УДК 513.88

С. В. Попович, Ю. С. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ГОМОМОРФИЗМАХ АЛГЕБР, ПОРОЖДЕННЫХ ПРОЕКТОРАМИ, И ФУНКТОРАХ КОКСТЕРА*

We consider algebras generated by idempotents in Banach spaces and orthoprojections in Hilbert spaces with sums multiple of identity. We construct several functors generated by homomorphisms of the considered algebras between categories of representations. We investigate the properties of these functors and present their applications.

Розглянуто алгебри, породжені ідемпотентами в банахових просторах та ортопроекторами у гільбертових просторах з сумою, кратною одиниці. Побудовано кілька функторів між категоріями зображень, що породжені гомоморфізмами згаданих алгебр, та вивчено їх властивості. Наведено застосування.

1. Введение. Изучение алгебр, порожденных проекторами, и их представлений — классическая тема, имеющая глубокие приложения в различных областях математики от теории групп, алгебраической геометрии и анализа (см., например, [1–4] и приведенную в них библиографию) до топологии, операторных алгебр и математической физики (см., например, [5–7] и имеющуюся в них библиографию).

Будем рассматривать два семейства алгебр: одно из них — алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha} = \mathbb{C}\langle p_1, \ldots, p_n | p_1 + p_n = \alpha e,\ p_j^2 = p_j$ для всех $j = 1, \ldots, n\rangle$, порожденные n идемпотентами. Говоря о $*$-алгебре $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, мы будем подразумевать такую инволюцию, что p_j самосопряжены. Алгебра $\mathcal{P}_{n,\,abo,\,\tau} = \mathbb{C}\langle q_1, \ldots, q_n, p \mid q_j^2 = q_j$, $p^2 = p$, $q_1 + \ldots + q_n = e$, $q_j p q_j = \tau q_j$ для всех $j = 1, \ldots, n\rangle$, порожденная $n+1$ идемпотентами и рассматриваемая как $*$-алгебра, наделяется инволюцией, при которой образующие $q_1, \ldots, q_n, p$ самосопряжены.

В работах [8–10] изучались представления алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, в частности, изучался вопрос об описании множества параметров α, для которых существуют n ортопроекторов $P_1, \ldots, P_n$ в гильбертовом пространстве таких, что $\sum_{j=1}^{n} P_j = \alpha I$. Последнее условие эквивалентно тому, что $*$-алгебра $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ имеет $*$-представления в гильбертовом пространстве. В работе [8] дано полное описание этого множества параметров. Существенный инструмент этого описания — построенные в работе [11] функторы Кокстера между категориями $*$-представлений $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha}$ при различных значениях параметров. Эти функторы в [8, 11] названы функторами Кокстера потому, что их строение и значение для описания представлений во многом подобны функторам Кокстера из работы [12]. Функторы Кокстера для систем проекторов, связанных более общими соотношениями, изучались в работе [13].

Естественно возникает вопрос: не задаются ли эти и подобные им функторы на категориях представлений гомоморфизмами соответствующих алгебр (по поводу функторов, порожденных гомоморфизмами алгебр, см. п. 2)? В настоящей работе (пп. 2, 3) будут построены гомоморфизмы алгебр, порождающие, в частности, и функторы Кокстера из работ [11, 13]. Построенные гомоморфизмы порождают также функторы между категориями всех представлений, т. е. представлений, не обязательно сохраняющих инволюцию.

В пп. 3–5 построены и другие гомоморфизмы и функторы между категориями представлений ($*$-представлений) различных алгебр. В частности, в п. 5 приведены гомоморфизмы алгебр, порожденных идемпотентами с условиями

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (грант № 01.07/071).

ортогональности некоторых пар идемпотентов, и соответствующие функторы Кокстера.

С помощью этих функторов в пп. 6, 7 решены некоторые вопросы, поставленные в работах [8, 14], такие, как описание множества скалярных матриц, разложимых в сумму n идемпотентов, и вопрос об унитаризации конечномерных представлений алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$.

