k_0}{\cos\varphi/2}$.

Пусть z_0 — произвольная точка множества β_0, $\{z_n\}$ — последовательность точек множества $\beta_{k_0} \cap \delta$, сходящаяся к точке z_0. Убедимся, что найдется подпоследовательность $\{z_{n_i}\}$ последовательности $\{z_n\}$, для которой справедливо

$$\lim_{i \to \infty} f(z_{n_i}) = f(z_0). \tag{4}$$

В каждой достаточно малой окрестности точки z_0 найдутся точка z_{n_i} последовательности $\{z_n\}$ и точка z_i', для которых согласно формулировке леммы 1 и условию $\{z_{n_i}\} \subset \beta_{k_0} \cap \delta$ выполняются требования: $z_i' \in E(z_0) \cap E(z_{n_i})$, $|f(z_i') - f(z_0)| < p|z_i' - z_0|$, где p — некоторое число, и $|f(z_i') - f(z_{n_i})| <$

$< k_0|z_i' - z_{n_i}|$. Поэтому $|f(z_{n_i}) - f(z_0)| < p|z_i' - z_0| + k_0|z_i' - z_{n_i}|$. Из условий $|z_i' - z_0| \to 0$, $|z_i' - z_{n_i}| \to 0$ при $i \to \infty$ вытекает (4).

Пусть z_1, z_2 — произвольные точки множества β_0, $\{z_n^1\}$, $\{z_n^2\}$ — последовательности точек множества $\beta_{k_0} \cap \delta$, сходящиеся соответственно к точкам z_1, z_2. Поскольку для $n = 1, 2, \ldots$ выполняются неравенства $|f(z_n^1) - f(z_n^2)| \le \le L|z_n^1 - z_n^2|$ и справедливо (4), то имеет место неравенство $|f(z_1) - f(z_2)| \le \le L|z_1 - z_2|$. Лемма 1 доказана.

В случае, когда выполняется условие теоремы, в силу леммы 1 найдется открытый прямоугольник δ со сторонами, параллельными осям координат, в котором функция f удовлетворяет условию Липшица. Согласно теореме Степанова в прямоугольнике δ функция f почти всюду дифференцируема. В точках дифференцируемости функция f может сохранять углы или растяжения лишь на двух прямых. Поэтому согласно определению множества $\xi(z)$, условиям 2, а) и 2, б) теоремы функция f моногенна в точках дифференцируемости.

Пусть C — прямоугольный контур со сторонами, параллельными осям координат, R — его внутренность, $\overline{R} \subset \delta$, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$. Справедливо равенство

$$-\iint\limits_R \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy + i \iint\limits_R \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= \int\limits_C u\,dx - v\,dy + i \int\limits_C v\,dx + u\,dy = \int\limits_C f(z)\,dz. \tag{5}$$

Действительно, равенство (5) легко получить, если в каждом двойном интеграле от частной производной перейти к повторному интегралу.

Поскольку почти всюду в прямоугольнике R функция f удовлетворяет условиям Коши – Римана, из (5) вытекает $\int_C f(z)\,dz = 0$ и, следовательно, функция f голоморфна в прямоугольнике δ.

Обозначим через H открытое, всюду плотное в области D множество точек голоморфности функции $f\colon D \to C$. Можем предполагать, что функция $f\colon D \to C$ ограничена, ибо в противном случае мы рассматривали бы функцию $\zeta = = \varphi(z) = \dfrac{1}{f(z) - f(\bar{z})}$, заданную в области $D - \overline{C(\bar{z}, r)}$, где $r > 0$ и $\overline{C(\bar{z}, r)} \subset H$. Поскольку функция f взаимно однозначна в области D и голоморфна в круге $\overline{C(\bar{z}, r)}$, функция $\varphi(z)$ ограничена в области $D - \overline{C(\bar{z}, r)}$. Легко видеть, что для функции $\varphi(z)$ выполняются условия 1, 2 теоремы. Согласно условию 1 теоремы множество $\beta = D - H$ совершенно в области D.

Пусть β_0 — множество, определенное в лемме 1, на котором функция f удовлетворяет условию Липшица.

