УДК 517.96

С. А. Плакса (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ ОСЦИЛЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ НА СПРЯМЛЯЕМОЙ КРИВОЙ *

We prove generalized Noether theorems for a singular integral equation with the Cauchy kernel on a closed Jordan rectifiable curve in classes of piecewise continuous functions with oscillating-type discontinuities. We obtain results about the normal solvability of operators associated with the equation and acting both into the Banach space and incomplete normalized spaces of piecewise continuous oscillating functions.

Доведено узагальнені теореми Нетера для сингулярного інтегрального рівняння з ядром Коші на замкненій жордановій спрямлюваній кривій у класах кусково-неперервних функцій з розривами типу осциляції. Отримано результати про нормальну розв'язність асоційованих з рівнянням операторів, що діють як у банахово, так і в неповні нормовані простори кусково-неперервних осцилюючих функцій.

Пусть γ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, D^+ и D^- — соответственно внутренняя и внешняя области, ограниченные кривой γ, при этом $0 \in D^+$. Обозначим через $T := \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ фиксированный конечный набор точек кривой γ.

Пусть множество $\mathcal{H}_T^{\pm}$ включает в себя голоморфные в области $D^{\pm}$ функции F (с дополнительным требованием $F(\infty) = 0$ в случае области D^-), которые непрерывно продолжаются на $\gamma \setminus T$ и допускают оценку

$$|F(z)| \le c \sum_{j=1}^{m} \left|z - x_j\right|^{-\nu_F} \quad \forall z \in D^{\pm},$$

где постоянная c не зависит от z, а ν_F — некоторое число из промежутка $[0; 1)$, зависящее от функции F. Обозначим $\mathcal{H}_T := \mathcal{H}_T^+ + \mathcal{H}_T^-$.

Исследуем разрешимость в классе $\mathcal{H}_T$ сингулярного интегрального уравнения

$$(K\varphi)(t) := a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) + (k\varphi)(t) = f(t), \quad t \in \gamma \setminus T, \tag{1}$$

где приведенный сингулярный интеграл Коши $(S\varphi)(t)$ определяется равенством

$$(S\varphi)(t) := \frac{1}{\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\{\tau \in \gamma : |\tau - t| > \varepsilon\}} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(t)}{\tau - t}\, d\tau + \varphi(t),$$

а регулярный интеграл $(k\varphi)(t)$ — равенством

$$(k\varphi)(t) := \int\limits_{\gamma} k(t,\tau)\, \varphi(\tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Классическая теория Ф. Нетера для уравнения (1) построена в гельдеровых пространствах на гладкой кривой γ при слабостепенных особенностях функции $k(t,\tau)$ (см., например, [1, 2]). Естественным обобщением этой теории является теория нетеровых операторов в банаховых пространствах (см., например, [3]). Заметим, что применение последней к уравнению (1) в классе $\mathcal{H}_T$, по-

---

* Выполнена при частичной поддержке Государственной программы Украины № 0102U000917 и Международного научного фонда INTAS (грант 99-00089).

видимому, невозможно, поскольку не известен способ введения в $\mathcal{H}_T$ структуры банахова пространства.

В работах [4, 5] доказаны теоремы об устойчивости нетеровости и индекса операторов в неполных топологических векторных пространствах. При этом, в частности, в работе [5] классический метод Карлемана – Векуа [1, 2], применявшийся ранее для регуляризации уравнения (1), модифицирован на случай операторов, действующих в произвольных векторных пространствах. В работе [6] такая же модификация метода Карлемана – Векуа применена для построения обобщенной теории Нетера для уравнения (1) в неполных подпространствах пространства непрерывных на кривой γ функций.

Ниже аналогичный подход применяется для построения теории Нетера для уравнения (1) в случае, когда функции f и φ непрерывны на $\gamma\setminus T$, а в точках набора T, вообще говоря, не имеют ни конечных, ни бесконечных односторонних пределов, т. е. допускают разрывы типа осцилляции.

Условимся, что всюду в дальнейшем γ удовлетворяет условию

$$\sup_{x\in\gamma} \operatorname{mes}\{t\in\gamma : |t-x|\le\varepsilon\} = O(\varepsilon), \quad \varepsilon\to 0,$$

где mes обозначает линейную меру Лебега на кривой γ, так что мера порции этой кривой в каждом круге с центром в точке кривой соизмерима с радиусом круга.

Предполагаем, что a и b принадлежат классу D_γ функций $g:\gamma\to\mathbb{C}$, модуль непрерывности которых

$$\omega(g,\gamma,y) := \sup_{t_1,t_2\in\gamma,\,|t_1-t_2|\le y} |g(t_1)-g(t_2)|$$

удовлетворяет условию Дини

$$\int_0^1 \frac{\omega(g,\gamma,y)}{y}\,dy < \infty,$$

при этом для всех $t\in\gamma$ выполняется неравенство $a^2(t)-b^2(t)\neq 0$.

В работе [6] при таких же предположениях о кривой γ и функциях a и b теория Ф. Нетера для уравнения (1) обобщена на случай, когда $T=\varnothing$ и функция $k(t,\tau)$ допускает как больший, чем слабостепенной, рост при $|t-\tau|\to 0$, так и осциллирующие разрывы по „диагонали" $t=\tau$.

В данной работе функция $k(t,\tau)$, помимо особенностей указанного вида, допускает также осциллирующие разрывы по „вертикалям" $t=x_j$, $j=0,1,\ldots$ $\ldots, m$. Кроме того, по сравнению с работой [6] существенно расширен класс функций f при доказательстве основных результатов обобщенной теории Нетера для уравнения (1). При этом доказана нетеровость ассоциированного с уравнением (1) интегрального оператора, действующего как в банахово, так и в неполные нормированные пространства кусочно-непрерывных осциллирующих функций.

