УДК 517.5

В. Р. Войцехівський (Ін-т математики НАН України, Київ)

НЕРІВНОСТІ ТИПУ ДЖЕКСОНА В ПРОСТОРІ S^p

In approximating periodic functions in the space S^p, we find exact constants in the Jackson-type inequalities for the Zygmund, Rogosinski, and Vallée Poussin linear methods of summing.

Знайдено точні константи в нерівностях типу Джексона при наближенні періодичних функцій у просторі S^p для лінійних методів підсумовування: Зигмунда, Рогозинського, Валле Пуссена.

Нехай S^p — простір сумовних 2π-періодичних функцій f ($f \in L$), з нормою

$$\|f\|_{S^p} = \left(\sum_{j \in Z} \left| \hat{f}(j) \right|^p \right)^{1/p} < \infty, \quad p \geq 1,$$

де

$$\hat{f}(j) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-ijx} \, dx$$

— коефіцієнти Фур'є функції f за тригонометричною системою $\left\{ (2\pi)^{-1/2} e^{ijx} \right\}_{j \in Z}$, $i^2 = -1$. Вивчення апроксимативних властивостей просторів S^p (і навіть більш загальних просторів S^p_φ) започаткував О. І. Степанець [1 – 3].

Нехай, далі, $\{\psi(j)\}_{j \in Z}$ — довільна послідовність відмінних від нуля комплексних чисел. Якщо ряд

$$(2\pi)^{-1/2} \sum_{j \in Z} \frac{\hat{f}(j)}{\psi(j)} e^{ijx}$$

рядом Фур'є деякої функції з L, то цю функцію позначають через $f^\psi(\cdot)$ і називають ψ-похідною функції $f(\cdot)$, а множину функцій $f(\cdot)$, що задовольняють таку умову, позначають L^ψ. У випадку, коли $\psi(j) = (ij)^{-r}$, ψ-та похідна збігається із звичайною похідною r-го порядку $f^{(r)}$ функції f ($f^\psi = f^{(r)}$). Будемо говорити, що $f \in L^\psi S^p$, якщо $f(\cdot) \in L^\psi$ і $f^\psi \in S^p$.

Нехай

$$\Lambda^{(n)} = \left\{ \lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_n^{(n)} \right\} \tag{1}$$

— довільний набір комплексних чисел. Кожній функції f з S^p на основі її розкладу в ряд Фур'є поставимо у відповідність поліном $U_n(f, x, \Lambda)$ вигляду

$$U_n(f, \Lambda) = U_n(f, x, \Lambda) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{|j| \leq n} \lambda_{|j|}^{(n)} \hat{f}(j) e^{ijx}. \tag{2}$$

Метод наближення, який при кожному фіксованому $n \in N$ співставляє функції $f(x)$ за допомогою набору (1) поліном (2), будемо називати Λ-методом підсумовування рядів Фур'є.

Якщо набір $\Lambda^{(n)}$ такий, що $\lambda_{|j|}^{(n)} \equiv 1$, то, очевидно, $U_n(f, x, \Lambda) = S_n(f, x)$, де $S_n(f, x)$ — n-та частинна сума Фур'є функції f

$$S_n(f,x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{|j|\le n} \hat f(j) e^{ijx}.$$

Якщо $\lambda_{|j|}^{(n)} = 1 - (|j|/(n+1))^s$, $|j| = 0, 1, \ldots, n$, $s > 0$, то

$$U_n(f,x,\Lambda) = Z_n^{(s)}(f,x) = (2\pi)^{-1/2} \sum_{|j|\le n} \left(1 - \left(\frac{|j|}{n+1}\right)^s\right) \hat f(j) e^{ijx}.$$

Поліноми $Z_n^{(s)}(f,x)$ називають сумами Зигмунда.

Метод Валле Пуссена визначається набором коефіцієнтів (1), в якому

$$\lambda_{|j|}^{(n)} = \begin{cases} 1, & |j| \le m; \\ \dfrac{n-|j|+1}{n-m+1}, & m < |j| \le n. \end{cases}$$

У цьому випадку

$$U_n(f,x,\Lambda) = V_m^n(f,x) = \frac{1}{n-m} \sum_{m \le |j| \le n} S_j(f,x).$$

У випадку, коли $\lambda_{|j|}^{(n)} = \cos(j\pi/(2(n+1)))$, $|j| = 0, 1, \ldots, n$, отримуємо метод Рогозинського. При цьому

$$U_n(f,x,\Lambda) \equiv R_n(f,x) = \frac{1}{2}\left(S_n\left(f, x + \frac{\pi}{2(n+1)}\right) + S_n\left(f, x - \frac{\pi}{2(n+1)}\right)\right).$$

Поліноми $R_n(f,x)$ називають сумами Рогозинського.