Лемма 2. *На почти всех параллельных осям координат сечениях открытого прямоугольника δ функция f абсолютно непрерывна.*

Доказательство. Для определенности рассмотрим сечения, параллельные оси Ox. Поскольку отображение f взаимно однозначно и ограничено в области D, а также голоморфно на множестве H, мера множества $f(H \cap \delta)$ конечна и справедливо равенство

$$mf(H \cap \delta) = \iint\limits_{H \cap \delta} |f'(z)|^2\,dx\,dy < \infty. \tag{6}$$

Пусть δ_y — сечение открытого прямоугольника δ прямой, параллельной оси Ox, проходящей через точку $0+iy$; $l_{ky}=(a_{ky},b_{ky})$, $k=1,2,\ldots,$ — смежные интервалы множества $\delta_y-\beta_0$. Согласно теореме Фубини для почти всех сечений δ_y выполняется условие

$$\sum_k \text{дл.} f(l_{ky}) = \int\limits_{\delta_y\cap H} |f'(z)||dz| < \infty, \tag{7}$$

где дл. — длина. Из условия $\sum_k \text{дл.} f(l_{ky})<\infty$ вытекает, что для почти всех сечений δ_y, для всех интервалов (a_{ky},b_{ky}) существуют конечные пределы

$$\lim_{\substack{z\to a_{ky}+iy\\ z\in l_{ky}}} f(z) = f(a_{ky}+iy+0), \qquad \lim_{\substack{z\to b_{ky}+iy\\ z\in l_{ky}}} f(z) = f(b_{ky}+iy-0).$$

Основную часть доказательства леммы 2 составляет следующее утверждение.

Предложение 1. *Для почти всех сечений δ_y, для всех интервалов l_{ky} функция f непрерывна в каждой точке $a_{ky}+iy\,(b_{ky}+iy)$ относительно интервала l_{ky}.*

Доказательство. Предположим противное: существует множество e точек y проекции прямоугольника δ на ось Oy положительной внешней меры, для которых на сечении δ_y найдется интервал, например $l^0_{ky}=(a^0_{ky},b^0_{ky})$, такой, что в одном из его концов, допустим a^0_{ky}, функция f разрывна справа, т. е. $\left|f(a^0_{ky}+iy+0)-f(a^0_{ky}+iy)\right|>0$. Пусть для натурального числа n множество e_n состоит из тех точек множества e, для которых $\left|f(a^0_{ky}+iy+0)-\right.$ $\left.-f(a^0_{ky}+iy)\right|>1/n$, и найдется такой интервал (a^0_{ky},c^0_{ky}) длины больше, чем $1/n$, содержащийся в интервале (a^0_{ky},b^0_{ky}), для точек z которого выполняется неравенство $\left|f(z)-f(a^0_{ky}+iy)\right|>1/n$. Поскольку $e=\bigcup_{n=1}^{\infty}e_n$, для некоторого натурального числа n_0 внешняя мера множества e_{n_0} положительна. Обозначим множество e_{n_0} через e_0, $e_0\subset e$. Для $y\in e_0$ и точек z из интервала (a^0_{ky},c^0_{ky}) выполняется неравенство

$$\left|f(z)-f(a^0_{ky}+iy)\right| > \frac{1}{n_0}. \tag{8}$$

Разобьем прямоугольник δ прямыми, параллельными осям координат, на равные прямоугольники $\{\delta_i\}$ следующим образом:

1. Для произвольных точек $\{z_1,z_2\}\subset\beta_0$ таких, что $\rho(z_1,z_2)<\operatorname{diam}\delta_i$, выполняется условие

$$|f(z_1)-f(z_2)| < \frac{1}{100n_0}. \tag{9}$$

2. Существует прямоугольник δ_i (замыкание его обозначим через δ_0) такой, что внешняя мера проекции на ось Oy множества точек $a^0_{ky}+iy$, $y\in e_0$, содержащихся в прямоугольнике δ_0, положительна. Сохраним для проекции обозначение e_0, $m^*e_0>0$.

3. Для прямоугольника δ_0 найдется во множестве $\{\delta_i\}$ прямоугольник, например δ_1, соприкасающийся с прямоугольником δ_0 по вертикальной стороне, лежащей справа от прямоугольника δ_0.

4. $\operatorname{diam}(\delta_0 \cup \delta_1) < 1/n_0$.