2. Функторы, порожденные гомоморфизмами. Пусть $\mathcal{A}$ — ассоциативная алгебра над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$, представление $\pi: \mathcal{A} \to B(V)$ — гомоморфизм в алгебру линейных ограниченных операторов, действующих в банаховом пространстве V. Представления образуют класс объектов категории $\operatorname{Rep}\mathcal{A}$; если представление π_1 действует в пространстве V_1, а представление π_2 — в пространстве V_2, то морфизм $K \in \operatorname{Mor}(\pi_1, \pi_2)$ — линейный ограниченный оператор $K \in B(V_1, V_2)$, сплетающий данные представления, т. е. $K\pi_1(x) = \pi_2(x)K$ для всех $x \in \mathcal{A}$. Основная цель работы — построение функторов между категориями представлений алгебр и изучение их свойств.

Наиболее естественный способ построения функтора между $\operatorname{Rep}\mathcal{A}_1$ и $\operatorname{Rep}\mathcal{A}_2$ состоит в следующем: если задан гомоморфизм алгебр $\varphi: \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, то определим функтор F из категории $\operatorname{Rep}\mathcal{A}_2$ в $\operatorname{Rep}\mathcal{A}_1$, положив $F(\pi) = \pi \circ \varphi$ и $F(K) = K$.

Если гомоморфизм $\varphi: \mathcal{C} \to \mathcal{A}$ не унитален, то $\varphi(e)$ является идемпотентом в алгебре $\mathcal{A}$. Предположим, что q — идемпотент в алгебре $\mathcal{A}$, тогда $\mathcal{B} = q\mathcal{A}q$ — подалгебра в A с единицей q. Пусть $\pi: \mathcal{A} \to B(V)$ — представление $\mathcal{A}$ в пространстве V. Тогда можно определить представление $\hat{\pi}$ алгебры $\mathcal{B}$ в пространстве $\tilde{V} = \operatorname{Im}\pi(q)$ (обязательно замкнутом, поскольку идемпотент ограничен), полагая $\hat{\pi}(x) = \hat{\pi}(x)|_{\tilde{V}}$ для всех $x \in \mathcal{B}$. Если K — сплетающий оператор между некоторыми представлениями π_1 и π_2, то $K|_{\tilde{V}}$ является сплетающим оператором между представлениями $\hat{\pi}_1$ и $\hat{\pi}_2$. Таким образом, мы также получаем функтор $\operatorname{Rep}\mathcal{A} \to \operatorname{Rep}\mathcal{B}$.

Рассмотрим наряду с некоторой алгеброй $\mathcal{A}$ и алгебру матриц над ней. В этом случае можно распространить представление π алгебры $\mathcal{A}$ до представления $\tilde{\pi}$ алгебры $\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C})$ в прямой сумме n копий исходного пространства $V \oplus \ldots \oplus V$ с нормой $\|v_1 + \ldots + v_n\|^2 = \|v_1\|^2 + \ldots + \|v_n\|^2$, полагая $\tilde{\pi}(a \otimes b) = \pi(a) \otimes b$, где $a \in \mathcal{A}$, $b \in M_n(\mathbb{C})$. Если K — сплетающий оператор между некоторыми представлениями π_1 и π_2, то $K \otimes I_n$ — сплетающий оператор между представлениями $\tilde{\pi}_1$ и $\tilde{\pi}_2$. Таким образом, мы получаем функтор $\operatorname{Rep}\mathcal{A} \to \operatorname{Rep}(\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C}))$.

Если $V = H$ — гильбертово пространство, то все рассмотренные выше функторы отображают $*$-представления также в $*$-представления, если все рассматриваемые алгебры являются $*$-алгебрами, а φ — $*$-гомоморфизм.