1. Кусочно-непрерывная краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом. Рассмотрим сначала *краевую задачу Римана* об отыскании функций $\Phi^+\in\mathcal{H}_T^+$ и $\Phi^-\in\mathcal{H}_T^-$, удовлетворяющих условию граничного сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \forall\, t\in\gamma\setminus T, \tag{3}$$

где G и g — заданные на кривой γ функции.

По сравнению с соответствующими результатами работ [7, 8] в следующей теореме расширен класс функций g, для которых разрешимость краевой задачи Римана с коэффициентом $G \in \mathcal{D}_\gamma$ имеет классический вид [1, 2] и зависит от числа

$$\kappa := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma d\ln G(t).$$

В этом случае каноническая функция задачи X определяется равенствами

$$X^+(z) := \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\ln(\tau^{-\kappa}G(\tau))}{\tau - z}\,d\tau\right) \quad \forall z \in D^+,$$

$$X^-(z) := z^{-\kappa}\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\ln(\tau^{-\kappa}G(\tau))}{\tau - z}\,d\tau\right) \quad \forall z \in D^-,$$

при этом мы сохраняем те же обозначения и для непрерывных продолжений функций X^+ и X^- на γ.

Теорема 1. *Пусть $G \in \mathcal{D}_\gamma$ и $G(t) \neq 0$ для всех $t \in \gamma$, а функция g принадлежит классу $\mathcal{H}_T$. Тогда при $\kappa \geq 0$ краевая задача Римана разрешима, а при $\kappa < 0$ для ее разрешимости необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int_\gamma \frac{g(t)}{X^+(t)}\,t^{s-1}\,dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, -\kappa.$$

Общее решение задачи имеет вид

$$\Phi^\pm(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z} + X(z)P_{\kappa-1}(z), \quad z \in D^\pm, \tag{4}$$

где $P_{\kappa-1}$ — произвольный многочлен степени не выше $\kappa - 1$ при $\kappa > 0$ и $P_{\kappa-1} \equiv 0$ при $\kappa \leq 0$.

Доказательство. Используя равенство $G(t) = X^+(t)/X^-(t)$ для всех $t \in \gamma$, перепишем условие граничного сопряжения (3) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)} \quad \forall t \in \gamma \setminus T. \tag{5}$$

Покажем теперь, что для всех $t \in \gamma \setminus T$ выполняется равенство

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t), \tag{6}$$

где Ψ^+ и Ψ^- — предельные значения соответственно из областей D^+ и D^- интеграла типа Коши

$$\Psi(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\frac{d\tau}{\tau - z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma.$$

С этой целью используем условие $g \in \mathcal{H}_T$, из которого следует, что функция g представляется в виде $g = g^+ + g^-$, где $g^+ \in \mathcal{H}_T^+$ и $g^- \in \mathcal{H}_T^-$. Поэтому при всех $t \in \gamma \setminus T$ справедливо равенство

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \frac{g^+(t)}{X^+(t)} + \frac{g^-(t)}{G(t)X^-(t)}, \tag{7}$$

где функция $g^+(t)/X^+(t)$ принадлежит классу $\mathcal{H}_T^+$, а функция $g^-(t)/X^-(t)$ голоморфна в D^- и непрерывно продолжается на $\gamma \setminus T$.

Заметим, что для функции $(g^-(t)/X^-(t))\,(G(t))^{-1}$ справедливы аналоги теорем 3 и 5 работы [8]. Поэтому, используя равенство (7) и теорему 2 из [8], получаем равенство (6), из которого следует, что $g(t)/X^+(t) \in \mathcal{H}_T$.

Теперь, использовав равенство (6), перепишем соотношение (5) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t) \quad \forall\, t \in \gamma \backslash T,$$

после чего утверждение теоремы доказывается по стандартной схеме [1, с. 111].

2. Характеристическое сингулярное интегральное уравнение. Рассмотрим теперь характеристическое уравнение

$$(K^0\varphi)(t) := a(t)\varphi(t) + b(t)(S\varphi)(t) = f(t), \quad t \in \gamma \backslash T. \tag{8}$$

В следующей теореме расширен по сравнению с соответствующим результатом работы [8] класс функций f, для которых уравнение (8) разрешимо в классе $\mathcal{H}_T$ в классическом виде [1, 2]. Всюду в дальнейшем

$$\kappa := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma d\ln\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$$

и

$$Z(t) := \big(a(t)-b(t)\big)t^{-\kappa} \times$$
$$\times \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \left(\ln\left(\tau^{-\kappa}\frac{a(\tau)-b(\tau)}{a(\tau)+b(\tau)}\right) - \ln\left(t^{-\kappa}\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right)\right)\frac{d\tau}{\tau-t}\right).$$

Теорема 2. *Пусть* $a, b \in \mathcal{D}_\gamma$ *и* $a^2(t)-b^2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in \gamma$, *а функция* f *принадлежит классу* $\mathcal{H}_T$. *Тогда при* $\kappa \geq 0$ *уравнение* (8) *разрешимо в классе* $\mathcal{H}_T$, *а при* $\kappa < 0$ *для его разрешимости необходимо и достаточно выполнения условий*

$$\int_\gamma \frac{f(t)}{Z(t)}t^{s-1}dt = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, -\kappa.$$

Общее решение уравнения (8) *в классе* $\mathcal{H}_T$ *имеет вид*

$$\varphi(t) = \frac{1}{a^2(t)-b^2(t)}\big(a(t)f(t) - b(t)Z(t)(S\psi_f)(t) + b(t)Z(t)P_{\kappa-1}(t)\big), \tag{9}$$

где $\psi_f(t) := f(t)/Z(t)$, *а* $P_{\kappa-1}$ — *произвольный многочлен степени не выше* $\kappa-1$ *при* $\kappa>0$ *и* $P_{\kappa-1} \equiv 0$ *при* $\kappa \leq 0$.

