УДК 517.98

М. А. Муратов (Таврич. нац. ун-т, Симферополь),
В. И. Чилин (Нац. ун-т Узбекистана, Ташкент)

СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ И (o)-СХОДИМОСТЬ В КОЛЬЦАХ ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ, ПРИСОЕДИНЕННЫХ К КОНЕЧНОЙ АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

We study the relation between the (o)-convergence and convergence almost everywhere in the Hermitian part of a ring of unbounded measurable operators associated with the von Neumann finite algebra. In particular, we prove the theorem stating that the (o)-convergence and convergence almost everywhere are equivalent if and only if the von Neumann algebra is of the type I.

Вивчається зв'язок між (o)-збіжністю і збіжністю майже скрізь в ермітовій частині кільця необмежених вимірних операторів, приєднаних до скінченної алгебри фон Неймана. Зокрема, доведено теорему про те, що (o)-збіжність і збіжність майже скрізь еквівалентні тоді і тільки тоді, коли алгебра фон Неймана має тип I.

Активное развитие теории некоммутативного интегрирования, ее приложений к квантовой теории вероятностей и эргодической теории стало возможным, в первую очередь, в связи с интенсивным изучением кольца измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Впервые этот объект появился в работе [1], где, в частности, даны основы интегрирования относительно точного нормального полуконечного следа. В этой же работе введены некоммутативные аналоги сходимостей почти всюду и по мере. Впоследствии эти сходимости и их различные вариации рассматривались и изучались во многих работах (см., например, [2 – 12]), в которых установлен ряд важных и полезных соотношений между ними. Наличие частичного порядка в самосопряженной части кольца измеримых операторов позволяет рассматривать еще одну важную сходимость, а именно, (o)-сходимость (сходимость по порядку). Этот вид сходимости и ее связи со сходимостями по мере и почти всюду изучались в работе [11]. Однако до сих пор оставался открытым вопрос о совпадении (o)-сходимости и сходимости почти всюду для произвольных конечных алгебр фон Неймана. Известно, что для коммутативной алгебры фон Неймана $\mathcal{A}$ эти две сходимости совпадают (см., например, [13]). В то же время несовпадение сходимости почти всюду и двусторонней сходимости почти всюду для произвольных конечных алгебр фон Неймана [10] позволяет предположить, что (o)-сходимость и сходимость почти всюду в некоммутативном случае, вообще говоря, также не совпадают.

В настоящей работе решается вопрос о соотношениях между сходимостью почти всюду, двусторонней сходимостью почти всюду и (o)-сходимостью для произвольных конечных алгебр фон Неймана. При этом используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [14, 15], теории некоммутативного интегрирования [1, 4, 16], а также теории упорядоченных алгебр [17].

Пусть $\mathcal{A}$ — полуконечная алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, m — точный нормальный полуконечный след на $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ — решетка всех ортопроекторов в $\mathcal{A}$.

Замкнутый оператор T, присоединенный к $\mathcal{A}$ и имеющий всюду плотную область определения $D(T)$, называется m-измеримым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такой проектор $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, что $P(\mathcal{H}) \subset D(T)$ и $m(P^{\perp}) < \varepsilon$, где $P^{\perp} = I - P$ (I — единица алгебры $\mathcal{A}$).

Множество $S(\mathcal{A}, m)$ всех m-измеримых операторов является $*$-алгеброй относительно сильной суммы, сильного произведения и перехода к сопряженному оператору [1]. Если алгебра $\mathcal{A}$ коммутативна, то ее можно отождествить с алгеброй $L_\infty(\Omega, \Sigma, m)$ всех ограниченных комплексных функций, заданных на некотором пространстве (Ω, Σ, m) с полной мерой m, имеющей свойство прямой суммы (см., например, [14]). В этом случае $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ совпадает с алгеброй $L_0(\Omega, \Sigma, m)$ всех измеримых комплексных функций на (Ω, Σ, m).

Для каждого подмножества $\mathcal{M}$ из $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ через $\mathcal{M}_h$ (соответственно $\mathcal{M}_+$) обозначим множество всех самосопряженных (соответственно положительных самосопряженных) операторов из $\mathcal{M}$. Частичный порядок в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, порожденный собственным конусом $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$, будем обозначать через $\leq$.