Позначимо через

$$E(f, U_n(\Lambda))_{S^p} = \|f - U_n(f,\Lambda)\|_{S^p}$$

похибку наближення в S^p функції $f(\cdot)$ поліномами $U_n(f,\Lambda)$.

Величину

$$\omega_k(f,t)_{S^p} \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{|u|\le t} \left\|\Delta_u^k(f;\cdot)\right\|_{S^p}, \quad k \ge 0,$$

де

$$\Delta_u^k(f,x) \overset{\mathrm{df}}{=} \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} f(x + (k-\nu)u), \quad k > 0,$$

називають модулем неперервності k-го порядку функції f у просторі S^p [3].

Множину всіх сумовних, невід'ємних на відрізку $(0, h)$ функцій будемо позначати $M(h)$.

У цій роботі продовжуються дослідження, розпочаті в роботах [1 – 9], а саме вивчаються питання про знаходження точних констант в нерівностях типу Джексона, які задаються похибкою наближення f у метриці простору S^p, поліномами $U_n(f,x,\Lambda)$ та мажорантами, залежними від модуля неперервності $\omega_k(f^\psi, t)_{S^p}$. Основним результатом є таке твердження.

Теорема 1. *Нехай* $k > 0$, $0 < h \le \pi$, $\theta \in M(h)$, $\lambda_{|j|}^{(n)} \in \Lambda^{(n)}$, $\{\psi(j)\}_{j\in\mathbb{Z}}$ — *довільна обмежена послідовність відмінних від нуля комплексних чисел і виконується умова*

$$\inf_{|j|\geq n} \frac{F^p(j/n)}{|\psi(j)|^p} = \frac{F^p(1)}{\max\left\{|\psi(n)|^p, |\psi(-n)|^p\right\}}, \tag{3}$$

де

$$F(x) = 2^k\left(\int_0^h \left|\sin\frac{xt}{2}\right|^{pk} \theta(t)\,dt\right)^{1/p}. \tag{4}$$

Тоді

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi S^p\\ f\neq \text{const}}} \frac{E^p(f, U_{n-1}(\Lambda))_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^\psi, t/n\right)_{S^p}\theta(t)\,dt} = \max_{1\leq|j|\leq n} \frac{|\psi(j)|^p\left|1-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p}{F^p(j/n)}. \tag{5}$$

У випадку $p = 2$, $\psi(j) = (ij)^{-r}$, $r \geq 0$, теорему доведено в [4] при $\lambda_{|j|}^{(n)} \equiv 1$. Точні або асимптотично точні рівності вигляду (5) для величин

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi S^p\\ f\neq \text{const}}} \frac{E^p(f, U_{n-1}(\Lambda))_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^\psi, t/n\right)_{S^p}\theta(t)\,dt}$$

для довільних $\lambda_{|j|}^{(n)}$ встановлено в [5]. Доведення теореми спирається на твердження, яке, можливо, має і самостійний інтерес.

Лема. *Нехай* $k > 0$, $0 < h \leq \pi$, $\theta \in M(h)$, $\lambda_{|j|}^{(n)} \in \Lambda^{(n)}$, $\{\psi(j)\}_{j\in \mathbb{Z}}$ *— довільна обмежена послідовність відмінних від нуля комплексних чисел. Тоді при довільних* $n \in N$ *справджуються оцінки*

$$\frac{1}{C_{n,k}^{\psi,1}(\theta)} \leq \sup_{\substack{f\in L^\psi S^p\\ f\neq \text{const}}} \frac{E^p(f, U_{n-1}(\Lambda))_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^\psi, t/n\right)_{S^p}\theta(t)\,dt} \leq \frac{1}{C_{n,k}^{\psi,2}(\theta)}, \tag{6}$$

де

$$C_{n,k}^{\psi,1}(\theta) = \min\left\{\inf_{1\leq|j|<n} \frac{F^p(j/n)}{|\psi(j)|^p\left|1-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p}, \frac{F^p(1)}{\max\left\{|\psi(n)|^p, |\psi(-n)|^p\right\}}\right\}, \tag{7}$$

$$C_{n,k}^{\psi,2}(\theta) = \min\left\{\inf_{1\leq|j|<n} \frac{F^p(j/n)}{|\psi(j)|^p\left|1-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p}, \inf_{|j|\geq n} \frac{F^p(j/n)}{|\psi(j)|^p}\right\}, \tag{8}$$

F *означено формулою* (4).