Доказательство. Используем классический метод [1, 2] сведения характеристического уравнения (8) к краевой задаче Римана, коэффициент G и свободный член g которой задаются равенствами

$$G(t) = \frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}, \qquad g(t) = \frac{f(t)}{a(t)+b(t)}.$$

Заметим, что $g \in \mathcal{H}_T$. Это устанавливается так же, как при доказательстве теоремы 1 показано, что $g(t)/X^+(t) \in \mathcal{H}_T$.

Теперь для завершения доказательства остается воспользоваться теоремой 1 и формулой $\varphi = \Phi^+ - \Phi^-$, выражающей решение уравнения (8) через решение соответствующей краевой задачи Римана.

3. Устойчивость нетеровости сингулярного интегрального оператора с ограниченным обобщенно обратным оператором. Обозначим через $\dim Y$ размерность векторного пространства Y, а через $Y^\#$ — *алгебраически сопря-*

женное к Y пространство, т. е. множество всех линейных функционалов на Y. В случае, когда Y — топологическое векторное пространство, через Y^* обозначим *топологически сопряженное* к Y пространство, т. е. множество всех непрерывных линейных функционалов на Y.

Пусть X и Y — произвольные векторные пространства и A — линейный оператор, действующий из X в Y. Введем в рассмотрение *образ* $A(X) := \{y = Ax : x \in X\}$ оператора A и *дефект* $\operatorname{def} A$ оператора A, определяемый как размерность фактор-пространства $Y/A(X)$. Оператор $A^{\#} : Y^{\#} \to X^{\#}$, определяемый равенством

$$A^{\#}u(x) := u(Ax) \quad \forall\, u \in Y^{\#} \quad \forall\, x \in X,$$

назовем *алгебраически сопряженным* к оператору A.

В случае, когда Y — топологическое векторное пространство, оператор $A : X \to Y$, образ которого $A(X)$ замкнут в Y, а ядро $\operatorname{Ker} A$ и фактор-пространство $Y/A(X)$ конечномерны, называется *нетеровым*. При этом *индекс* оператора A определяется равенством $\operatorname{Ind} A := \dim \operatorname{Ker} A - \operatorname{def} A$.

Отметим, что оператор $A : X \to Y$ имеет замкнутый образ и конечный дефект тогда и только тогда, когда он *нормально разрешим* (это означает, что $\operatorname{Ker} A^{\#} \subset Y^*$) и ядро $\operatorname{Ker} A^{\#}$ конечномерно.

Установим теперь достаточные условия нетеровости оператора K, ассоциированного с сингулярным интегральным уравнением (1), в случае, когда характеристический оператор K^0 имеет ограниченный обобщенно обратный оператор.

Условимся, что точки набора T занумерованы в том порядке, в каком они встречаются при положительном обходе кривой γ, начиная от некоторой из них, обозначенной через x_1.

Пусть $\Pi(z) := \prod_{j=1}^{m} (z - x_j)^{\lambda_j}$, где $0 \le \lambda_j < 1$, при этом $\Pi(z)$ понимаем как непрерывную ветвь функции, голоморфной вне кривой, проведенной от точки x_1 сначала вдоль γ в положительном направлении до точки x_m, а затем — в D^- до бесконечности. При $t \in \gamma$ полагаем $\Pi(t) := \lim\limits_{z \to t,\, z \in D^+} \Pi(z)$. Обозначим также $r_t := \frac{1}{4} \min\limits_{x_j \in T} |t - x_j|$ и $\gamma_\delta(T) := \bigcup_{j=1}^{m} \{t \in \gamma : |t - x_j| \le \delta\}$.

Введем в рассмотрение локальный центрированный модуль гладкости первого порядка функции f:

$$\omega_t(f, \gamma, \varepsilon, 2\varepsilon) := \sup_{\tau \in \gamma,\, \varepsilon \le |\tau - t| \le 2\varepsilon} |f(\tau) - f(t)|,$$

который в отличие от классических модулей не является монотонной функцией от ε и поэтому учитывает возможные колебания функции f.

Введем класс $\mathcal{F}_T(\Pi)$ функций f, заданных на $\gamma \setminus T$ и удовлетворяющих соотношению

$$\sup_{t \in \gamma \setminus \gamma_\delta(T)} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega_t(f, \gamma, y, 2y)}{y}\, dy \to 0, \quad \varepsilon \to 0, \quad \forall\, \delta > 0,$$

а также неравенствам

$$|f(t)| \le c\, |\Pi(t)|^{-1} \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T,$$

$$\int_0^{r_t} \frac{\omega_t(f, \gamma, y, 2y)}{y}\, dy \le c\, |\Pi(t)|^{-1} \quad \forall\, t \in \gamma \setminus T,$$

в которых постоянная c не зависит от t. Функции класса $\mathcal{F}_T(\Pi)$ непрерывны на $\gamma \setminus T$, а в точках набора T, вообще говоря, не имеют ни конечных, ни бесконечных односторонних пределов, т. е. допускают разрывы типа осцилляции.

Обозначим через L_∞ банахово пространство существенно ограниченных на γ функций h с нормой $\|h\|_{L_\infty} := \operatorname{ess\,sup}_{t\in\gamma} |h(t)|$. Введением нормы

$$\|f\|_{\mathcal{F}_T(\Pi)} := \|\Pi(t)f(t)\|_{L_\infty} + \sup_{t\in\gamma\setminus\gamma_\delta(T)} \left(|\Pi(t)| \int_0^{r_t} \frac{\omega_t(f,\gamma,y,2y)}{y}\,dy \right) \quad \forall f \in \mathcal{F}_T(\Pi)$$

класс $\mathcal{F}_T(\Pi)$ также наделяется структурой банахова пространства.