Предварительно выберем достаточно малое число $\varepsilon > 0$. Для этого определим числа a и γ. Пусть $\eta > 0$ такое, что $b - \eta > 1/2$. Согласно условию 1 формулировки теоремы для точки $z_0 \in D$ найдется радиус r_{z_0} такой, что для $r < r_{z_0}$ выполняется неравенство $\frac{1}{\pi r^2} m(E(z_0) \cap C(z_0, r)) \geq b - \eta$. Из этого неравенства вытекает условие

$$\frac{m(E(z_0) \cap \tilde{C}(z_0, r))}{\pi r^2} \geq a, \tag{10}$$

где $a = b - \eta - 1/2$, $r < r_{z_0}$, $\tilde{C}(z_0, r)$ — любой полукруг круга $C(z_0, r)$. Действительно, $m(E(z_0) \cap C(z_0, r)) \geq a\pi r^2 + \pi r^2/2$. Поскольку для любого полукруга $\tilde{C}(z_0, r)$ выполняется неравенство $m(E(z_0) \cap \tilde{C}(z_0, r)) \leq \pi r^2/2$, получаем (10). Пусть окружность, ограничивающая некоторый круг $C(z_1, \bar{r})$, проходит через центр круга $C(z_0, r)$, $\bar{r} > r$. Обозначим $K(z_0, r, \bar{r}) = C(z_0, r) \cap \cap C(z_1, \bar{r})$. Касательная к кругу $C(z_1, \bar{r})$ в точке z_0 делит круг $C(z_0, r)$ на два полукруга. Пусть $\tilde{C}(z_0, r)$ — тот из них, который содержит множество $K(z_0, r, \bar{r})$. Пусть радиусы r и $\bar{r}$ таковы, что отношение $r/\bar{r}$ настолько мало, что множество $K(z_0, r, \bar{r})$ составляет значительную часть полукруга $\tilde{C}(z_0, r)$ и $m(\tilde{C}(z_0, r) - K(z_0, r, \bar{r})) < a\pi r^2/2$. Выбранное отношение $r/\bar{r}$ обозначим через γ. Поэтому

$$a\pi r^2 \leq m(E(z_0) \cap \tilde{C}(z_0, r)) = m(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0)) +$$
$$+ m((\tilde{C}(z_0, r) - K(z_0, r, \bar{r})) \cap E(z_0)) < m(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0)) + a\pi r^2/2$$

и, следовательно, $m(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0)) > a\pi r^2/2$. Используя последнее неравенство, получаем

$$\frac{m(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0))}{\pi \bar{r}^2} = \frac{m(K(z_0, r, \bar{r}) \cap E(z_0))}{\pi r^2} \frac{\pi r^2}{\pi \bar{r}^2} > \frac{a}{2}\left(\frac{r}{\bar{r}}\right)^2 = \frac{a}{2}\gamma^2. \tag{11}$$

Выберем положительное число ε так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varepsilon < \min\left\{\frac{a}{40}\pi\gamma^2, \frac{1}{2}\right\}. \tag{12}$$

Проекцию прямоугольника δ_0 на ось Oy обозначим через $[c, d]$, $e_0 \subset [c, d]$. Поскольку для почти всех точек y_0 множества e_0 справедливо равенство

$$\lim_{r \to 0} \frac{m^*(e_0 \cap [y_0 - r, y_0 + r])}{2r} = 1,$$

где $[y_0 - r, y_0 + r] \subset [c, d]$, m^* — внешняя линейная мера, для каждой такой точки y_0 найдется натуральное число k такое, что при $r < 1/k$ выполняется неравенство

$$\frac{m^*(e_0 \cap [y_0 - r, y_0 + r])}{2r} \geq 1 - \varepsilon. \tag{13}$$

Пусть e_0^k — множество тех точек множества e_0, для которых неравенство (13) выполняется при $r < 1/k$; $\overline{e_0^k}$ — замыкание множества e_0^k. Нетрудно видеть, что для точек множества $\overline{e_0^k}$ неравенство (13) также справедливо при $r < 1/k$. Очевидно,

$$e_0 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \overline{e_0^k} = \left\{ \bigcup_{k=k_0}^{\infty} \left(\overline{e_0^{k+1}} - \overline{e_0^k} \right) \right\} \cup \overline{e_0^{k_0}} \subset [c, d]$$

и

$$\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \left(\overline{e_0^{k+1}} - \overline{e_0^k} \right) \supset e_0 - \overline{e_0^{k_0}}.$$

При достаточно большом k_0 мера множества $\bigcup_{k=k_0}^{\infty} \left(\overline{e_0^{k+1}} - \overline{e_0^k} \right)$ сколь угодно мала, поэтому для достаточно большого k_0 выполняется неравенство $\sum_{k=k_0}^{\infty} m \left(\overline{e_0^{k+1}} - \overline{e_0^k} \right) < \frac{\varepsilon}{2} m^* e_0$, следовательно, $m^* \left(e_0 - \overline{e_0^{k_0}} \right) < \frac{\varepsilon}{2} m^* e_0$.