Гомоморфизмы алгебр, по которым в дальнейшем строятся функторы, в категориях представлений имеют вид $\varphi: \mathcal{A}_1 \to q(\mathcal{A}_2 \otimes M_n(\mathbb{C}))q$, где q — идемпотент в $\mathcal{A}_2 \otimes M_n(\mathbb{C})$. В этом случае, беря композицию функторов, рассмотренных выше, получаем функтор между категориями $\operatorname{Rep}\mathcal{A}_2$ и $\operatorname{Rep}\mathcal{A}_1$. Отметим, что в этом случае, если $\pi \in \operatorname{Rep}(\mathcal{A}_2, H)$, т. е. пространством представления есть H, пространством представления $F_\varphi(\pi)$ является пространство $\mathcal{H} = \pi(q)(H \oplus \ldots \oplus H)$. В дальнейшем будем отождествлять алгебру $B(\mathcal{H})$ с подалгеброй в $B(H \oplus \ldots \oplus H)$, состоящей из операторов A таких, что $\pi(q)A = A\pi(q) = A$, посредством изоморфизма $C \to C\pi(q)$ для всех

$C \in B(\mathcal{H})$. Если дополнительно известно, что $\pi(q)$ — проектор, то построенный выше изоморфизм является $*$-изоморфизмом. Отметим также, что сплетающий оператор R под действием функтора F_φ переходит в оператор $(R \otimes I_n)\pi(q)$.

В работах [8, 13] построен функтор $S\colon \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n, \frac{\alpha}{\alpha-1}}$. Приведем гомоморфизм, порождающий этот функтор. Заметим, что функтор, порожденный гомоморфизмом, применим также и к не $*$-представлениям.

Теорема 1. *Пусть*

$$f = \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{1}{\alpha}\right) p_i p_j \otimes e_{ij} \in \mathcal{P}_{n,\alpha} \otimes M_n.$$

Положим $f_j = \dfrac{\alpha}{\alpha-1} f e_{jj} f$. *Тогда* f *— идемпотент в* $\mathcal{P}_{n,\alpha} \otimes M_n$, f_j *— идемпотенты в* $f\left(\mathcal{P}_{n,\alpha} \otimes M_n\right)f$ *и отображение* $p_j \to f_j$ *продолжается до гомоморфизма* $s\colon \mathcal{P}_{n, \frac{\alpha}{\alpha-1}} \to \mathcal{P}_{n,\alpha} \otimes M_n$. *Если эти алгебры рассматриваются как $*$-алгебры, то s является $*$-гомоморфизмом. Функтор F_s, порожденный этим $*$-гомоморфизмом, совпадает с функтором S. Функтор F_s преобразует обобщенные размерности по правилу* $\overline{\pi} = F_s(\pi)$, *тогда*

$$\dim \overline{\pi} = \sum_{j=1,n} rk\pi(p_j) - \dim \pi, \qquad rk\overline{\pi}(p_j) = rk\pi(p_j).$$

Доказательство. Пусть π — представление $*$-алгебры $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ в гильбертовом пространстве H и $P_j = \pi(p_j)$. Если $\Gamma_i\colon \operatorname{Im} P_i \to H$ — естественные изометрии и $\Gamma = [\Gamma_1, \ldots, \Gamma_n]\colon \mathcal{H} = \operatorname{Im} P_1 \oplus \ldots \oplus \operatorname{Im} P_n \to H$, то естественная изометрия $\sqrt{\dfrac{\alpha-1}{\alpha}}\Delta^*$ из ортогонального дополнения $\hat{H}$ подпространства $\operatorname{Im}\Gamma^*$ в $\mathcal{H}$ дает изометрии $\Delta_i = \Delta|_{\operatorname{Im} P_i}\colon \operatorname{Im} P_i \to \hat{H}$, и мы получаем представление $S(\pi)$, полагая $S(\pi)(p_i) = \Delta_i \Delta_i^*$.