Рассмотрим ассоциированный с уравнением (8) оператор $K^0\colon D(\mathcal{F}_T(\Pi)) \to \mathcal{F}_T(\Pi)$, где область определения $D(\mathcal{F}_T(\Pi)) := \{\varphi \in \mathcal{H}_T\colon K^0\varphi \in \mathcal{F}_T(\Pi)\}$ является неполным нормированным пространством с нормой $\|\varphi\|_{D(\mathcal{F}_T(\Pi))} := \|\Pi(t)\varphi(t)\|_{L_\infty}$. Из теоремы 2 следует, что оператор K^0 нетеров и $\operatorname{Ind} K^0 = \kappa$.

Обобщенно обратный оператор $K^0_{-1}\colon \mathcal{F}_T(\Pi) \to D(\mathcal{F}_T(\Pi))$, определяемый равенством

$$(K^0_{-1}f)(t) := \frac{1}{a^2(t)-b^2(t)}\big(a(t)f(t) - b(t)Z(t)(S\psi_f)(t)\big),$$

ограничен. Это устанавливается аналогично теореме 4 из [8].

Введем теперь в рассмотрение интегральный с весом $|\Pi(\tau)|^{-1}$ центрированный модуль непрерывности функции $k(t,\tau)$ по первой переменной:

$$\omega_t^{1,0}(k,\Pi^{-1},y) := \sup_{\xi:|\xi-t|\le y,\,\xi\in\gamma} \int_\gamma \frac{|k(\xi,\tau)-k(t,\tau)|}{|\Pi(\tau)|}|d\tau|.$$

В случае, когда набор T содержит не менее двух точек, полагаем $r_T := \frac{1}{2}\min_{x_l,x_j\in T}|x_l - x_j|$. Если же T состоит из единственной точки x_1, то обозначим $r_T := \frac{1}{2}\max_{t\in\gamma}|t-x_1|$.

В следующей теореме приведены условия, достаточные для устойчивости нетеровости и индекса при возмущении оператора K^0 оператором (2).

Теорема 3. *Пусть $a, b \in \mathcal{D}_\gamma$ и $a^2(t)-b^2(t)\ne 0$ для всех $t\in\gamma$, а функция $k(t,\tau)$ удовлетворяет условиям*

$$\sup_{t\in\gamma\setminus\gamma_\delta(T)} \int_0^\varepsilon \frac{\omega_t^{1,0}(k,\Pi^{-1},y)}{y}\,dy \to 0, \quad \varepsilon\to 0, \quad \forall\,\delta>0, \tag{10}$$

$$|\Pi(t)| \int_0^{r_t} \frac{\omega_t^{1,0}(k,\Pi^{-1},y)}{y}\,dy \to 0, \quad t\to x_j, \quad \forall\, x_j\in T, \tag{11}$$

и, кроме того, существует суммируемая на γ с весом $|\Pi(\tau)|^{-1}$ функция $k(\tau)$ такая, что при $\lambda_j>0$ выполняется соотношение

$$|\Pi(t)| \int_\gamma \frac{|k(t,\tau)-k(\tau)|}{|\Pi(\tau)|}|d\tau| \to 0, \quad t\to x_j, \tag{12}$$

а при $\lambda_j = 0$ — соотношение

$$\int_0^{r_T}\left(\sup_{t\in\gamma_y(x_j)\setminus T}\int_\gamma\frac{|k(t,\tau)-k(\tau)|}{|\Pi(\tau)|}|d\tau|\right)\frac{dy}{y}<\infty. \tag{13}$$

Тогда оператор $K\colon D(\mathcal{F}_T(\Pi))\to\mathcal{F}_T(\Pi)$ *нетеров и* $\operatorname{Ind}K=\operatorname{Ind}K^0=\kappa$.

Доказательство. Покажем, что при условиях теоремы выполняется включение

$$(K_{-1}^0)^\#\Big(\operatorname{Ker}(I+K_{-1}^0k)^\#+(I+K_{-1}^0k)_{-1}^\#k^\#\big(\operatorname{Ker}(K^0)^\#\big)\Big)\subset(\mathcal{F}_T(\Pi))^*. \tag{14}$$

С этой целью, прежде всего, заметим, что поскольку оператор K^0: $D(\mathcal{F}_T(\Pi))\to\mathcal{F}_T(\Pi)$ нетеров, то $\operatorname{Ker}(K^0)^\#\subset(\mathcal{F}_T(\Pi))^*$.

Рассмотрим теперь оператор $k\colon L_\infty(\Pi)\to\mathcal{F}_T(\Pi)$, где $L_\infty(\Pi)$ — пространство функций φ, для которых $\Pi(t)\varphi(t)\in L_\infty$ и норма определяется равенством

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Pi)}:=\|\Pi(t)\varphi(t)\|_{L_\infty}.$$

Вследствие ограниченности оператора k заключаем, что

$$k^\#\big(\operatorname{Ker}(K^0)^\#\big)\subset(L_\infty(\Pi))^*.$$

Далее замечаем, что поскольку пространство $L_\infty(\Pi)$ изоморфно банаховому пространству L_∞ и оператор $K_{-1}^0k\colon L_\infty(\Pi)\to\mathcal{F}_T(\Pi)$ компактен, то оператор $I+K_{-1}^0k$ нормально разрешим, а оператор $(I+K_{-1}^0k)_{-1}$ ограничен в пространстве $L_\infty(\Pi)$. Поэтому

$$\Big(\operatorname{Ker}(I+K_{-1}^0k)^\#+(I+K_{-1}^0k)_{-1}^\#k^\#\big(\operatorname{Ker}(K^0)^\#\big)\Big)\subset(L_\infty(\Pi))^*. \tag{15}$$

Наконец, из включения (15) и ограниченности оператора K_{-1}^0 следует выполнимость включения (14). Теперь доказательство завершается применением теоремы 8 из [5].

Заметим, что при условиях теоремы 3 оператор $k\colon D(\mathcal{F}_T(\Pi))\to\mathcal{F}_T(\Pi)$, вообще говоря, некомпактен.