Для удобства обозначим множество $\overline{e_0^{k_0}}$ через e_1, $1/k_0$ через r_0. Поэтому последнее неравенство примет вид

$$m^* (e_0 - e_1) < \frac{\varepsilon}{2} m^* e_0, \tag{14}$$

и для точек $y_0 \in e_1$ неравенство (13) выполняется при $r < r_0$.

Каждой точке y множества $e_0 \cap e_1$ соответствует точка $a_{ky}^0 + iy$. Обозначим через E_1 замыкание совокупности точек $\{a_{ky}^0 + iy\}$, где $y \in e_0 \cap e_1$. Проекция множества E_1 на ось Oy совпадает с множеством e_1.

Пусть $\eta > 0$ выбрано выше, $b - \eta > 1/2$. Согласно условию 1 формулировки теоремы для каждой точки z_0 найдется число r_{z_0} такое, что

$$\begin{gathered} \left| f(z') - f(z_0) \right| \leq \frac{1}{100 n_0} \quad \text{для} \quad z' \in E(z_0) \cap C(z_0, r), \\ \frac{m\,(E(z_0) \cap C(z_0, r))}{\pi r^2} \geq b - \eta, \quad r < r_{z_0}. \end{gathered} \tag{15}$$

Обозначим через E_2 множество тех точек z_0 множества E_1, для которых неравенства (15) выполняются для $r < r_1$, где r_1 — некоторое достаточно малое число, $r_1 < \frac{1}{4} \operatorname{diam} \delta_0$. Пусть $\bar{z}$ — предельная точка множества E_2; очевидно, $\bar{z} \in E_1$, $\bar{z} \in \beta_0$. Согласно условию (9) неравенство $\left| f(z') - f(\bar{z}) \right| > > \frac{1}{100 n_0}$ может выполняться лишь в случае $z' \in H \cap C(\bar{z}, r)$, $r < r_1$. Поэтому найдется множество $E'(\bar{z})$ такое, что для точки $\bar{z}$ и точек z' множества $E'(\bar{z}) \cap C(\bar{z}, r)$ выполняются неравенства (15), если в них вместо множества $E(z_0)$ положить множество $E'(\bar{z})$. Действительно, в качестве множества $E'(\bar{z})$ примем множество всех точек z' круга $C(\bar{z}, r_1)$, для которых выполняется неравенство $\left| f(z') - f(\bar{z}) \right| \leq \frac{1}{100 n_0}$. Справедливо включение $CE'(\bar{z}) \cap \cap C(\bar{z}, r_1) \subset H$; очевидно, множество $CE'(\bar{z})$ — открытое. Предположим, что для множества $E'(\bar{z})$ не выполняется второе из неравенств (15). Тогда для некоторого числа r, $r < r_1$, имеет место неравенство

$$m\,(CE'(\bar{z}) \cap C(\bar{z}, r)) > \pi r^2 - (b - \eta) \pi r^2$$

и для некоторого замкнутого множества g, $g \subset CE'(\bar{z}) \cap C(\bar{z}, r)$, также выполняется неравенство $mg > \pi r^2 - (b-\eta)\pi r^2$. Пусть $\{z_n\}$ — последовательность точек множества E_2, $z_n \to \bar{z}$ $(\{z_n\} \subset E_2 \subset \beta_0)$, для которых $m(g \cap C(z_n, r)) > \pi r^2 - (b-\eta)\pi r^2$. Поскольку для точек z_n выполняется второе из неравенств (15), найдется последовательность $\{z_n'\}$, $\{z_n'\} \subset g \cap E(z_n) \cap C(z_n, r)$, сходящаяся к некоторой точке $\tilde{z}$, $\tilde{z} \in g$. Для последовательностей $\{z_n\}$, $\{z_n'\}$ справедливы условия

$$\left|f(z_n') - f(z_n)\right| \le \frac{1}{100 n_0}, \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = f(\bar{z}), \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n') = f(\tilde{z}),$$

поэтому получаем неравенство $\left|f(\tilde{z}) - f(\bar{z})\right| \le \dfrac{1}{100 n_0}$. Поскольку $\tilde{z} \,\overline{\in}\, E'(\bar{z})$, получено противоречие. Следовательно, множество $E'(\bar{z})$ — требуемое.