Каждый оператор $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ имеет полярное разложение $T = U|T|$, где $|T| = \left(T^*T\right)^{1/2}$ — модуль этого оператора, а U — соответствующая частичная изометрия из $\mathcal{A}$.

Через $P_\varepsilon(T) = \{|T| > \varepsilon\}$ будем обозначать спектральный проектор для $|T|$, соответствующий интервалу (ε, ∞). Известно, что

$$|T|P_\varepsilon(T) = P_\varepsilon(T)|T| \geq \varepsilon P_\varepsilon(T)$$

и

$$P_\varepsilon(T)^\perp |T| \leq \varepsilon P_\varepsilon(T)^\perp.$$

Рассмотрим в $\mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ топологию сходимости по мере τ, базу окрестностей нуля которой образуют множества

$$U_{\varepsilon,\delta} = \left\{T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m) \colon \exists\, P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}} \quad \text{такой, что} \quad m(P^\perp) < \delta,\ TP \in \mathcal{A},\ \|TP\| < \varepsilon\right\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$, $\|\cdot\|$ — C^*-норма на $\mathcal{A}$.

Известно, что $(\mathcal{S}(\mathcal{A}, m), \tau)$ является отделимой полной топологической $*$-алгеброй (см., например, [18]).

Если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$ сходится в топологии τ к оператору T, то говорят, что $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ сходится к T по мере m $\left(T_n \overset{\text{п. м.}}{\to} T\right)$.

Заметим, что $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ и $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$ замкнуты в топологии τ.

Говорят, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ возрастает (убывает) к оператору $T \in \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, если $T_n \leq T_{n+1}$ (соответственно $T_n \geq T_{n+1}$) для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $T = \sup\limits_n T_n$ (соответственно $T = \inf\limits_n T_n$), и обозначают $T_n \uparrow T$ (соответственно $T_n \downarrow T$).

Последовательность $\{T_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ (o)-сходится к оператору T из $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ $\left(T_n \overset{(o)}{\to} T\right)$, если существуют такие последовательности $\{A_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{B_n\}_{n=1}^\infty$ операторов из $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, что:

1) $A_n \leq T_n \leq B_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$;

2) $A_n \uparrow T$;

3) $B_n \downarrow T$.

Сильнейшая из топологий в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, для которых из (o)-сходимости последовательностей следует их топологическая сходимость, называется (os)-топологией. Если $\mathcal{A}$ — конечная алгебра фон Неймана и m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, то (os)-топология в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ совпадает с топологией сходимости по мере m [17]. В частности, это означает, что любая (o)-сходящаяся последовательность из $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ сходится по мере.

Напомним определения сходимостей почти всюду и двусторонней почти всюду.

Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)$.

Говорят, что последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к оператору T

почти всюду $\left(T_n \overset{\text{п. в.}}{\to} T\right)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, что $m(P^{\perp}) < \varepsilon$, $(T_n - T)P \in \mathcal{A}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|(T_n - T)P\| = 0$;

двусторонне почти всюду $\left(T_n \overset{\text{д. п. в.}}{\to} T\right)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такой проектор $P \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, что $m(P^{\perp}) < \varepsilon$, $P(T_n - T)P \in \mathcal{A}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|P(T_n - T)P\| = 0$.

Очевидно, что из сходимости почти всюду следует двусторонняя сходимость почти всюду. Обратное, вообще говоря, не верно. В [10] (теорема 3.5) доказано, что если $\mathcal{A}$ — конечная алгебра фон Неймана и m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, то сходимость почти всюду и двусторонняя сходимость почти всюду всегда совпадают в том и только в том случае, когда алгебра $\mathcal{A}$ имеет тип I. Кроме того, в [11] (теорема 7) показано, что если $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$, то $T_n \overset{(o)}{\to} 0$ тогда и только тогда, когда $T_n \overset{\text{д. п. в.}}{\to} 0$ и $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$, т. е. существует такой оператор $S \in \mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$, что $T_n \le S$ для всех $n = 1, 2, \ldots$.