4. Полное сингулярное интегральное уравнение. Для получения достаточных условий нетеровости оператора K в случае, когда оператор K_{-1}^0 не является ограниченным, обобщим теорию Нетера [1, 2] классической разрешимости *полного* сингулярного интегрального уравнения (1).

Чтобы описать класс, которому в дальнейшем принадлежит функция $k(t,\tau)$, введем в рассмотрение интегральный модуль непрерывности этой функции по второй переменной

$$\omega^{0,1}(k,\varepsilon):=\sup_{\tau_1,\tau_2\in\gamma,\,|\tau_1-\tau_2|\le\varepsilon}\int_\gamma|k(t,\tau_1)-k(t,\tau_2)||dt|$$

и обозначения $\gamma_\varepsilon(\tau):=\{\xi\in\gamma\colon|\xi-\tau|\le\varepsilon\}$, $T_\tau:=T\cup\{\tau\}$ и $\rho(t,T_\tau):=$ $:=\min_{x\in T_\tau}|t-x|$. При этом, рассматривая $k(t,\tau)$ как функцию первой переменной, полагаем $k_\tau(t):=k(t,\tau)$ и используем обозначения

$$M_{\tau,\varepsilon}(k_\tau,\gamma,y):=\sup_{\xi\in\gamma_\varepsilon(\tau)\setminus\gamma_y(\tau)}|k_\tau(\xi)|,\quad M_{T_\tau}(k_\tau,\gamma,y):=\sup_{\xi\in\gamma_\varepsilon(T_\tau)\setminus\gamma_y(T_\tau)}|k_\tau(\xi)|.$$

Введем класс $\mathcal{K}_T(\Pi)$ непрерывных на

$$(\gamma\times\gamma\setminus\{(t,\tau)\in\gamma\times\gamma\colon t=\tau\})\setminus\left(\bigcup_{j=1}^m\{(t,\tau)\in\gamma\times\gamma\colon t=x_j\}\right)$$

функций, удовлетворяющих условиям (10) – (13) и дополнительным условиям поточечной сходимости по первой переменной:

$$\int_0^{\varepsilon} \sup_{\tau:\tau\in\gamma,\, x\le|\tau-t|\le 2x} \int_0^{\varepsilon} \frac{M_{\tau,3\varepsilon}(k_\tau,\gamma,y)}{y+x}\,dy\,dx \to 0, \quad \varepsilon\to 0, \quad \forall t\in\gamma\setminus T,$$

$$\int_0^{\varepsilon} \sup_{\tau:\tau\in\gamma,\, x\le|\tau-t|\le 2x} \int_0^{x/4} \frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}\,dy\,dx \; +$$

$$+ \int_{4\varepsilon}^{1} \sup_{\tau:\tau\in\gamma,\, x\le|\tau-t|\le 2x} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}\,dy\,dx \to 0, \quad \varepsilon\to 0, \quad \forall t\in\gamma\setminus T,$$

а также следующим условиям равномерной сходимости по второй переменной:

$$\omega^{0,1}(k,\varepsilon) \to 0, \quad \varepsilon\to 0,$$

$$\sup_{\tau\in\gamma} \int_0^{\varepsilon}\int_0^{\varepsilon} \frac{M_{T_\tau,3\varepsilon}(k_\tau,\gamma,y)}{y+x}\,dy\,dx \to 0, \quad \varepsilon\to 0,$$

$$\sup_{\tau\in\gamma}\left(\int_0^{\varepsilon} \sup_{t:t\in\gamma,\, x\le\rho(t,T_\tau)\le 2x} \int_0^{x/4} \frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}\,dy\,dx \; + \right.$$

$$\left. + \int_{4\varepsilon}^{1} \sup_{t:t\in\gamma,\, x\le\rho(t,T_\tau)\le 2x} \int_0^{\varepsilon} \frac{\omega_t(k_\tau,\gamma,y,2y)}{y}\,dy\,dx \right) \to 0, \quad \varepsilon\to 0.$$

В классе $\mathcal{K}_T(\Pi)$ содержатся функции $k(t,\tau)$ из классической теории [1, 2] уравнения (1), имеющие слабостепенную особенность по „диагонали" $t = \tau$. В то же время функции класса $\mathcal{K}_T(\Pi)$ допускают больший, чем слабостепенной, рост при $|t-\tau|\to 0$. Например, такой является функция $k(t,\tau) = |t-\tau|^{-1}\left(\ln\left(2(\operatorname{mes}\gamma)|t-\tau|^{-1}\right)\right)^{-\alpha-1}$ при $\alpha>0$. Кроме того, в классе $\mathcal{K}_T(\Pi)$ имеются также функции $k(t,\tau)$ с осциллирующими разрывами как по „диагонали" $t=\tau$, так и по „вертикалям" $t = x_j\in T$. Примером такой функции является

$$k(t,\tau) = |t-\tau|^{-\lambda}\sin|t-\tau|^{-\beta} + |t-x_1|^{-\lambda}\sin|t-x_1|^{-\beta}$$

при $\beta>0$, $\lambda>0$ и $\beta+\lambda<\lambda_1$.

Заметим еще, что класс $\mathcal{K}_T(\Pi)$ и введенный в работе [6] класс $\mathcal{K}$ имеют непустое пересечение, но при этом ни один из них не включает в себя второй класс как подкласс.