Доведення. При доведенні будемо користуватися схемою міркувань, запропонованою в [4]. Нехай $f \in L^\psi S^p$, $0 < h \leq \pi$, $\theta \in M(h)$. Тоді

$$E^p(f, U_{n-1}(\Lambda))_{S^p} = \|f - U_{n-1}(f,\Lambda)\|_{S^p}^p = \sum_{1\leq|j|<n} \left|1-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p \left|\hat{f}(j)\right|^p +$$

$$+\sum_{|j|\geq n}\left|\hat{f}(j)\right|^p = \sum_{1\leq|j|<n}\frac{2^{pk}\int_0^h|\sin(jt/2n)|^{pk}\left|\hat{f}^{\psi}(j)\right|^p\theta(t)\,dt}{F^p(j/n)\,/\,|\psi(j)|^p\left|-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p}+$$

$$+\sum_{|j|\geq n}\frac{2^{pk}\int_0^h|\sin(jt/2n)|^{pk}\left|\hat{f}^{\psi}(j)\right|^p\theta(t)\,dt}{F^p(j/n)\,/\,|\psi(j)|^p}\leq\frac{\int_0^h\omega_k^p(f,t/n)_{S^p}\,\theta(t)\,dt}{C_{n,k}^{\psi,2}(\theta)},$$

що й доводить другу нерівність у (6). Виберемо $j_0\in Z$ і $1\leq|j_0|\leq n$ так, щоб

$$\frac{F^p(j_0/n)}{\left|1-\lambda_{|j_0|}^{(n)}\right|^p|\psi(j_0)|^p} = \inf_{1\leq|j|\leq n}\frac{F^p(j/n)}{\left|1-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p|\psi(j)|^p}.$$

Тоді, покладаючи $f_*=(2\pi)^{-1/2}e^{ij_0x}$, отримуємо

$$\frac{E^p(f_*,U_n(\Lambda))_{S^p}}{\int_0^h\omega_k^p\left(f_*^{\psi},t/n\right)_{S^p}\theta(t)\,dt} = \frac{1}{C_{n,k}^{\psi,1}(\theta)},$$

звідки випливає ліва частина у (6). Лему доведено.

***Доведення теореми* 1.** Нехай $f\in L^{\psi}S^p$ і виконується умова (3). Тоді, використовуючи лему, одержуємо рівності

$$C_{n,k}^{\psi,2}(\theta) = C_{n,k}^{\psi,1}(\theta) =$$

$$=\min\left\{\inf_{1\leq|j|<n}\frac{F^p(j/n)}{\left|1-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p|\psi(j)|^p},\frac{F^p(1)}{\max\left\{|\psi(n)|^p,|\psi(-n)|^p\right\}}\right\},$$

звідки

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}S^p\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{E^p(f,U_{n-1}(\Lambda))_{S^p}}{\int_0^h\omega_k^p\left(f^{\psi},t/n\right)_{S^p}\theta(t)\,dt} = \frac{1}{C_{n,k}^{\psi,1}} = \max_{1\leq|j|\leq n}\frac{|\psi(j)|^p\left|1-\lambda_{|j|}^{(n)}\right|^p}{F^p(1)}.$$

Теорему доведено.

Застосуємо теорему 1 для $\theta(t)\equiv1$ і наближення методами Зигмунда, Рогозинського і Валле Пуссена.

Теорема 2. *Нехай* $k\geq1/p$, $0<h\leq3\pi/4$, $s>0$, $p\geq1$ *і* $\psi(j)=(ij)^{-r}$, $r\geq0$. *Тоді при* $k\leq s-r$ *і довільних* $n\in N$ *справедлива рівність*

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}S^p\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{E^p\left(f,Z_{n-1}^{(s)}(f)\right)_{S^p}}{\int_0^h\omega_k^p\left(f^{(r)},t/n\right)_{S^p}dt} = \frac{1}{2^{pk}n^{pr}\int_0^h\sin^{pk}(t/2)\,dt}. \tag{9}$$

Якщо $p(r-s)\geq1$ *і* $n\in N$ *або* $p(r-s)<1$, $k>s-r$ *і* $n\geq$ $\geq\left(\dfrac{h}{2\sin(h/2)}\right)^{k/(k-s+r)}$, *то виконується рівність*

$$\sup_{\substack{f \neq \text{const} \\ f \in L^{\psi}S^p}} \frac{E^p\left(f, Z_{n-1}^{(s)}(f)\right)_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p} dt} = \frac{1}{2^{pk} n^{pr} \int_0^h \sin^{pk}(t/2n)\, dt}. \tag{10}$$

Зауважимо, що при $0 < h < \pi/2$, $s \geq 1$, $p = 2$, $k = 1$ і $r = 0$ теорему 2 доведено в [5].