Следующая теорема показывает, что сходимость почти всюду на $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ не слабее, чем (o)-сходимость.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечная алгебра фон Неймана, m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$. Если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ сходится почти всюду к оператору $T \in \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$, то $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ (o)-сходится к T:*

$$\left(T_n \overset{\text{п. в.}}{\to} T\right) \Rightarrow \left(T_n \overset{(o)}{\to} T\right).$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $m(I) = 1$. Предположим сначала, что $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$ и $T_n \overset{\text{д. п. в.}}{\to} 0$. Отсюда, в частности, следует, что $T_n \overset{\text{п. м.}}{\to} 0$ [10]. Покажем, что $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$.

Поскольку $T_n \overset{\text{д. п. в.}}{\to} 0$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует проектор $P_k \in \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ такой, что $m(P_k) > 1 - \dfrac{1}{2^k}$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\|P_k T_n P_k\| = 0$.

Положим $Q_k = \inf\limits_{i \ge k} P_i$. Поскольку $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность и $m\left(Q_k^{\perp}\right) < \dfrac{1}{2^{k-1}}$, то $Q_k \uparrow I$. При этом $\|Q_k T_n Q_k\| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого фиксированного k.

Переходя, если нужно, к подпоследовательности, можно считать, что $Q_k \neq Q_{k+1}$.

Далее, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\| Q_k T_n Q_k \| = 0$, существует возрастающая последовательность номеров $\{N_k\}$ такая, что $\| Q_k T_n Q_k \| < 1$ при $n \geq N_k > N_{k-1}$. Тогда $0 \leq \leq Q_k T_n Q_k \leq I$ при $n \geq N_k$.

Положим $S_1 = 2Q_1\left(\sum_{n=1}^{N_1} T_n + I\right)Q_1$ и $S_k = 2^k\left(Q_k - Q_{k-1}\right)\left(\sum_{n=1}^{N_k} T_n + I\right) \times \times \left(Q_k - Q_{k-1}\right)$ для $k \geq 2$. Ясно, что $S_k \geq 0$ и $S_k S_l = 0$ при $k \neq l$.

Рассмотрим оператор $S = \sup\limits_{k\geq 1}\sum_{l=1}^{k} S_l \in \mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$. Тогда $Q_1 S Q_1 = S_1$ и

$$\left(Q_k - Q_{k-1}\right)S\left(Q_k - Q_{k-1}\right) = S_k \quad \forall\, k \geq 2.$$

Поэтому для любых k и n имеем

$$Q_k T_n Q_k \leq 2Q_1 T_n Q_1 + 2(Q_k - Q_1)T_n(Q_k - Q_1) \leq \ldots$$

$$\ldots \leq 2Q_1 T_n Q_1 + \sum_{i=2}^{k} 2^i\left(Q_i - Q_{i-1}\right)T_n\left(Q_i - Q_{i-1}\right),$$

откуда следует неравенство

$$Q_k T_n Q_k \leq S_1 + S_2 + \ldots + S_k \leq S.$$

Поскольку $\{Q_k\}_{k=1}^{\infty}$ возрастающая, $Q_k \uparrow I$ и след m нормален, то $Q_k \xrightarrow{\text{п. м.}} I$. А так как $(\mathcal{S}(\mathcal{A}, m), \tau)$ — топологическая алгебра, то $Q_k T_n Q_k \xrightarrow{\text{п. м.}} T_n$ при $k \to \infty$. Но собственный конус положительных элементов $\mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m)$ замкнут в $(\mathcal{S}(\mathcal{A}, m), \tau)$, поэтому $T_n \leq S \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$, т. е. $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$.

Пусть теперь $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ и $T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} T$. Тогда $|T_n - T| \xrightarrow{\text{п. в.}} 0$ и, следовательно, $|T_n - T| \xrightarrow{\text{д. п. в.}} 0$ [10]. В силу доказанного выше $\{|T_n - T|\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена в $\mathcal{S}_h(\mathcal{A}, m)$ и поэтому $T_n \xrightarrow{(o)} T$ [11] (теорема 7).

Теорема доказана.

В дальнейшем, при рассмотрении конечного следа m, будем всегда предполагать, что $m(I) = 1$. В следующей теореме показывается, что в случае ограниченных последовательностей из $\mathcal{A}$ сходимость почти всюду и (o)-сходимость совпадают.