Доказано, что на множестве $\overline{E}_2$ неравенства (15) выполняются в случае $z \in E_2$ для множеств $E(z)$, в случае $z \in \overline{E}_2 - E_2$ для множеств $E'(z)$. В дальнейшем для точек $z \in \overline{E}_2 - E_2$ вместо множества $E(z)$ используем множество $E'(z)$. Сохраним для множества $\overline{E}_2$ обозначение E_2; $E_2 \subset E_1$.

Пусть число r_1 настолько мало, что для множества e_2 — проекции множества E_2 на ось Oy — выполняется неравенство

$$m(e_1 - e_2) < \frac{\varepsilon}{2} m^* e_0. \tag{16}$$

Обозначим через $\tilde{e}$ объединение множеств $e_0 - e_1$, $e_1 - e_2$. Очевидно, $\bar{e}_0 \supset e_2 \cup \tilde{e}$. Из условий (14), (16) получаем неравенство

$$m^* \tilde{e} < \varepsilon m^* e_0. \tag{17}$$

Выберем два радиуса r и r', для которых $r < r_0$ и $r < \dfrac{1}{4}\operatorname{diam}\delta_0$, $r' < r_1$ и выполняется условие

$$\frac{r'}{r} = \gamma. \tag{18}$$

Для каждого числа $y_0 \in e_2$ вдоль прямой $y = y_0$ перемещаем замкнутый круг $\overline{C(x+iy_0, r)}$ из прямоугольника δ_1 в направлении прямоугольника δ_0 до касания с множеством E_2. Каждый круг $\overline{C(x+iy_0, r)}$ проектируется на ось Oy в отрезок $[y_0 - r, y_0 + r]$. Совокупность таких отрезков при $y_0 \in e_2$ покрывает множество e_2. Выделим следующим образом конечное число отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, $y_k \in e_2$, $k = 1, 2, \ldots$, покрывающих множество e_2: за центр первого отрезка $[y_1 - r, y_1 + r]$ примем число $\min\limits_{y\in e_2} y$; для каждого $k > 1$ центр y_k подобран так, чтобы пересечение $[y_k - r, y_k + r] \cap [y_{k-1} - r, y_{k-1} + r]$ было минимальным. Выбранной последовательности отрезков $[y_k - r, y_k + r]$ соответствует последовательность кругов $\overline{C(x_k + iy_k, r)}$, касающихся множества E_2. Для всех точек y из множества $e_0 - \tilde{e} = e_2 \cap e_0$ точки $a_{ky}^0 + iy$ лежат левее множества $\bigcup_k C(x_k + iy_k, r)$ и в силу свойства 4 прямоугольников $\{\delta_i\}$ и выбора радиуса r отрезки $[a_{ky}^0, c_{ky}^0]$ пересекают множество $\bigcup_k C(x_k + iy_k, r)$. Разобьем выбранную систему отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, $k = 1, 2, \ldots$, на две системы непересекающихся отрезков: систему отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, где k — четное число, и систему отрезков $[y_k - r, y_k + r]$, где k — нечетное число.

Одна из этих систем покрывает, допустим, часть e_2' множества e_2, вторая — часть e_2'' множества e_2. Множества e_2', e_2'' замкнутые. Поскольку $e_0 \subset e_2 \cup \tilde{e}$, то $m^* e_0 \le m^*(e_2 \cup \tilde{e}) \le m e_2' + m e_2'' + m^* \tilde{e}$ и в силу условия (17) выполняется неравенство $(1-\varepsilon) m^* e_0 < m e_2' + m e_2''$. А так как согласно (12) $\varepsilon < 1/2$, получаем $\frac{1}{2} m^* e_0 < m e_2' + m e_2''$. Пусть e_2' — та часть множества e_2, для которой выполняется неравенство

$$m e_2' > \frac{1}{4} m^* e_0, \tag{19}$$

и заново перенумерованная система непересекающихся отрезков $[y_k - r, y_k + r]$ — та из двух определенных выше систем отрезков, которая покрывает множество e_2'. Убедимся, что среди отрезков $[y_k - r, y_k + r]$ найдется отрезок $[y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]$, для которого выполняется неравенство

$$m^*\left(\tilde{e} \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right) < 4\varepsilon m\left(e_2 \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right). \tag{20}$$