Доведення. Нехай $f \in L^{\psi}S^p$, $p \geq 1$, $0 < h \leq 3\pi/4$ і $\psi(j) = (ij)^{-r}$. У роботі [6] показано, що в цьому випадку

$$\inf_{|j| \geq n} \int_0^h \left|2\sin\left(\frac{jt}{2n}\right)\right|^{pk} dt = \int_0^h \sin^{pk}\frac{t}{2}\, dt. \tag{11}$$

Оскільки $|\psi(j)|^{-1} \geq |\psi(n)|^{-1}$, $|j| \geq n$, то з (11) випливає виконання умови (3). Отже, згідно з теоремою 1 при $pk \geq 1$, $s > 0$, $r \geq 0$, $0 < h \leq 3\pi/4$

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi}S^p \\ f \neq \text{const}}} \frac{E^p\left(f, Z_{n-1}^{(s)}(f)\right)_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p} dt} = \max_{1 \leq |j| \leq n} \frac{j^{ps}}{2^{pk} n^{ps} j^{pr} \int_0^h |\sin(jt/2n)|^{pk}\, dt}. \tag{12}$$

Розглянемо функцію

$$\begin{gathered} \delta_{\alpha,\beta}(x) = x^{-\beta} \int_0^x \sin^{\alpha} t\, dt, \\ 0 \leq x \leq \frac{h}{2} \quad \left(0 < h \leq \frac{3\pi}{4}\right), \quad \alpha > 0, \quad \beta \in R. \end{gathered} \tag{13}$$

Неважко бачити, що

$$\max_{1 \leq |j| \leq n} \frac{j^{ps}}{2^{pk} n^{ps} j^{pr} \int_0^h |\sin(jt/2n)|^{pk}\, dt} =$$

$$= \frac{h^{ps-pr+1}}{2^{pk+pr-ps} n^{ps+1} \min\limits_{1 \leq |j| \leq n} \delta_{pk,\, ps-pr+1}(|j|h/2n)}, \tag{14}$$

а отже, для знаходження правої частини (14) достатньо обчислити $\min_{h/2n \leq x \leq h/2} \delta_{\alpha,\beta}(x)$ і показати, що при $\alpha = pk$, $\beta = ps - pr + 1$

$$\min_{1 \leq |j| \leq n} \delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{|j|h}{2n}\right) = \min_{h/2n \leq x \leq h/2} \delta_{\alpha,\beta}(x). \tag{15}$$

Нехай $\alpha \leq \beta - 1$. Покажемо, що $\delta_{\alpha,\beta}(x)$ монотонно спадає на $[0, h/2]$. Справді, оскільки

$$\delta'_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x \sin^{\alpha} x - \beta \int_0^x \sin^{\alpha} t\, dt}{x^{\beta+1}}, \quad \alpha > 0, \quad \beta \in R, \quad x \in \left[0, \frac{h}{2}\right],$$

і

$$\gamma_{\alpha,\beta}(x) \overset{\mathrm{df}}{=} x\sin^\alpha x - \beta\int_0^x \sin^\alpha t\,dt \le x\sin^\alpha x - (\alpha+1)\int_0^x \left(\frac{t}{x}\right)^\alpha dt\sin^\alpha x = 0,$$

то

$$\delta'_{\alpha,\beta}(x) \le 0, \tag{16}$$

отже,

$$\min_{1\le|j|\le n}\delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{|j|h}{2n}\right) = \delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{2}\right) = \frac{h^{ps-pr+1}}{2^{pk+pr-ps}\,n^{ps+1}}\int_0^h \sin^{pk}\frac{t}{2}dt. \tag{17}$$

Об'єднуючи (14), (15) і (17), отримуємо (9) при $k\le s-r$, $k>0$, $s>0$, $r\ge 0$.

Покажемо, що при $\alpha>\beta-1$ і $n\ge\left(\dfrac{h}{2\sin(h/2)}\right)^{\alpha/(\alpha-\beta+1)}$

$$\delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{2n}\right) = \min_{h/2n\le x\le h/2}\delta_{\alpha,\beta}(x). \tag{18}$$

Оскільки $\gamma'_{\alpha,\beta}(x)=\sin^{\alpha-1}x\cos x(\alpha x-(\beta-1)\operatorname{tg}x)$, то $\gamma'_{\alpha,\beta}$ має єдиний нуль $c_0\in(0,h/2)$, причому

$$\gamma_{\alpha,\beta}(c_0) = \max_{x\in(0,h/2)}\gamma_{\alpha,\beta}(x).$$

Якщо $0<x\le c_0$, то $\gamma_{\alpha,\beta}(x)>\gamma_{\alpha,\beta}(0)=0$, а отже, на $(0,c_0)$ функція $\delta_{\alpha,\beta}(x)$ зростає.