Теорема 2. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечная алгебра фон Неймана, m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{A}_h$. Следующие условия эквивалентны:*

1) $T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} T$ *и* $\sup\limits_n \| T_n \| < \infty$;

2) $T_n \xrightarrow{(o)} T$ *в* $\mathcal{A}_h$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} T$ и $\sup\limits_n \| T_n \| < \infty$. Тогда $T_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} T$ и $\| |T_n - T| \| \leq \| T \| + \sup\limits_n \| T_n \|$. Поэтому согласно теореме 7 [11] $|T_n - T| \xrightarrow{(o)} 0$ в $\mathcal{A}_h$, и $T_n \xrightarrow{(o)} T$.

2) $\Rightarrow$ 1). $T_n \xrightarrow{(o)} T$ в $\mathcal{A}_h$. Тогда существуют последовательности $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ операторов из $\mathcal{A}_h$, для которых $A_n \leq T_n - T \leq B_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$, $A_n \uparrow 0$ и $B_n \downarrow 0$.

Поскольку $-A_n \downarrow 0$, то $(-A_n) \xrightarrow{(o)} 0$. Следовательно, $(-A_n) \xrightarrow{\text{д. п. в.}} 0$. Кроме того, $\|-A_n\| \leq \|A_1\|$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому $(-A_n) \xrightarrow{\text{п. в.}} 0$ (см. теорему 2 [11]).

Рассмотрим теперь $\{T_n - T - A_n\}_{n=1}^{\infty}$. Так как $0 \leq T_n - T - A_n \leq B_n - A_n$ и $(B_n - A_n) \downarrow 0$, то $T_n - T - A_n \xrightarrow{(o)} 0$, и поэтому $T_n - T - A_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} 0$. Кроме того, $\|T_n - T - A_n\| \leq \|B_1 - A_1\|$. Поэтому $T_n - T - A_n \xrightarrow{\text{п. в.}} 0$. Следовательно, $T_n - T = (T_n - T - A_n) + A_n \xrightarrow{\text{п. в.}} 0$ и, наконец, $T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} T$.

Осталось оценить норму $\|T_n\|$:

$$\|T_n\| = \|(T_n - T - A_n) + T + A_n\| \leq \|T_n - T - A_n\| + \|T\| + \|A_n\| \leq$$
$$\leq \|B_1 - A_1\| + \|T\| + \|A_1\|,$$

следовательно, $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$.

Теорема доказана.

***Следствие* 1.** *Следующие условия эквивалентны:*

1) *алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ имеет тип I;*

2) *любая ограниченная в $\mathcal{A}_h$ двусторонне сходящаяся последовательность является (o)-сходящейся в $\mathcal{A}_h$.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Пусть $\mathcal{A}$ имеет тип I, $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{A}_h$, $T_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} T$ и $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$. Поскольку для алгебр типа I сходимости двусторонняя и односторонняя почти всюду эквивалентны, то $T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} T$. Следовательно, $T_n \xrightarrow{(o)} T$ в $\mathcal{A}_h$.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \subset \mathcal{A}$, $T_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} T$ и $\sup\limits_n \|T_n\| < \infty$. Тогда $\operatorname{Re} T_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} \operatorname{Re} T$ и $\operatorname{Im} T_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} \operatorname{Im} T$, где $\operatorname{Re} T = \dfrac{T + T^*}{2}$, $\operatorname{Im} T = \dfrac{T - T^*}{2i}$. В силу предположения $\operatorname{Re} T_n \xrightarrow{(o)} \operatorname{Re} T$ и $\operatorname{Im} T_n \xrightarrow{(o)} \operatorname{Im} T$. Следовательно, $\operatorname{Re} T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} \operatorname{Re} T$ и $\operatorname{Im} T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} \operatorname{Im} T$ (см. теорему 3). Поэтому $T_n \xrightarrow{\text{п. в.}} T$.

Итак, сходимости односторонняя и двусторонняя почти всюду эквивалентны. Таким образом, алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ имеет тип I.

Следствие доказано.