Рассмотрим уравнение (1) в классе $\mathcal{H}_T$, предполагая, что a, $b\in\mathcal{D}_\gamma$ и $a^2(t)-b^2(t)\ne 0$ для всех $t\in\gamma$, а функция $k(t,\tau)$ принадлежит классу $\mathcal{K}_T(\Pi)$. Осуществим регуляризацию уравнения (1) методом Карлемана – Векуа, не требующим, вообще говоря, даже топологизации класса $\mathcal{H}_T$. Поскольку функция $k\varphi$ принадлежит классу $\mathcal{F}_T(\Pi)$ при всех $\varphi\in\mathcal{H}_T$, то, применяя теорему 2 к уравнению $K^0\varphi = f - k\varphi$, получаем следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть a, $b\in\mathcal{D}_\gamma$ и $a^2(t)-b^2(t)\ne 0$ для всех $t\in\gamma$. Пусть, кроме того, $f\in\mathcal{H}_T$ и $k(t,\tau)\in\mathcal{K}_T(\Pi)$. Тогда при $\kappa\ge 0$ уравнение* (1) *эквивалентно (в смысле нахождения решений класса $\mathcal{H}_T$) уравнению*

$$\varphi(t) + (K^0_{-1}k\varphi)(t) = f_0(t) \quad \forall t\in\gamma\setminus T, \tag{16}$$

где через $f_0(x)$ *обозначена правая часть равенства* (9), *а при* $\kappa < 0$ *оно эквивалентно (в том же смысле) системе, включающей в себя уравнение* (16) *и уравнения*

$$\int\limits_\gamma \left(\int\limits_\gamma \frac{t^j k(t,\tau)}{Z(t)} dt \right) \varphi(\tau) d\tau = \int\limits_\gamma \frac{t^j f(t)}{Z(t)} dt, \quad j = 0, 1, \ldots, -\kappa - 1.$$

Введем в рассмотрение *союзные* операторы к операторам K^0, k, K соответственно:

$$(K^{0\prime}\psi)(t) := a(t)\psi(t) - (S(b\psi))(t),$$

$$(k'\psi)(t) := \int\limits_\gamma k(\tau, t)\psi(\tau)d\tau, \quad (K'\psi)(t) := (K^{0\prime}\psi)(t) + (k'\psi)(t).$$

Построение обобщенной теории Нетера для уравнения (1) в классе $\mathcal{H}_T$ опирается также на следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть выполняются условия леммы* 1. *Тогда уравнение* (16) *разрешимо в классе* $\mathcal{H}_T$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int\limits_\gamma f_0(t)\omega(t)dt = 0 \quad \forall \omega \in L_\infty : \omega(t) + ((K_{-1}^0 k)'\omega)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0,$$

при этом

$$\dim\left\{\varphi \in \mathcal{H}_T : \varphi(t) + (K_{-1}^0 k\varphi)(t) = 0 \ \ \forall t \in \gamma \setminus T\right\} =$$
$$= \dim\left\{\omega \in L_\infty : \omega(t) + ((K_{-1}^0 k)'\omega)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0\right\} < \infty.$$

Доказательство. Используя теорему 1 из [9], приводим уравнение (16) к виду

$$\varphi_0(t) + (B\varphi_0)(t) = f_1(t) \quad \forall t \in \gamma \setminus T,$$

где $\varphi_0(t) := \Pi(t)\varphi(t)$, $f_1(t) := \Pi(t) f_0(t)$,

$$(B\varphi_0)(t) := \int\limits_\gamma \frac{\Pi(t)}{\Pi(\tau)} \left(\frac{b(t)Z(t)k(t,\tau)}{\pi i(a^2(t) - b^2(t))} \int\limits_\gamma \left(\frac{1}{Z(\xi)} - \frac{1}{Z(t)} \right) \frac{d\xi}{\xi - t} - \right.$$
$$\left. - \frac{b(t)Z(t)}{\pi i(a^2(t) - b^2(t))} \int\limits_\gamma \frac{k(\xi,\tau) - k(t,\tau)}{Z(\xi)(\xi - t)} d\xi + \frac{k(t,\tau)}{a(t) + b(t)} \right) \varphi_0(\tau) d\tau.$$

С использованием теорем 2 и 3 из [9] легко устанавливается, что оператор B отображает каждое ограниченное в пространстве L_∞ множество в множество равностепенно непрерывных и равномерно ограниченных функций. Следовательно, оператор B компактен в пространстве L_∞.

Кроме того, выполняя такие же выкладки, как при доказательстве теоремы 2 из [6], и используя при этом лемму 3 из [9], устанавливаем, что оператор $(K_{-1}^0 k)'$ также компактен в L_∞.

Теперь доказательство завершается по схеме, изложенной в [2, с. 331 – 333].

Пусть $\widetilde{L_\infty} := \bigcap\limits_{1<p<\infty} L_p$, где L_p — множество заданных на γ и суммируемых в степени p функций.

С использованием лемм 1 и 2, а также теоремы 4 из [9], по схеме доказательства теоремы 4 из [6] доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $a, b \in \mathcal{D}_\gamma$ *и* $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in \gamma$. *Пусть, кроме того,* $f \in \mathcal{H}_T$ *и* $k(t,\tau) \in \mathcal{K}_T(\Pi)$. *Тогда справедливы утверждения:*

1) *размерность* $m := \dim\{\varphi \in \mathcal{H}_T : (K\varphi)(t) = 0 \ \forall t \in \gamma \setminus T\}$ *конечна;*

2) *уравнение* (1) *разрешимо в классе* $\mathcal{H}_T$ *тогда и только тогда, когда*

$$\int_\gamma f(t)\psi(t)dt = 0 \quad \forall \psi \in \widetilde{L_\infty} : (K'\psi)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0; \tag{17}$$

размерность $m' := \dim\left\{\psi \in \widetilde{L_\infty} : (K'\psi)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0\right\}$ *конечна;*

3) $m - m' = \kappa$.

Теорема 4 является обобщением классических теорем Ф. Нетера [1, 2]. Утверждения 1 – 3 этой теоремы доказаны также в теореме 4 из [6], но в случае, когда $T = \varnothing$. Заметим, что формулировка и доказательство теоремы 4 не требуют даже топологизации класса $\mathcal{H}_T$.