Нехай $c_0<x<h/2$, тоді $\gamma_{\alpha,\beta}(x)\ge\gamma_{\alpha,\beta}(h/2)$.

Якщо $\gamma_{\alpha,\beta}(h/2)\ge 0$, то $\delta_{\alpha,\beta}(x)$ зростає, якщо ж $\gamma_{\alpha,\beta}(h/2)<0$, то $\gamma_{\alpha,\beta}(x)$ має єдиний нуль $c_1\in(c_0,h/2)$, причому $\delta_{\alpha,\beta}(c_1)= =\max_{x\in(0,h/2)}\delta_{\alpha,\beta}(x)$. Отже, якщо $\gamma_{\alpha,\beta}(h/2)<0$, то функція $\delta_{\alpha,\beta}(x)$ монотонно зростає на $(0,c_1)$ і монотонно спадає на $(c_1,h/2)$. Звідси випливає, що якщо $\gamma_{\alpha,\beta}(h/2)\ge 0$, то для $t\in(0,h/2]$ $\delta_{\alpha,\beta}(x)=\inf_{t\ge x}\delta_{\alpha,\beta}(t)$, а якщо $\gamma_{\alpha,\beta}(h/2)<0$, то для $t\in(0,h/2]$ $\min\{\delta_{\alpha,\beta}(x),\delta_{\alpha,\beta}(h/2)\}= =\inf_{h/2\ge t\ge x}\delta_{\alpha,\beta}(t)$.

Розглянемо функцію

$$g(x) = \int_0^x \sin^\alpha t\,dt - n^\beta\int_0^{x/n}\sin^\alpha t\,dt, \quad x\in\left(0,\frac{h}{2}\right].$$

Для неї

$$g'(x) = \sin^\alpha x - n^{\beta-1}\sin^\alpha\frac{x}{n} \ge \sin^\alpha x - n^{\beta-1}\left(\frac{x}{n}\right)^\alpha.$$

При $x\in(0,h/2]$ і $n\ge\left(\dfrac{h}{2\sin(h/2)}\right)^{\alpha/(\alpha-\beta+1)}\ge\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)^{\alpha/(\alpha-\beta+1)}$ виконується нерівність $g'(x)>0$. Тому

$$g(x) > g(0) = 0, \quad x\in\left(0,\frac{h}{2}\right]. \tag{19}$$

Оскільки $(h/2)^{\beta} g(h/2) = \delta_{\alpha,\beta}(h/2) - \delta_{\alpha,\beta}(h/2n)$, на підставі (19) отримуємо

$$\delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{2}\right) > \delta_{\alpha,\beta}\left(\frac{h}{2n}\right). \tag{20}$$

Покладаючи у (20) $\alpha = pk$, $\beta = ps - pr + 1$, маємо

$$\delta_{pk,\,ps-pr+1}\left(\frac{h}{2n}\right) = \inf_{1\le|j|\le n} \delta_{pk,\,ps-pr+1}\left(\frac{|j|h}{2n}\right).$$

Об'єднуючи (14), (15) і (20), одержуємо (10). Теорему 2 доведено.

Теорема 3. *Нехай* $k \ge 1/p$, $0 < h \le 3\pi/4$, $p \ge 1$ *і* $\psi(j) = (ij)^{-r}$, $r \ge 0$, $n \in N$. *Тоді при* $k + r \le \pi/2$ *справедлива рівність*

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi} S^p \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{E^p(f, R_{n-1}(f))_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p} dt} = \frac{1}{2^{pk} n^{pr} \int_0^h \sin^{pk}(t/2)\,dt}, \tag{21}$$

а при $k \ge \dfrac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(2-r)$ *або при* $p(r-2) \ge 1$ *і* $k \ge 1/p$ *виконується рівність*

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi} S^p \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{E^p(f, R_{n-1}(f))_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p} dt} = \frac{\sin^{2p}(\pi/4n)}{2^{p(k-1)} \int_0^h \sin^{pk}(t/2n)\,dt}. \tag{22}$$

При $0 < h < \pi/2$, $p = 2$, $k = 1$ і $r = 0$ теорему доведено в [5].