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечная алгебра фон Неймана, m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$. Если последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S_h(\mathcal{A}, m)$ (o)-сходится к оператору $T \in S_h(\mathcal{A}, m)$, то $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к T двусторонне почти всюду:*

$$\left(T_n \xrightarrow{(o)} T\right) \Rightarrow \left(T_n \xrightarrow{\text{д. п. в.}} T\right).$$

Доказательство. Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, $T \in \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)_h$ и $T_n \xrightarrow{(o)} T$. Тогда существуют возрастающая последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)_h$ и убывающая последовательность операторов $\{B_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}(\mathcal{A}, m)_h$ такие, что $A_n \leq \leq T_n \leq B_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$, $\sup\limits_n A_n = \inf\limits_n B_n = T$. Тогда $(A_n - T) \uparrow 0$ и $(B_n - T) \downarrow 0$. Покажем, что $(A_n - T) \xrightarrow{\text{д. п. в.}} 0$ и $(B_n - T) \xrightarrow{\text{д. п. в.}} 0$.

Рассмотрим спектральные проекторы $E_{n,\varepsilon} = \{|B_n - T| \geq \varepsilon\}$ для операторов $|B_n - T|$, соответствующие интервалу (ε, ∞), где $\varepsilon > 0$ — фиксированное число.

Поскольку $B_n - T = (B_n - T)E_{n,\varepsilon} + (B_n - T)E_{n,\varepsilon}^{\perp}$ и $(B_n - T)E_{n,\varepsilon}^{\perp} = = E_{n,\varepsilon}^{\perp}(B_n - T)E_{n,\varepsilon}^{\perp} \geq 0$, то $B_n - T \geq (B_n - T)E_{n,\varepsilon} \geq \varepsilon E_{n,\varepsilon}$. Следовательно, $E_{n,\varepsilon} \leq \leq \frac{1}{\varepsilon}(B_n - T)$.

Далее, так как $(B_n - T) \downarrow 0$, то $(B_n - T) \xrightarrow{(o)} 0$, поэтому $E_{n,\varepsilon} \xrightarrow{(o)} 0$ и $E_{n,\varepsilon}^{\perp} \xrightarrow{(o)} I$. Кроме того, $\left\| E_{n,\varepsilon}^{\perp}(B_n - T)E_{n,\varepsilon}^{\perp} \right\| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

След m — нормальный, поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} m\left(E_{n,\varepsilon}^{\perp}\right) = m(I) = 1$. Значит, для каждого $k \in \mathbb{N}$ существует номер N_k такой, что $m\left(E_{N_k,\varepsilon}^{\perp}\right) > 1 - \frac{1}{2^k}$. Последовательность N_k можно выбрать возрастающей.

Обозначим $Q_l = \inf\limits_{k \geq l} E_{N_k,\varepsilon}^{\perp}$ и $Q_l^r = \inf\limits_{r \geq k \geq l} E_{N_k,\varepsilon}^{\perp}$. Тогда $\{Q_l\}_{l=1}^{\infty}$ — возрастающая последовательность и $Q_l^r \downarrow Q_l$ при $r \to \infty$. Кроме того, $m\left(Q_l^r\right) > 1 - \sum_{k=l}^{r} \frac{1}{2^k}$. Поэтому $m\left(Q_l^r\right) \to m(Q_l)$ при $r \to \infty$ и

$$m(Q_l) \geq 1 - \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Но $\lim\limits_{l\to\infty} \sum_{k=l}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 0$ как остаток сходящегося ряда. Поэтому

$$\lim_{l\to\infty} m(Q_l) = 1 = m(I),$$

откуда $Q_l \uparrow I$ при $l \to \infty$ и

$$\left\| Q_l\left(B_{N_l} - T\right)Q_l \right\| \leq \left\| E_{N_l,\varepsilon}^{\perp}\left(B_{N_l} - T\right)E_{N_l,\varepsilon}^{\perp} \right\| < \varepsilon.$$

Но $(B_n - T) \downarrow 0$. Поэтому при $n \geq N_l$ $B_n - T \leq B_{N_l} - T$ и

$$\| Q_l (B_n - T) Q_l \| \leq \left\| Q_l\left(B_{N_l} - T\right)Q_l \right\| < \varepsilon.$$

Обозначим через P_n проекторы

$$P_n = \begin{cases} 0, & n < N_1; \\ Q_l, & N_l \leq n < N_{l+1}. \end{cases}$$

Тогда $P_n \uparrow I$ и $\| P_n(B_n - T)P_n \| < \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем, что $(B_n - T) \xrightarrow{\text{д. п. в.}} 0$.