Пусть $\hat{\Gamma} = [P_1, \ldots, P_n]$. Сужение $\hat{\Gamma}$ на подпространство $\mathcal{H}$ совпадает с Γ. Поскольку $\hat{\Gamma}\hat{\Gamma}^* = \alpha I_H$, то $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\hat{\Gamma}^*\colon H \to H \oplus \ldots \oplus H$ — изометрия. А так как проектор $\dfrac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma}$ на образ $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\hat{\Gamma}^*$ имеет блочную форму $\dfrac{1}{\alpha}\left[P_i P_j\right]_{ij}$, то легко видеть, что $\operatorname{Im}\hat{\Gamma}^*$ содержится в подпространстве $\mathcal{H}$, т. е. $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\hat{\Gamma}^*\colon H \to \mathcal{H}$. Отсюда следует $\hat{\Gamma}^* = \Gamma^*$. Действительно, для любого $u \in \mathcal{H}$ и любого $v \in H$ выполнено $\left(\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma u, v\right)_{\mathcal{H}} = \left(u, \dfrac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma^* v\right)_H$. Поскольку $\hat{\Gamma}$ является расширением Γ, то $\hat{\Gamma}u = \Gamma u$ и, следовательно,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma u, v\right)_{\mathcal{H}} = \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\hat{\Gamma} u, v\right)_{H\oplus\ldots\oplus H} = \left(u, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\hat{\Gamma}^* v\right)_H.$$

В свою очередь, $\left(u, (\hat{\Gamma}^* - \Gamma^*)v\right) = 0$. Значит, $\operatorname{Im}\left(\hat{\Gamma}^* - \Gamma^*\right)$ ортогонален подпространству $\mathcal{H}$, но, с другой стороны, содержится в нем. Отсюда заключаем, что $\operatorname{Im}\left(\hat{\Gamma}^* - \Gamma^*\right) = 0$. Таким образом, $\hat{\Gamma}^* = \Gamma^*$. Следовательно,

$$\operatorname{Im}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\Gamma^* = \operatorname{Im}\frac{1}{\alpha}\Gamma^*\Gamma = \operatorname{Im}\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\hat{\Gamma}^* = \operatorname{Im}\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma}.$$

В частности, получаем $\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma} = \Gamma^*\Gamma$. Поскольку в дальнейшем во всех формулах $\hat{\Gamma}$ и $\hat{\Gamma}^*$ входят только в выражение $\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma}$, будем заменять его на $\Gamma^*\Gamma$. Значит, ортогональным дополнением $\hat{H}$ к образу Γ^* в $\mathcal{H}$ является $\left(I-\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma}\right)\mathcal{H}$. Отсюда следует, что ортопроектор $I-\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma}$ на подпространство $\hat{H}$ сужением на это подпространство задает естественную изометрию, и, следовательно,

$$\sqrt{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\Delta^* = \left(I-\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma}\right)D = D-\frac{1}{\alpha}\hat{\Gamma}^*\hat{\Gamma},$$

где $D = \operatorname{diag}(P_1, \ldots, P_n)$. Нетрудно видеть, что

$$\Delta_j = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(D-\frac{1}{\alpha}\Gamma^*\Gamma\right)\left(P_j\otimes e_{jj}\right).$$

Непосредственно убеждаемся, что

$$\Delta_i\Delta_i^* = \frac{\alpha}{\alpha-1}Pe_{ii}P,$$

где

$$P = D-\frac{1}{\alpha}\Gamma^*\Gamma = \sum_{i,j=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\frac{1}{\alpha}\right)P_iP_j\otimes e_{ij}.$$

Таким образом, мы доказали, что $F_s(\pi) = S(\pi)$.

Пусть C — сплетающий оператор для представлений π и $\tilde{\pi}$, т. е. $C: H\to\tilde{H}$ и $C\pi(p_j) = \tilde{\pi}(p_j)C$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Обозначим $P_j = \pi(p_j)$ и $\tilde{P}_j = \tilde{\pi}(p_j)$. Пусть, далее, C_j обозначает сужение C на подпространство $H_j = \operatorname{Im}P_j$. В силу принятых отождествлений пространств H_j с соответствующими прямыми слагаемыми в пространстве $\mathcal{H} = \operatorname{Im}P_1\oplus\ldots\oplus\operatorname{Im}P_n$ оператор C_j отождествляется с $CP_j\otimes e_{jj}$. Функтор S из работы [11] действует на морфизмах по правилу $S(C) = \hat{C}$, где

$$\hat{C} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\sum_{i=1}^{n}\tilde{\Delta}_iC_i\Delta_i^*.$$