5. Устойчивость нетеровости сингулярного интегрального оператора с неограниченным обобщенно обратным оператором. Установим достаточные условия нетеровости оператора K, ассоциированного с сингулярным интегральным уравнением (1), в случае, когда характеристический оператор K^0 не имеет ограниченного обобщенно обратного оператора. При этом нетеровость оператора K, действующего в неполных нормированных пространствах осциллирующих функций, устанавливается, опираясь на обобщенную классическую разрешимость уравнения (1), установленную в теореме 4.

Через $\mathcal{H}_T^{\pm}(\Pi)$ обозначим множество функций $F \in \mathcal{H}_T^{\pm}$, допускающих оценку

$$|F(z)| \leq c|\Pi(z)|^{-1} \quad \forall z \in D^{\pm},$$

в которой постоянная c не зависит от z. Обозначим также $\mathcal{H}_T(\Pi) := \mathcal{H}_T^{+}(\Pi) + \mathcal{H}_T^{-}(\Pi)$. Введением нормы

$$\|\varphi\|_{\mathcal{H}_T(\Pi)} := \|\Pi(t)\varphi(t)\|_{L_\infty} \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_T(\Pi)$$

превратим $\mathcal{H}_T(\Pi)$ в неполное нормированное пространство.

Из теоремы 2 следует, что оператор $K^0 : \mathcal{H}_T(\Pi) \to \mathcal{H}_T(\Pi)$ нетеров и $\operatorname{Ind} K^0 = \kappa$. В то же время оператор $K_{-1}^0 : \mathcal{H}_T(\Pi) \to \mathcal{H}_T(\Pi)$ является неограниченным.

Заметим, что каждой функции $\psi \in \widetilde{L_\infty}$ соответствует линейный непрерывный на пространстве $\mathcal{H}_T(\Pi)$ функционал

$$u_\psi(\varphi) := \int_\gamma \varphi(t)\psi(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_T(\Pi). \tag{18}$$

Множество функционалов указанного вида обозначим $(\widetilde{L_\infty})^*$, при этом $(\widetilde{L_\infty})^*$ является подпространством пространства $(\mathcal{H}_T(\Pi))^*$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $a, b \in \mathcal{D}_\gamma$ *и* $a^2(t) - b^2(t) \neq 0$ *для всех* $t \in \gamma$, *а функция* $k(t,\tau)$ *принадлежит классу* $\mathcal{K}_T(\Pi)$. *Тогда справедливы утверждения:*

1) *оператор* $K : \mathcal{H}_T(\Pi) \to \mathcal{H}_T(\Pi)$ *нетеров и* $\operatorname{Ind} K = \operatorname{Ind} K^0 = \kappa$;

2) $\operatorname{Ker} K^\# \subset (\widetilde{L_\infty})^*$.

Доказательство. Заметим, что функционал (18), где $\psi \in \widetilde{L_\infty}$, оператором $K^\#$ переводится в функционал такого же вида, поскольку справедливы равенства

$$(K^\# u_\psi)(\varphi) = u_\psi(K\varphi) = \int_\gamma (K\varphi)(t)\psi(t)dt = \int_\gamma \varphi(t)(K'\psi)(t)dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{H}_T(\Pi).$$

При этом из указанных равенств следует, что ядро сужения оператора $K^\#$ на пространство $(\widetilde{L_\infty})^\bullet$ состоит из функционалов вида (18), где $\psi \in \widetilde{L_\infty}$ и $(K'\psi)(t) \overset{\text{п.в.}}{=} 0$. Более того, учитывая также, что в соответствии с теоремой 4 условия (17) являются достаточными для разрешимости уравнения (1) в пространстве $\mathcal{H}_T(\Pi)$, заключаем, что $\operatorname{Ker} K^\# \subset (\widetilde{L_\infty})^\bullet$.

Теперь утверждение теоремы является следствием теоремы 4.

Рассмотрим еще сужения оператора K на подпространства пространства $\mathcal{H}_T(\Pi)$, состоящие из функций специального вида.

Обозначим через $\mathcal{F}^{n,k}(\Pi)$ класс функций f, представимых в виде

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} L_j(t)d_j^+(t) + \sum_{j=1}^{k} M_j(t)c_j^+(t) + M_0(t), \tag{19}$$

где $M_0, M_j \in \mathcal{F}_T(\Pi)$, $L_j \in \mathcal{D}_\gamma$, $d_j^+ \in \mathcal{H}_T^+(\Pi)$, а функция c_j^+ голоморфна в области D^+ и непрерывна в ее замыкании. Обозначим также

$$\mathcal{F}(\Pi) := \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}^{n,k}(\Pi).$$

Если $\mathcal{H}_T^1(\Pi)$ — векторное подпространство пространства $\mathcal{H}_T(\Pi)$, то рассматривая ассоциированный с уравнением (1) оператор $K: D(\mathcal{H}_T^1(\Pi)) \to \to \mathcal{H}_T^1(\Pi)$, полагаем, что его областью определения является множество

$$D(\mathcal{H}_T^1(\Pi)) = \left\{\varphi \in \mathcal{H}_T : (K\varphi)(x) \in \mathcal{H}_T^1(\Pi)\right\}.$$

В качестве $\mathcal{H}_T^1(\Pi)$ будем рассматривать, в частности, пространства $\mathcal{F}_{L_n, L_{n-1}, \ldots, L_1, M_k, M_{k-1}, \ldots, M_1}(\Pi)$ функций $f \in \mathcal{F}^{n,k}(\Pi)$ вида (19) с фиксированными функциями L_n, $L_{n-1}, \ldots, L_1$, M_k, $M_{k-1}, \ldots, M_1$, а также пространства $\mathcal{F}_{L_n, d_{n-1}^+, \ldots, d_1^+, c_k^+, c_{k-1}^+, \ldots, c_1^+}(\Pi)$ функций $f \in \mathcal{F}^{n,k}(\Pi)$ вида (19) с фиксированными функциями L_n, $d_{n-1}^+, \ldots, d_1^+$, c_k^+, $c_{k-1}^+, \ldots, c_1^+$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы 5 справедливо равенство

$$D\left(\mathcal{F}_{b, L_{n-1}, \ldots, L_1, M_k, M_{k-1}, \ldots, M_1}(\Pi)\right) = \mathcal{F}_{\frac{b}{a-b}, \frac{L_{n-1}}{a-b}, \ldots, \frac{L_1}{a-b}, \frac{M_k}{a-b}, \frac{M_{k-1}}{a-b}, \ldots, \frac{M_1}{a-b}}(\Pi). \tag{20}$$