Действительно, предположим противное: для каждого k выполняется неравенство

$$m^*(\tilde{e} \cap [y_k - r, y_k + r]) \ge 4\varepsilon m(e_2 \cap [y_k - r, y_k + r])$$

и, следовательно, неравенство

$$m^* \bigcup_k (\tilde{e} \cap [y_k - r, y_k + r]) \ge 4\varepsilon m \bigcup_k (e_2 \cap [y_k - r, y_k + r]) = 4\varepsilon m e_2'.$$

Поэтому, учитывая (19), получаем неравенство $m^* \tilde{e} > \varepsilon m^* e_0$, противоречащее (17).

Преобразуем неравенство (20) таким образом:

$$m^*\left(\tilde{e} \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right) < 4\varepsilon m\left([y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right) = 8\varepsilon r. \tag{21}$$

Пусть $z_0 = x_0 + i y_0$ — точка касания круга $C(x_{k_0} + i y_{k_0}, r)$ с множеством E_2. Рассмотрим круг $C(z_0, r')$. Радиусы r', r выбраны выше, и их отношение удовлетворяет равенству (18). Для множества $K(z_0, r', r) = C(x_{k_0} + i y_{k_0}, r) \cap C(z_0, r')$ выполняется неравенство (11), т. е. $m(K(z_0, r', r) \cap E(z_0)) > \frac{a}{2} \gamma^2 \pi r^2$. Из последнего неравенства вытекает, что найдется такое замкнутое множество $P(z_0, r', r)$, содержащееся в $K(z_0, r', r) \cap E(z_0)$, что имеет место неравенство

$$m P(z_0, r', r) > \frac{a}{2} \gamma^2 \pi r^2. \tag{22}$$

Проекцию множества $P(z_0, r', r)$ на ось Oy обозначим через $\hat{e}$. Множество $\hat{e}$ замкнутое. На каждом сечении множества $K(z_0, r', r) \cap E(z_0)$ прямой $y = y'$, $y' \in \hat{e}$, очевидно, найдется точка z', для которой выполняется первое из неравенств (15).

Поскольку справедливо равенство

$$e_0 \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r] = ((e_0 \cap e_2) \cup (e_0 \cap \tilde{e})) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r],$$

согласно (13) и (21) получаем неравенство

$$(1-\varepsilon) 2r \le m^*\left(e_0 \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right) \le m^*\left((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right) +$$

$$+ m^*\left(\tilde{e} \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right) < m^*\left((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\right) + 8\varepsilon r.$$

Последнее неравенство перепишем в виде

$$m^*\Big((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\Big) > 2r - 10\varepsilon r. \tag{23}$$

Напомним, что на прямых $y = y'$, $y' \in (e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]$, левее круга $C(x_{k_0} + iy_{k_0}, r)$ найдется точка $a^0_{ky'} + iy' \in \beta_0$. Для всех точек z каждого сечения круга $C(x_{k_0} + iy_{k_0}, r)$ такой прямой $y = y'$ выполняется неравенство (8), и поскольку для точек $a^0_{ky'} + iy'$, z_0 справедливо условие (9), получаем неравенство

$$|f(z) - f(z_0)| > \frac{99}{100 n_0}. \tag{24}$$

Множества $\hat{e}$ и $(e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]$ не имеют общих точек, следовательно, выполняется условие

$$m^*\Big((e_0 \cap e_2) \cap [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\Big) + m_* \hat{e} \le 2r.$$

Поскольку имеет место неравенство (23), получаем

$$m_* \hat{e} = m\hat{e} < 10\varepsilon r. \tag{25}$$

Согласно (22), (25) выполняются неравенства

$$\frac{a}{2}\gamma^2 \pi r^2 < mP(z_0, r', r) \le m\Big(\hat{e} \times [y_{k_0} - r, y_{k_0} + r]\Big) < 10\,\varepsilon r \cdot 2r = 20\varepsilon r^2.$$

Следовательно, $\varepsilon > \dfrac{a}{40}\pi\gamma^2$. Последнее неравенство противоречит выбору ε. Предложение 1 доказано.