Вычислим

$$\hat{C} = \frac{\alpha-1}{\alpha}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(\tilde{D}-\frac{1}{\alpha}\tilde{\Gamma}^*\tilde{\Gamma}\right)\left(\tilde{P}_j\otimes e_{jj}\right)\left(CP_j\otimes e_{jj}\right)\sqrt{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\left(D-\frac{1}{\alpha}\Gamma^*\Gamma\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{D}-\frac{1}{\alpha}\tilde{\Gamma}^*\tilde{\Gamma}\right)\tilde{P}_jCP_j\otimes e_{jj}\right)P = \left(\sum_{j=1}^{n}\left(\tilde{D}-\frac{1}{\alpha}\tilde{\Gamma}^*\tilde{\Gamma}\right)CP_j\otimes e_{jj}\right)P =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(\tilde{P}_i\tilde{P}_jCP_j\otimes e_{ij}\right)\right)P = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\frac{1}{\alpha}\right)\left(CP_iP_j\otimes e_{ij}\right)P =$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}C\otimes I\left(\delta_{ij}-\frac{1}{\alpha}\right)P_iP_j\otimes e_{ij}\right)P = C\otimes I\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\delta_{ij}-\frac{1}{\alpha}\right)P_iP_j\otimes e_{ij}\right)P =$$

$$= C\otimes IP^2 = (C\otimes I)P.$$

Здесь использованы равенства $\tilde{P}_j C P_j = C P_j$ и $\tilde{P}_i \tilde{P}_j C = C P_i P_j$, которые являются следствиями того, что C — сплетающий оператор. Следовательно, $S(C)$ есть ограничение $I \otimes C$ на подпространство $\operatorname{Im} P$ и, значит, $S(C)$ суть $F_s(C)$.

Прямым вычислением проверяется, что f и f_j — идемпотенты и в не $*$-случае и то, что s — гомоморфизм.

Теорема доказана.

В пп. 3, 4 будет доказано, что функтор F_s является эквивалентностью категорий и F_s^2 естественно изоморфен тождественному функтору.

3. Эквивалентность категорий представлений $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,\,abo,\frac{1}{\alpha}}$. В данном пункте устанавливается эквивалентность категорий представлений алгебр $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ и $\mathcal{P}_{n,\,abo,\frac{1}{\alpha}}$. В следующей теореме строится полный и унивалентный функтор между этими категориями. Теорема 4 завершает доказательство того, что этот функтор — эквивалентность категорий.

Теорема 2. *Пусть идемпотенты* $p_1, \ldots, p_n$ *являются образующими алгебры* $\mathcal{P}_{n,\alpha}$, *т. е.* $p_1 + \ldots + p_n = \alpha e$. *Тогда:*

1. *Отображение*

$$q_j \to p_j \otimes e_{jj}, \tag{1}$$

$$p \to \frac{1}{\alpha} \sum_{i,j=1}^{n} p_i p_j \otimes e_{ij} \tag{2}$$

продолжается до гомоморфизма алгебр $\xi\colon \mathcal{P}_{n,\,abo,\frac{1}{\alpha}} \to M_n(\mathcal{P}_{n,\alpha})$.

2. *Если* F_ξ *обозначает функтор между категориями* $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha}$ *и* $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\,abo,1/\alpha}$, *порожденный гомоморфизмом* ξ, *то функтор* F_ξ *является полным и унивалентным.*

Доказательство. Покажем, что функтор F_ξ является полным и унивалентным. Напомним, что функтор $F\colon \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ между категориями $\mathcal{R}$ и $\mathcal{S}$ называется унивалентным (строгим), если для любой пары объектов $A, B \in \mathcal{R}$ отображение $F_{A,B}\colon H_{\mathcal{R}}(A,B) \to H_{\mathcal{S}}(F(A), F(B))$, при котором $\alpha \to F(\alpha)$, является вложением. Здесь $H_{\mathcal{R}}(A,B)$ обозначает множество морфизмов из A в B. Функтор $F\colon \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ называется полным, если для любой пары объектов A, $B \in \mathcal{R}$ отображение $F_{A,B}\colon H_{\mathcal{R}}(A,B) \to H_{\mathcal{S}}(F(A), F(B))$ является наложением. Известно, что полный унивалентный функтор $F\colon \mathcal{R} \to \mathcal{S}$ такой, что каждый объект $B \in \mathcal{S}$ изоморфен некоторому объекту вида $F(A)$, где $A \in \mathcal{R}$, является эквивалентностью категорий.