С этой целью введем в рассмотрение интеграл типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau, \quad z \in \mathbb{C}\setminus\gamma,$$

и, использовав формулу Сохоцкого для его предельных значений $\Phi^+(t)$ на $\gamma\setminus T$ при стремлении $z \to t$ из области D^+, получим равенство

$$(S\varphi)(t) = 2\Phi^+(t) - \varphi(t) \quad \forall t \in \gamma\setminus T,$$

с учетом которого уравнение (1) представим в виде

$$(K\varphi)(t) \equiv (a(t)-b(t))\varphi(t) + 2b(t)\Phi^+(t) + (k\varphi)(t) = f(t), \quad t \in \gamma \setminus T. \quad (21)$$

Теперь, используя представление оператора K из (21), получаем включение

$$K\left(\mathcal{F}_{\frac{b}{a-b},\frac{L_{n-1}}{a-b},\ldots,\frac{L_1}{a-b},\frac{M_k}{a-b},\frac{M_{k-1}}{a-b},\ldots,\frac{M_1}{a-b}}(\Pi)\right) \subset \mathcal{F}_{b,L_{n-1},\ldots,L_1,M_k,M_{k-1},\ldots,M_1}(\Pi),$$

из которого следует, что

$$\mathcal{F}_{\frac{b}{a-b},\frac{L_{n-1}}{a-b},\ldots,\frac{L_1}{a-b},\frac{M_k}{a-b},\frac{M_{k-1}}{a-b},\ldots,\frac{M_1}{a-b}}(\Pi) \subset D\left(\mathcal{F}_{b,L_{n-1},\ldots,L_1,M_k,M_{k-1},\ldots,M_1}(\Pi)\right).$$

В то же время из (21) получаем равенство

$$\varphi(t) = \frac{f(t)}{a(t)-b(t)} - \frac{2b(t)}{a(t)-b(t)}\Phi^+(t) - \frac{(k\varphi)(t)}{a(t)-b(t)}, \quad t \in \gamma \setminus T,$$

из которого следует, что

$$D\left(\mathcal{F}_{b,L_{n-1},\ldots,L_1,M_k,M_{k-1},\ldots,M_1}(\Pi)\right) \subset \mathcal{F}_{\frac{b}{a-b},\frac{L_{n-1}}{a-b},\ldots,\frac{L_1}{a-b},\frac{M_k}{a-b},\frac{M_{k-1}}{a-b},\ldots,\frac{M_1}{a-b}}(\Pi).$$

Таким образом, равенство (20) доказано.

Аналогично устанавливается, что при выполнении условий теоремы 5 справедливы равенства

$$D\left(\mathcal{F}_{b,d^+_{n-1},\ldots,d^+_1,c^+_k,c^+_{k-1},\ldots,c^+_1}(\Pi)\right) = \mathcal{F}_{\frac{b}{a-b},d^+_{n-1},\ldots,d^+_1,c^+_k,c^+_{k-1},\ldots,c^+_1}(\Pi) \quad \text{и} \quad D(\mathcal{F}(\Pi)) = \mathcal{F}(\Pi).$$

Теперь аналогично теореме 5 доказывается следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть выполняются условия теоремы 5 и, кроме того, выполнено одно из следующих условий*:

$$\mathcal{H}^1_T(\Pi) = \mathcal{F}_T(\Pi), \quad \textit{или} \quad \mathcal{H}^1_T(\Pi) = \mathcal{F}_{b,L_{n-1},\ldots,L_1,M_k,M_{k-1},\ldots,M_1}(\Pi), \quad \textit{или же}$$

$$\mathcal{H}^1_T(\Pi) = \mathcal{F}_{b,d^+_{n-1},\ldots,d^+_1,c^+_k,c^+_{k-1},\ldots,c^+_1}(\Pi).$$

Тогда справедливы утверждения:

1) *оператор* $K: D(\mathcal{H}^1_T(\Pi)) \to \mathcal{H}^1_T(\Pi)$ *нетеров и* $\operatorname{Ind} K = \operatorname{Ind} K^0 = \kappa$;

2) $\operatorname{Ker} K^\# \subset (\widetilde{L_\infty})^\bullet$.

1. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. – М.: Наука, 1977. – 640 с.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 511 с.
3. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. – М.: Наука, 1971. – 104 с.
4. *Плакса С. А.* О возмущении полунетеровых операторов в неполных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 2. – С. 270 – 278.
5. *Плакса С. А.* О возмущении полунетеровых операторов в неполных пространствах. II // Там же. – № 3. – С. 398 – 402.
6. *Плакса С. А.* О нетеровости сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на спрямляемой кривой // Там же. – № 10. – С. 1379 – 1389.
7. *Бабаев А. А., Салаев В. В.* Краевые задачи и сингулярные уравнения на спрямляемом контуре // Мат. заметки. – 1982. – **31**, № 4. – С. 571 – 580.
8. *Плакса С. А.* Краевая задача Римана с осциллирующим свободным членом и сингулярные интегральные уравнения на спрямляемой кривой // Некоторые вопросы анализа и дифференциальной топологии. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1988. – С. 70 – 80.
9. *Плакса С. А.* О повторных интегралах по спрямляемой кривой // Комплексный анализ и теория потенциала. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1992. – С. 82 – 100.

Получено 25.12.2002