Доведення. Нехай $f \in L^{\psi} S^p$, $p \ge 1$, $0 < h \le 3\pi/4$ і $\psi(j) = (ij)^{-r}$. Умова (3) виконується, тому

$$\sup_{\substack{f \in L^{\psi} S^p \\ f \ne \mathrm{const}}} \frac{E^p(f, R_{n-1}(f))_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p} dt} = \max_{1\le|j|\le n} \frac{\sin^{2p}(|j|\pi/4n)}{2^{p(k-1)} j^{pr} \int_0^h |\sin(jt/2n)|^{pk}\,dt}. \tag{23}$$

Розглянемо при $0 < x \le 1/2$, $0 < h \le 3\pi/4$, $\tau \ge 0$, $\alpha > 0$, $\beta \ge 2$ функцію

$$\delta_{\alpha,\beta,\tau}(x) = \frac{x^{\tau-1} \int_0^{hx} \sin^{\alpha} t\,dt}{\sin^{\beta}(\pi x/2)}.$$

Помічаючи, що

$$\max_{1\le|j|\le n} \frac{\sin^{2p}(|j|\pi/4n)}{2^{p(k-1)} j^{pr} \int_0^h |\sin(jt/2n)|^{pk}\,dt} =$$

$$= \frac{1}{2^{p(k+r-1)} n^{pr} \min\limits_{1\le|j|\le n} \delta_{pk,\,2p,\,pr}(|j|/2n)}, \tag{24}$$

робимо висновок, що для знаходження лівої частини в (23) достатньо знайти $\min_{1/2n \le x \le 1/2} \delta_{\alpha,\beta,\tau}(x)$ і показати, що при $\alpha = pk$, $\beta = 2p$, $\tau = pr$ і $k + r \le \pi/2$

$$\min_{1\le|j|\le n} \delta_{\alpha,\beta,\tau}\left(\frac{|j|}{2n}\right) = \delta_{\alpha,\beta,\tau}\left(\frac{1}{2}\right), \tag{25}$$

а при $\alpha = pk$, $\beta = 2p$, $\tau = pr$ і $p(r-2) \ge 1$ або $k \ge \dfrac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(2-r)$

$$\min_{1 \le |j| \le n} \delta_{\alpha,\beta,\tau}\left(\frac{|j|}{2n}\right) = \delta_{\alpha,\beta,\tau}\left(\frac{1}{2n}\right). \tag{26}$$

Нехай $\alpha + \tau \le \pi\beta/4$. Покажемо, що $\delta_{\alpha,\beta,\tau}(x)$ монотонно спадає на $(0, 1/2]$. Справді, оскільки

$$\delta'_{\alpha,\beta,\tau}(x) =$$

$$= \frac{\left((\tau-1)\int_0^{hx} \sin^\alpha t\,dt + hx\sin^\alpha hx\right)\sin(\pi x/2) - (\beta\pi x/2)\cos(\pi x/2)\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt}{x^{2-\tau}\sin^{\beta+1}(\pi x/2)} \tag{27}$$

і

$$\gamma_{\alpha,\beta,\tau}(x) \overset{\text{df}}{=} \frac{(\tau-1)\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt + hx\sin^\alpha hx}{\beta\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x \le$$

$$\le \left(\frac{\pi}{4} + \frac{hx\sin^\alpha hx - (\alpha+1)\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt}{\beta\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x \le$$

$$\le \frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x \le 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \quad \tau \ge 0, \quad \beta \ge 2 \ \text{ і } \ \alpha + \tau \le \frac{\pi}{4}\beta,$$

то

$$\delta'_{\alpha,\beta,\tau}(x) \le 0, \qquad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \tag{28}$$

Отже, з (28) випливає (25). Об'єднуючи (24) і (25), отримуємо (21).

Нехай $\tau - 1 \ge \beta$ або $\alpha \ge \dfrac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(\beta-\tau)$. Покажемо, що $\delta_{\alpha,\beta,\tau}$ монотонно зростає на $(0, 1/2]$. Якщо $\tau - 1 \ge \beta$, то

$$\gamma_{\alpha,\beta,\tau}(x) = \frac{(\tau-1)\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt + hx\sin^\alpha hx}{\beta\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x \ge$$

$$\ge \left(1 + \frac{hx\sin^\alpha hx}{\beta\int_0^{hx}\sin^\alpha t\,dt}\right)\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x > \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x > 0$$

і тоді

$$\begin{gathered}\delta'_{\alpha,\beta,\tau}(x) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \ \ \beta \ge 2, \\ \tau \ge 0 \ \text{ і } \ \tau - 1 \ge \beta, \ \ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right].\end{gathered} \tag{29}$$

Нехай $\alpha \ge \dfrac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(\beta-\tau)$. Розглянемо функцію

$$\varphi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} hx\sin^{\alpha} hx - (\beta-\tau+1)\int_0^{hx} \sin^{\alpha} t\,dt,$$

$$x \in (0, 1/2], \quad \alpha > 0, \quad \tau \geq 0, \quad \beta \geq 2,$$

$$\alpha \geq \frac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(\beta-\tau), \quad 0 < h \leq \frac{3\pi}{4}.$$