Пусть $\pi \in \operatorname{Rep}(\mathcal{P}_{n,\alpha}, H)$ и $\pi_1 \in \operatorname{Rep}(\mathcal{P}_{n,\alpha}, H_1)$ — два представления, $C\colon H \to H_1$ и $D\colon H \to H_1$ — два сплетающих оператора, т. е. $C\pi(x) = \pi_1(x)C$ и $D\pi(x) = \pi_1(x)D$ для всех $x \in \mathcal{P}_{n,\alpha}$. Тогда $F_\xi(C) = (C \otimes I_n)\pi(E)$, а $F_\xi(D) = (D \otimes I_n)\pi(E)$, где $E = \operatorname{diag}(p_1, \ldots, p_n)$. Если $F_\xi(C) = F_\xi(D)$, то $C\pi(p_j) = D\pi(p_j)$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Поскольку $\pi(p_j)$ образуют разложение единицы, отсюда следует $C = D$. Следовательно, функтор F_ξ унивалентен.

Предположим, что оператор R сплетает представления $F_\xi(\pi)$ и $F_\xi(\pi_1)$. Тогда $RF_\xi(\pi) = F_\xi(\pi_1)R$ и $R\pi(E) = \pi_1(E)R = R$. Оператор R действует из пространства $H \oplus \ldots \oplus H$ в пространство $H_1 \oplus \ldots \oplus H_1$. Пусть r_{ij} — компоненты его представления блочной матрицей. Из соотношений $R\pi(E) = \pi_1(E)R = R$ получим

$$r_{ij}\pi(p_j) = r_{ij}, \quad \pi_1(p_i)r_{ij} = r_{ij} \quad \text{для всех} \quad i, j. \tag{3}$$

Поскольку $RF_\xi(\pi)(q_j) = F_\xi(\pi_1)(q_j)R$ и $F_\xi(\pi)(q_j) = \pi(q_j)\otimes E_{jj}$ (оператор в правой части ограничивается на подпространство $H = \pi(E)(H \oplus \ldots \oplus H)$), то $r_{ij}\pi(p_j) = 0$ и $\pi_1(p_i)r_{ij} = 0$, если $i \neq j$. Учитывая (3), получаем $r_{ij} = 0$, если $i \neq j$, и, следовательно, R — блочно-диагональная матрица. Из равенства $RF_\xi(\pi)(p) = F_\xi(\pi_1)(p)R$ имеем $r_{ii}\pi(p_i)\pi(p_j) = \pi_1(p_i)\pi_1(p_j)r_{jj}$ для всех i, j. Используя (3), находим $r_{ii}\pi(p_j) = \pi_1(p_i)r_{jj}$. Обозначим $r = \sum_{j=1}^{n} r_{jj}$. Суммируя по j, получаем $\alpha r_{ii} = \pi_1(p_i)r$. Суммируя по i, имеем $\alpha r_{jj} = r\pi(p_j)$. Следовательно, $r\pi(p_i) = \pi_1(p_i)r = \alpha r_{ii}$. Таким образом, r сплетает представления π и π_1, и, очевидно, $R = F_\xi\left(\frac{1}{\alpha}r\right)$. Это доказывает полноту функтора F_ξ.

Теорема доказана.

Для доказательства того, что построенный выше функтор F_ξ является эквивалентностью категорий, нам потребуется обратный функтор, обозначаемый в дальнейшем F_{φ_2}, т. е. такой функтор, что произведения функторов $F_\xi \circ F_{\varphi_2}$ и $F_{\varphi_2} \circ F_\xi$ естественно изоморфны соответствующим тождественным функторам. Конструкция обратного функтора приводится в следующей теореме.