Завершим доказательство леммы 2. Из непрерывности функции f на множестве β_0, предложения 1 и условия (7) вытекает непрерывность функции f на почти всех сечениях δ_y. А так как непрерывная на сечении δ_y функция f имеет конечную производную на множестве $\delta_y - \beta_0 = \delta_y \cap H$, удовлетворяет условию (7) и условию Липшица на множестве β_0, она абсолютно непрерывна на интервале δ_y (см., например, [6, с. 206], теорема V). Лемма 2 доказана.

Лемма 3. *Почти всюду в прямоугольнике* δ *для частных производных* $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$ *выполняются условия Коши – Римана.*

Доказательство. Поскольку функция f голоморфна на множестве H и удовлетворяет условию Липшица на множестве β_0, функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ измеримы в прямоугольнике δ. Нетрудно убедиться в том, что в прямоугольнике δ измеримы также функции $\underline{\lim}_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$, $\overline{\lim}_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. Поэтому множество

$$\left\{(x, y) : \left(\overline{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{\Delta u}{\Delta x} - \underline{\lim_{\Delta x \to 0}} \frac{\Delta u}{\Delta x}\right) > 0\right\}$$

измеримо и в силу леммы 2 имеет меру нуль. Следовательно, конечная частная производная $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ существует почти всюду в прямоугольнике δ. Аналогичное утверждение справедливо относительно производных $\dfrac{\partial u}{\partial y}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}$, $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

Достаточно доказать, что условия Коши – Римана имеют место почти всюду на множестве β_0, если мера множества β_0 положительна.

Предположим, что $m\beta_0 > 0$. Поскольку почти все точки множества β_0 — точки плотности и функция f на множестве β_0 удовлетворяет условию Липшица, почти во всех точках множества β_0 существуют дифференциалы функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ относительно множества β_0 и они совпадают с аппроксимативными дифференциалами функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ в этих точках.

Пусть $z = x + iy$ — точка плотности множества β_0, в которой функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ дифференцируемы относительно множества β_0, $z + \Delta z \in \beta_0$, $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Для некоторых действительных чисел A, B, C, D справедливо равенство

$$\Delta f = (A+iC)\Delta x + (B+iD)\Delta y + o\left(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\right). \tag{26}$$

Почти во всех точках множества β_0 (см. [7, с. 434], теорема (12.2)) числа A, B, C, D совпадают с аппроксимативными частными производными $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{ap}$, $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{ap}$, $\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{ap}$, $\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_{ap}$. А так как функция f в прямоугольнике δ почти всюду имеет частные производные, то числа A, B, C, D почти всюду на множестве β_0 совпадают с обыкновенными частными производными. Полагаем, что в точке $z = x + iy$ частные производные существуют. Преобразуем равенство (26):

$$\Delta f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right)\frac{\Delta z + \Delta\bar z}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right)\frac{\Delta z - \Delta\bar z}{2i} + o(|\Delta z|),$$

$$\Delta f = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Delta z + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)\right]\Delta\bar z + o(|\Delta z|), \tag{27}$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = f_z + f_{\bar z}e^{-2i\alpha} + \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z},$$

где через f_z, $f_{\bar z}$ обозначены коэффициенты при Δz, $\Delta\bar z$ соответственно, $\alpha = \arg\Delta z$.

Совокупность всех производных чисел M_z (множество моногенности) функции f в точке z для $z + \Delta z \in \beta_0$ согласно равенству (27) составляет окружность

$$M_z = \left\{\zeta : \zeta = f_z + f_{\bar z}e^{-2i\alpha},\ \alpha \in [0; 2\pi]\right\}. \tag{28}$$

Пусть в точке z выполняется условие 2, а) формулировки теоремы, тогда для точек $z + \Delta z \in \beta_0 \cap \xi(z)$ аргументы производных чисел функции f в точке z одинаковы. Поэтому согласно определению множества $\xi(z)$ равенство (28) возможно лишь при $f_{\bar z} = 0$, т. е. в точке z выполняются условия Коши – Римана. Пусть в точке z выполняется условие 2, б) формулировки теоремы, тогда для точек $z + \Delta z \in \beta_0 \cap \xi(z)$ модули производных чисел функции f в точке z одинаковы. Поэтому согласно определению множества $\xi(z)$ равенство (28) возможно либо при $f_{\bar z} = 0$, либо при $f_z = 0$. Если $f_z = 0$, то равенство (27) принимает вид $\Delta f = f_{\bar z}|\Delta z|e^{-i\alpha} + o(|\Delta z|) = f_{\bar z}\Delta\bar z + o(|\Delta z|)$, и отображение f в точке z для $z + \Delta z \in \beta_0$ меняет ориентацию, что противоречит второй части условия 2, б) формулировки теоремы. Поэтому в точке z выполняется равенство $f_{\bar z} = 0$ и функция f удовлетворяет условиям Коши – Римана. Лемма 3 доказана.