Рассуждая аналогично, для последовательности $\{A_n - T\}_{n=1}^{\infty}$ построим такую последовательность проекторов $\{P_n'\}_{n=1}^{\infty}$, что $P_n' \uparrow I$ и $\|P_n'(A_n - T)P_n'\| < \varepsilon$, и получим, что $(A_n - T) \overset{\text{д. п. в.}}{\to} 0$.

Обозначим $F_n = P_n \wedge P_n'$. Ясно, что $F_n \uparrow I$, $\|F_n(B_n - T)F_n\| < \varepsilon$ и $\|F_n(A_n - T)F_n\| < \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Наконец, так как $A_n - T \le T_n - T \le B_n - T$, то

$$\|F_n(T_n - T)F_n\| \le \max\{\|F_n(B_n - T)F_n\|, \|F_n(A_n - T)F_n\|\} < \varepsilon.$$

Таким образом, $T_n \overset{\text{д. п. в.}}{\to} T$.

Теорема доказана.

В следующей теореме для конечных алгебр фон Неймана типа II приводится конструкция (o)-сходящейся последовательности измеримых операторов, которая не является сходящейся почти всюду.

Теорема 4. *Пусть $\mathcal{A}$ — конечная алгебра фон Неймана, m — точный нормальный конечный след на $\mathcal{A}$. Следующие условия эквивалентны:*

1) *алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ имеет тип I;*

2) *любая (o)-сходящаяся последовательность в $S_h(\mathcal{A}, m)$ сходится почти всюду.*

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Поскольку имеют место импликации

$$\left(T_n \overset{\text{п. в.}}{\to} T\right) \Rightarrow \left(T_n \overset{(o)}{\to} T\right) \Rightarrow \left(T_n \overset{\text{д. п. в.}}{\to} T\right),$$

а сходимости почти всюду и двусторонняя почти всюду совпадают тогда и только тогда, когда алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ имеет тип I, то (o)-сходимость и сходимость почти всюду совпадают.

2) $\Rightarrow$ 1). Пусть алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ не является алгеброй типа I. Тогда существует такой ненулевой центральный проектор $R \in \mathcal{A}$, что редуцированная алгебра $\mathcal{A}_R = R\mathcal{A}R$ является конечной алгеброй фон Неймана типа II.

Без ограничения общности считаем, что сама алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ типа II. Покажем, что тогда существует такая последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S(\mathcal{A}, m)_h$, что $A_n \overset{(o)}{\to} 0$, но $A_n \overset{\text{п. в.}}{\nrightarrow} 0$.

Рассмотрим такую последовательность $\{E_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, что:

1) $E_m E_n = 0$ при $n \ne m$;

2) $\sum_{k=1}^{\infty} E_k = I$;

3) для любого n найдется набор $\{E_{ni}\}_{i=1}^{2^{n-1}}$ таких проекторов, что $E_{ni}E_{nj} = 0$ при $i \ne j$, $\sum_{i=1}^{2^{n-1}} E_{ni} = E_1$ и $E_{ni} \sim E_n$ $\forall i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$.

Обозначим через V_{ni} частичные изометрии, для которых

$$V_{ni}^* V_{ni} = E_{ni},$$

$$V_{ni} V_{ni}^* = E_n.$$

Пусть теперь $n \ge 2$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}$.

Построим операторы $X_{ni} \in (E_{ni} + E_n)\mathcal{A}(E_{ni} + E_n)$ такие, что

$$E_{ni} X_{ni} E_{ni} = E_{ni},$$
$$E_n X_{ni} E_n = E_n,$$
$$E_{ni} X_{ni} E_n = V_{ni}^*,$$
$$E_n X_{ni} E_{ni} = V_{ni}.$$

Тогда $X_{ni} \geq 0$ и $\| X_{ni} \| \leq \sqrt{2}$.

Положим $X_1 = X_{21}$, $X_2 = X_{22}$, $X_3 = X_{31}$, $X_4 = X_{32}$, $X_5 = X_{33}$, $X_6 = X_{34}, \ldots$.