Теорема 3. *Рассмотрим алгебру $\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}$ и ее подалгебру $\mathcal{B} = p\,\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}p$, которая является унитальной алгеброй с единицей p. Пусть $t_j = \frac{1}{\tau}pq_jp \in \mathcal{B}$. Тогда элементы t_j являются идемпотентами и отображение $p_j \to t_j$ продолжается до унитального гомоморфизма $\varphi_2 : \mathcal{P}_{n,\frac{1}{\tau}} \to \mathcal{B}$. Будем обозначать тем же символом φ_2 не унитальный гомоморфизм из алгебры $\mathcal{P}_{n,\frac{1}{\tau}}$ в алгебру $\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}$. Если рассматривать $\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}$ как $*$-алгебру, то $\mathcal{B}$ является $*$-подалгеброй, а φ_2 — $*$-гомоморфизмом.*

Доказательство. Поскольку $q_jpq_j = \tau q_j$, имеем

$$\tau_j^2 = \frac{1}{\tau^2}pq_jppq_jp = \frac{1}{\tau^2}p\big(q_jpq_j\big)p = \frac{1}{\tau}pq_jp = t_j.$$

Следовательно, t_j — идемпотент. Очевидно, что

$$\sum_{j=1}^{n} t_j = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\tau}pq_jp = \frac{1}{\tau}p,$$

и так как p — единица в $\mathcal{B}$, идемпотенты t_j удовлетворяют определяющим соотношениям алгебры $\mathcal{P}_{n,\frac{1}{\tau}}$. Следовательно, отображение $p_j \to t_j$ продолжается до унитального гомоморфизма $\varphi_2 : \mathcal{P}_{n,\frac{1}{\tau}} \to \mathcal{B}$. Если p и q_j самосопряжены, то $t_j^* = \frac{1}{\tau}p^*q_j^*p^* = t_j$ и, следовательно, t_j также самосопряжен. Значит, φ_2 является $*$-гомоморфизмом.

Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Гомоморфизм φ_2 порождает функтор F_{φ_2} между категориями $\mathrm{Rep}\big(\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}\big)$ и $\mathrm{Rep}\Big(\mathcal{P}_{n,\frac{1}{\tau}}\Big)$. Если $\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}$ и $\mathcal{P}_{n,\frac{1}{\tau}}$ рассматриваются как $*$-алгебры, то функтор F_{φ_2} отображает категорию $*$-представлений

$\operatorname{Rep}(\mathcal{P}_{n,\,abo,\,\tau})$ в категорию $*$-представлений $\operatorname{Rep}\left(\mathcal{P}_{n,\,\frac{1}{\tau}}\right)$.

В следующей теореме мы завершаем доказательство того, что функтор F_ξ является эквивалентностью категорий. Сначала приведем несколько определений. Обобщенной размерностью представления $\pi \in \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\,abo,\,\tau}$ назовем вектор $(d, d_1, \ldots, d_n)$, где $d = \dim \operatorname{Im} \pi(p)$, $d_k = \dim \operatorname{Im} \pi(p_k)$. Очевидно, что размерность представления π равна $\sum_{k=1}^{n} d_k$. Обобщенной размерностью представления $\pi \in \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha}$ (см. [8]) называется вектор $(d, d_1, \ldots, d_n)$, где $d = \dim \pi$, $d_k = \dim \operatorname{Im} \pi(q_k)$.

Теорема 4. 1. *Для каждого представления* π *представление* $F_{\varphi_2} \circ F_\xi(\pi)$ *эквивалентно* π. *Для* $*$*-представления* π *имеет место унитарная эквивалентность.*

2. *Функтор* F_{φ_2} *осуществляет эквивалентность категорий представлений (и категорий* $*$*-представлений)* $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha}$ *и* $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\,abo,\,\frac{1}{\alpha}}$.