Покажемо, що $\varphi(x) > 0$ на $\left(0, \frac{1}{2}\right]$, і, отже,

$$\frac{(\tau-1)\int_0^{hx} \sin^{\alpha} t\,dt + hx\sin^{\alpha} hx}{\beta\int_0^{hx} \sin^{\alpha} t\,dt} > 1. \tag{30}$$

Із (30) маємо

$$\gamma_{\alpha,\beta,\tau}(x) > \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}x - \frac{\pi}{2}x > 0. \tag{31}$$

Співставляючи (27) і (31), отримуємо

$$\delta'_{\alpha,\beta,\tau}(x) > 0 \quad \text{при} \quad \alpha > 0, \quad \beta \geq 2, \quad \tau \geq 0,$$
$$\alpha \geq \frac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(\beta-\tau), \quad x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]. \tag{32}$$

Справді,

$$\varphi'(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} h^2\sin^{\alpha-1} hx\cos hx\left(\alpha - \frac{\operatorname{tg} hx}{hx}(\beta-\tau)\right) \geq 0$$

при $x \in (0, 1/2]$ і $\alpha \geq \frac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(\beta-\tau)$, а отже, $\varphi(x) > \varphi(0) = 0$ при $\alpha \geq \frac{2\operatorname{tg}(h/2)}{h}(\beta-\tau)$. Із (29) або (32) випливає (26). Враховуючи (24) і (26), отримуємо (22). Теорему 3 доведено.

Зауваження. На відміну від сум Зигмунда, для яких, як випливає з доведення теореми 2, точна константа в (12) досягається тільки при $|j| = 1$ або при $|j| = n$, для сум Рогозинського можливі випадки, коли

$$\max_{1\leq|j|\leq n} \frac{\sin^{2p}(|j|\pi/4n)}{2^{p(k-1)}|j|^{pr}\int_0^h |\sin(jt/2n)|^{pk}\,dt} =$$

$$= \max_{1<|j|<n} \frac{\sin^{2p}(|j|\pi/4n)}{2^{p(k-1)}|j|^{pr}\int_0^h |\sin(jt/2n)|^{pk}\,dt}.$$

Покажемо це на прикладі. Задамо параметри $p = p_0 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\cos(\pi/8)}\right)$, $k = r = 1/p_0$, $h = \pi/2$, $n = 6$ і знайдемо точну константу в (12) для цього випадку. Права частина в (23) набере вигляду

$$\max_{1\leq|j|\leq 6} \frac{2^{p_0-1}\sin^{2p_0}(|j|\pi/24)}{|j|\int_0^{\pi/2} |\sin(jt/12)|\,dt} = \max_{1\leq|j|\leq 6} \frac{2^{p_0-3}\sin^{2p_0}(|j|\pi/24)}{3(1-\cos(|j|\pi/24))}. \tag{33}$$

Розглянемо функцію

$$\delta(x) = \frac{1-\cos x}{\sin^{2p_0} x}, \quad 0 < x \le \frac{\pi}{4}.$$

Оскільки праву частину в рівності (33) можна подати у вигляді

$$\frac{2^{p_0-3}}{3 \min\limits_{1\le|j|\le 6} \delta(|j|\pi/24)},$$

то для знаходження (31) достатньо обчислити $\min_{1\le|j|\le 6}\delta(|j|\pi/24)$. Зважаючи на те, що

$$\delta'(x) = \frac{(1-\cos x)(\cos(\pi/8)-\cos x)}{\cos(\pi/8)\sin^{2p_0+1} x},$$

неважко помітити, що $\min_{0<x\le\pi/4}\delta(x) = \delta(\pi/8)$. На підставі того, що $\delta(\pi/8) = \delta(3\pi/24) = \min_{1\le|j|\le 6}\delta(|j|\pi/24)$, отримуємо

$$\frac{2^{p_0-3}}{3 \min\limits_{1\le|j|\le 6} \delta(|j|\pi/24)} = \frac{2^{p_0-3}}{3\delta(\pi/8)} = \frac{2^{p_0-3}\sin^{2p_0}(\pi/8)}{3(1-\cos(\pi/8))},$$
$$p_0 = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\cos(\pi/8)}\right). \tag{34}$$

Як видно з (34), максимум у (33) досягається при $|j|=3$.