Поскольку $0 \leq X_n \leq \sqrt{2} I$, то последовательность $B_n = \frac{1}{2^{n+1}}(2 \cdot I + X_n) \downarrow 0$. Действительно,

$$B_n - B_{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}}(2 \cdot I + X_n) - \frac{1}{2^{n+2}}\left(2 \cdot I + X_{n+1}\right) =$$
$$= \frac{1}{2^{n+2}}\left(2 \cdot I + 2 \cdot X_n - X_{n+1}\right) > 0,$$

так как $0 \leq X_{n+1} \leq \sqrt{2} \cdot I < 2 \cdot I$.

Рассмотрим оператор

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n E_n \in \mathcal{S}_+(\mathcal{A}, m),$$

где $\alpha_1 = 1$, $\alpha_n = n \cdot 2^{2^{n+2}}$ при $n \geq 2$.

Определим последовательность операторов $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ следующим образом:

$$A_n = A B_n A \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Так как $B_n \downarrow 0$, то $A_n \downarrow 0$. Следовательно, $A_n \xrightarrow{(o)} 0$.

Покажем, что $A_n \overset{\text{п. в.}}{\not\to} 0$.

Допустим, что это не так, т. е. $A_n \xrightarrow{\text{п. в.}} 0$. Тогда существует такая последовательность проекторов $\{P_l\}_{l=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}_{\mathcal{P}}$, что $P_l \uparrow I$ при $l \to \infty$ и

$$\lim_{n \to \infty} \| A_n P_l \| = 0 \quad \forall\, l \in \mathbb{N}.$$

Тогда $(P_l \wedge E_1) \uparrow E_1$ при $l \to \infty$ [15].

Поэтому существует такой номер l_0, что

$$m\left(P_{l_0} \wedge E_1\right) > \frac{1}{2} m(E_1).$$

Обозначим $E_0 = P_{l_0} \wedge E_1$. Тогда

$$m(E_0) = m(E_0 E_1 E_0) = m\left(E_0 \left(\sum_{i=1}^{2^{n-1}} E_{ni}\right) E_0\right) = \sum_{i=1}^{2^{n-1}} m(E_0 E_{ni} E_0) > \frac{1}{2} m(E_1),$$

и поэтому для любого $n \geq 2$ существует такой индекс i_n, что

$$m(E_0 E_{n i_n} E_0) > \frac{1}{2^n} m(E_1).$$

Пусть $X_{n i_n} = X_{k_n}$. Тогда $\{k_n\}_{n=2}^{\infty}$ — возрастающая последовательность индексов и $k_{n-1} < k_n < 2^{n+1}$.

Рассмотрим соответствующую подпоследовательность $\{B_{k_n}\}_{n=2}^{\infty}$:

$$B_{k_n} = \frac{1}{2^{k_n+1}}\left(2\cdot I + X_{k_n}\right) = \frac{1}{2^{k_n+1}}\left(2\cdot I + X_{ni_n}\right).$$

Поскольку $\lim_{n\to\infty}\|A_n E_0\| = 0$, $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2^{k_n}}A^2 E_0\right\| = 0$ и $A_{k_n} = AB_{k_n}A = \frac{1}{2^{k_n}}A^2 + $ $+ \frac{1}{2^{k_n+1}}AX_{ni_n}A$, то $\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{1}{2^{k_n+1}}AX_{ni_n}AE_0\right\| = 0$. Но

$$AX_{ni_n}A = A\left(E_{ni_n}+E_n\right)X_{ni_n}\left(E_{ni_n}+E_n\right)A = \left(E_{ni_n}+\alpha_n E_n\right)X_{ni_n}\left(E_{ni_n}+\alpha_n E_n\right) =$$

$$= E_{ni_n}X_{ni_n}E_{ni_n} + \alpha_n E_n X_{ni_n}E_{ni_n} + \alpha_n E_{ni_n}X_{ni_n}E_n + \alpha_n^2 E_n X_{ni_n}E_n =$$

$$= E_{ni_n} + \alpha_n E_n V_{ni_n}E_{ni_n} + \alpha_n E_{ni_n}V_{ni_n}^{*}E_n + \alpha_n^2 E_n.$$