Доказательство теоремы. Измеримые функции u, v, $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, так как функция f ограничена в прямоугольнике δ и на множестве β_0 удовлетворяет условию Липшица, а также справедливо равенство (6), суммируемы в прямоугольнике δ. Пусть $R = [x_1, x_2; y_1, y_2]$, $R \subset \delta$, — прямоугольник, ограниченный контуром C, стороны которого лежат на тех сечениях δ_x, δ_y прямоугольника δ, параллельных осям координат, на которых функция f абсолютно непрерывна. Используя теорему Фубини, получаем

$$\iint\limits_R \frac{\partial u}{\partial x} dx\, dy = \int\limits_\Delta dy \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int\limits_\Delta [u(x_2, y) - u(x_1, y)] dy = \int\limits_C u(x, y) dy,$$

где $y \in \Delta \subset [y_1, y_2]$, если на δ_y функция $u(x, y)$ абсолютно непрерывна. Рассуждая аналогично относительно производных $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$, получаем равенство (5). Поскольку почти всюду в прямоугольнике δ функция f удовлетворяет условиям Коши – Римана, то $\int_C f(z)dz = 0$.

Пусть P — множество, состоящее из точек $z = x + iy$ прямоугольника δ, лежащих на сечениях δ_x, δ_y, на которых функция f абсолютно непрерывна; очевидно, $mP = m\delta$. Пусть $z_0 \in P$. Для точек $z \in P$ можно определить функцию $F(z) = \int_{z_0}^{z} f(z)dz$, где интеграл берется вдоль ломаной, соединяющей точки z_0 и z, звенья которой принадлежат тем сечениям δ_x, δ_y прямоугольника δ, на которых функция f абсолютно непрерывна. Поскольку функция f ограничена, функция F удовлетворяет условию Липшица на множестве P. Нетрудно видеть, что функция $F: P \to C$ непрерывно продолжается на прямоугольник δ, и полученная функция, например F^*, удовлетворяет на множестве δ условию Липшица. Поскольку легко убедиться, что в каждой точке z множества P функция F^* имеет вдоль прямых, параллельных осям Ox и Oy, производные, равные $f(z)$, как и выше, получаем $\int_C F^*(z)dz = 0$, где C — произвольный прямоугольный контур со сторонами, параллельными осям координат. Следовательно, функция F^* голоморфна в прямоугольнике δ. Пусть $(F^*)'(z) = f^*(z)$; для $z \in P$ выполняется равенство $f^*(z) = f(z)$. А так как функция f^* голоморфна в прямоугольнике δ, функция f в каждой точке z прямоугольника δ удовлетворяет условию 1 формулировки теоремы, функции f и f^* совпадают. Теорема доказана.

1. *Меньшов Д. Е.* Об асимптотической моногенности // Мат. сб. – 1936. – 1, № 2. – С. 189 – 210.
2. *Бродович М. Т.* Голоморфность произвольного аппроксимативно голоморфного отображения плоской области в плоскость // Сиб. мат. журн. – 1993. – **34**, № 3. – С. 19 – 26.
3. *Бродович М. Т.* О голоморфности функции, обладающей производными относительно некоторых множеств // Мат. студії. – 1998. – **9**, № 2. – С. 155 – 164.
4. *Теляковский Д. С.* Об асимптотически моногенных ограниченных функциях // Мат. сб. – 1986. – **129**, № 3. – С. 434 – 439.
5. *Теляковский Д. С.* Обобщение теоремы Д. Е. Меньшова об асимптотически моногенных функциях // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. – 1992. – № 4. – С. 68 – 71.
6. *Трохимчук Ю. Ю.* Непрерывные отображения и условия моногенности. – М.: Физматгиз, 1963. – 211 с.
7. *Сакс С.* Теория интеграла. – М.: Изд-во иностр. лит., 1949. – 494 с.

Получено 18.07.2001,
после доработки — 15.04.2003