Теорема 4. *Нехай* $k \ge 1/p$, $0 < h \le 3\pi/4$, $p \ge 1$ *і* $\psi(j) = (ij)^{-r}$, $r \ge 0$, n, $m \in N$, $m = \overline{1, n-1}$. *Тоді при* $k + r \le 1$ *виконується рівність*

$$\sup_{\substack{f\in L^{\psi}S^p\\ f\ne\text{const}}} \frac{E^p\left(f, V_m^{n-1}(f)\right)_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p} dt} = \frac{1}{2^{pk} n^{pr} \int_0^h \sin^{pk}(t/2)\,dt}. \tag{35}$$

Доведення. Нехай $f \in L^{\psi}S^p$, $p \ge 1$, $0 < h \le 3\pi/4$ і $\psi(j) = (ij)^{-r}$. Оскільки умова (3) виконується, то

$$\sup_{\substack{f\in L^{(r)}S^p\\ f\ne\text{const}}} \frac{E^p\left(f, V_m^{n-1}(f)\right)_{S^p}}{\int_0^h \omega_k^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p} dt} =$$

$$= \max_{1\le|j|\le n} \frac{(|j|-m)^p}{2^{pk}(n-m)^p |j|^{pr} \int_0^h |\sin(jt/2n)|^{pk}\,dt}. \tag{36}$$

Функцію

$$\delta_{\alpha,\tau}(x) = \frac{x^{\tau-1}\int_0^x \sin^{\alpha} t\,dt}{(x-mh/2n)^p}$$

розглянемо при $mh/2n < x \le h/2$, $0 < h \le 3\pi/4$, $\tau \ge 0$, $\alpha > 0$.

З огляду на те, що

$$\max_{1\le|j|\le n} \frac{(|j|-m)^p}{2^{pk}(n-m)^p|j|^{pr}\int_0^h|\sin(jt/2n)|^{pk}\,dt} =$$

$$= \frac{h^{p(r-1)-1}}{2^{p(k+r-1)}n^{p(k+r-1)}(n-m)^p \min\limits_{1\le|j|\le n}\delta_{pk,\,pr}(|j|h/2n)}, \tag{37}$$

для обчислення правої частини у (36) достатньо показати, що

$$\min_{1\le|j|\le n}\delta_{\alpha,\tau}\left(\frac{|j|h}{2n}\right) = \delta_{\alpha,\tau}\left(\frac{h}{2}\right)$$

$$\text{при} \quad \alpha = pk, \quad \tau = pr \quad \text{і} \quad \alpha+\tau\le p. \tag{38}$$

Нехай $\alpha+\tau \le p$. Покажемо, що для будь-якого $\alpha>0$ і $\tau\ge 0$ $\delta_{\alpha,\tau}(x)$ — монотонно спадна на $(mh/2n, h/2]$. Справді,

$$\delta'_{\alpha,\tau}(x) =$$

$$= \frac{\left(x\sin^\alpha x-(p-\tau+1)\int_0^x\sin^\alpha t\,dt\right)x-\left((\tau-1)\int_0^x\sin^\alpha t\,dt+x\sin^\alpha x\right)(mh/2n)}{(x-mh/2n)^{p+1}} < 0,$$

$\alpha>0$, $\tau\ge 0$ і $\alpha+\tau\le p$. Отже, рівність (38) доведено. Із (37) і (38) випливає (35). Теорему 4 доведено.

З теореми 4 отримуємо такий наслідок.

Наслідок.

$$\sup_{\substack{f\in L^\psi_\beta S^p\\ f\ne\text{const}}} \frac{E^p\left(f, V_m^{n-1}(f)\right)_{S^p}}{\int_0^h\omega_1^p\left(f^{(r)}, t/n\right)_{S^p}\theta(t)\,dt} = \frac{1}{2^p\int_0^h\sin^p(t/2)\,dt}.$$

Цю рівність при $p=2$ і $0<h\le\pi/2$ було встановлено в [5].

1. *Степанец А. Н.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 417.

2. *Степанец А. Н.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1147.

3. *Степанец А. Н., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы теории приближения функций в пространстве S^p // Там же. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.

4. *Лигун А. А.* Некоторые неравенства между наилучшим приближением и модулем непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. – 1978. – **24**, № 6. – С. 785 – 792.

5. *Божуха Л. Н.* Неравенства типа Джексона при приближении периодических функций полиномами Фейера, Рогозинского, Коровкина // Укр. мат. журн. – 2000. – **52**, № 12. – С. 1596 – 1602.

6. *Войцехівський В. Р.* Нерівності типу Джексона при наближенні функцій з простору S^p сумами Зигмунда // Теорія наближення функцій та суміжні питання: Пр. Ін-ту математики НАН України. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2002. – Т. 35. – С. 33 – 46.

7. *Черных Н. И.* О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1967. – **88**. – С. 71 – 74.

8. *Черных Н. И.* О наилучшем приближении периодических функций тригонометрическими полиномами в L_2 // Мат. заметки. – 1967. – **2**, № 5. – С. 513– 522.

9. *Тайков Л. В.* Неравенства, содержащие наилучшие приближения и модуль непрерывности из L_2 // Там же. – 1976. – **20**, № 3. – С. 433 – 438.

Одержано 14.01.2003