Следовательно,

$$AX_{ni_n}AE_0 = E_{ni_n}E_0 + \alpha_n E_n V_{ni_n}E_{ni_n}E_0.$$

Поэтому $\lim_{n\to\infty}\left\|\alpha_n\frac{1}{2^{k_n+1}}E_nV_{ni_n}E_{ni_n}E_0\right\| = 0$. Значит [1, 6],

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\alpha_n\frac{1}{2^{k_n+1}}E_nV_{ni_n}E_{ni_n}E_0\right\|_{L_2(\mathcal{A},m)} = 0.$$

С другой стороны,

$$\left\|\alpha_n\frac{1}{2^{k_n+1}}E_nV_{ni_n}E_{ni_n}E_0\right\|^2_{L_2(\mathcal{A},m)} = \alpha_n^2\frac{1}{2^{2(k_n+1)}}m\left(E_0E_{ni_n}V_{ni_n}^{*}E_nV_{ni_n}E_{ni_n}E_0\right) =$$

$$= \alpha_n^2\frac{1}{2^{2(k_n+1)}}m\left(E_0E_{ni_n}E_0\right) > \alpha_n^2\frac{1}{2^{2(k_n+1)+n}}m(E_1) = \alpha_n^2\frac{1}{2^{2k_n+n+2}}m(E_1) >$$

$$> \alpha_n^2\frac{1}{2^{2^{n+2}+n+2}}m(E_1) = \frac{n^2 2^{2\cdot 2^{n+2}}}{2^{2^{n+2}+n+2}}m(E_1) > n^2 m(E_1).$$

Противоречие показывает, что $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ не сходится к нулю почти всюду.

Таким образом, если алгебра фон Неймана $\mathcal{A}$ не является алгеброй типа I, то (o)-сходимость и сходимость почти всюду не совпадают.

Теорема доказана.

1. *Segal I. E.* A noncommutative extension of abstract integration // Ann. Math. – 1953. – № 57. – P. 401 – 457.
2. *Stinespring W. E.* Integration theorems for gages and duality for unimodular groups // Trans. Amer. Math. Soc. – 1959. – № 90. – P. 15 – 56.
3. *Sankaran S.* Stochastic convergence for operators // Quart. J. Math. – 1964. – **2**, № 15. – P. 97 – 102.
4. *Padmanabhan A. R.* Convergence in measure and related results in finite rings of operators // Trans. Amer. Math. Soc. – 1967. – № 128. – P. 359 – 388.
5. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1973. – № 74. – P. 257 – 268.
6. *Yeadon F. J.* Noncommutative L^p-spaces // Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. – 1975. – № 77. – P. 91 – 102.

7. *Paszkiewicz A.* Convergence almost everywhere in W^*-algebras // Lect. Notes Math. – 1985. – **1136**. – P. 420 – 427.
8. *Paszkiewicz A.* Convergences in W^*-algebras // J. Funct. Anal. – 1986. – **69**. – P. 143 – 154.
9. *Муратов М. А.* Сходимость почти всюду и по мере в кольце измеримых операторов // Мат. анализ и геометрия: Тр. Ташкент. ун-та. – 1980. – С. 47 – 52.
10. *Муратов М. А.* Некоторые вопросы сходимости последовательностей неограниченных операторов, присоединенных к конечной алгебре фон Неймана // Тр. Укр. мат. конгр. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – С. 161 – 175.
11. *Muratov M. A.* Order properties of convergent sequences of unbounded measurable operators affiliated to a finite von Neumann algebra // Meth. Funct. Anal. and Topology. – 2002. – **8**, № 3. – P. 50 – 60.
12. *Чилин В. И.* Топологические O^*-алгебры // Функцион. анализ и его прил. – 1980. – **14**, вып. 1. – С. 87 – 88.
13. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств. – М.: Физматгиз, 1961. – 408 с.
14. *Takesaki M.* Theory of operator algebras, I. – New York: Springer, 1979. – 415 p.
15. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras. – England Abacus Press, 1975. – 478 p.
16. *Fack T., Kosaki H.* Generalized s-numbers of τ-measurable operators // Pacif. J. Math. – 1986. – **123**. – P. 269 – 300.
17. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Д., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры. – Ташкент: Фан, 1983. – 303 с.
18. *Nelson E.* Notes on noncommutative integration // J. Funct. Anal. – 1974. – № 15. – P. 103 – 116.

Получено 20.03.2002