3. *Представление* $\tilde{\pi} = F_\xi \circ F_{\varphi_2}(\pi)$ *действует по формулам*

$$\tilde{\pi}(p) = \frac{1}{\tau} \sum_{i,j=1}^{n} PP_iPP_jP \otimes e_{ij},$$

$$\tilde{\pi}(q_j) = \frac{1}{\tau} PP_jP \otimes e_{jj} \quad \textit{для всех} \quad j = 1, \ldots, n.$$

4. *Представление* $\tilde{\pi}$ *эквивалентно* π. *Для* $*$*-представления* π *имеет место унитарная эквивалентность, т. е. функторы* F_ξ *и* F_{φ_2} *— взаимно обратные эквивалентности.*

5. *Функтор* F_ξ *преобразует обобщенные размерности по правилу*

$$F_\xi(d, d_1, \ldots, d_n) = \left(\frac{1}{\alpha}\sum_{k=1}^{n} d_k, d_1, \ldots, d_n\right).$$

Доказательство. Пусть $\pi \in \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha}$ действует в банаховом пространстве H. Обозначим $Q_j = \pi(p_j)$ и $\tilde{Q}_j = F_{\varphi_2} \circ F_\xi(\pi)(p_j)$. Представление $F_{\varphi_2} \circ F_\xi(\pi)$ действует на $\mathcal{H} = E(H \oplus \ldots \oplus H)$, где идемпотент E представлен блочной матрицей $\frac{1}{\alpha}(Q_i Q_j)_{i,j}$. Прямым вычислением получим

$$\tilde{Q}_j = \frac{1}{\alpha} \sum_{s,t=1}^{n} Q_s Q_j Q_t \otimes e_{st}.$$

Положим $v = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}[Q_1, \ldots, Q_n]$, тогда $vv^t = 1$ и $v^t v = E$, следовательно, v — изоморфизм пространства $\mathcal{H}$ на пространство H. Более того, $v^t Q_j v = \tilde{Q}_j$ для всех $j = 1, \ldots, n$. Значит, π и $F_{\varphi_2} \circ F_\xi(\pi)$ эквивалентны. Очевидно, что в случае $*$-представления π выполнено $v^t = v^*$ (так как $Q_j^* = Q_j$) и, следовательно, имеет место унитарная эквивалентность.

Покажем, что функтор F_{φ_2} полный и унивалентный. Пусть $\pi, \pi_1 \in \mathcal{P}_{n,\,abo,\,\tau}$ и R сплетает представления $F_{\varphi_2}(\pi)$ и $F_{\varphi_2}(\pi_1)$. Пусть $P = \pi(p)$, $P_j = \pi(q_j)$ и $P' = \pi_1(p)$, $P_j' = \pi_1(q_j)$. Тогда

$$RPP_jP = P'P_j'P'R, \quad RP = P'R = R.$$

Имеем $RP_jP = P'P_j'R$. Умножая последнее равенство на P_j справа и используя определяющие соотношения, получаем $\tau RP_j = P'P_j'RP_j$. Суммируя по j, находим

$$R = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n} P'P_j'RP_j. \tag{4}$$

Аналогично, умножая равенство $RP_jP = P'P_j'R$ на P_j' слева, имеем

$$R = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n} P_j'RP_jP. \tag{5}$$

Положим

$$r = \frac{1}{\tau}\sum_{j=1}^{n} P_j'RP_j.$$

Тогда $rP_k = \frac{1}{\tau}P_k'RP_k = P_kr$. В силу равенств (4), (5) получаем $rP = R$, $P'r = R$, значит, $rP = P'r$. Таким образом, оператор r сплетает представления π и π_1 и $R = F_{\varphi_2}(r)$, что доказывает полноту функтора F_{φ_2}.

Пусть $\pi \in \operatorname{Rep}\left(\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}, H\right)$ и $\pi_1 \in \operatorname{Rep}\left(\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}, H_1\right)$ — два представления, $C\colon H \to H_1$, $D\colon H \to H_1$ — два сплетающих оператора, т. е. $C\pi(x) = \pi_1(x)C$ и $D\pi(x) = \pi_1(x)D$ для всех $x \in \mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}$. Тогда $F_{\varphi_2}(C) = C|_{\operatorname{Im}P}$, а $F_{\varphi_2}(D) = D|_{\operatorname{Im}P}$. Предположим, что $F_{\varphi_2}(C) = F_{\varphi_2}(D)$, тогда $CP = DP$. Поскольку C — сплетающий оператор, то $CP_j = P_j'C$. Умножая последнее равенство справа на PP_j, получаем

$$CP_JPP_J = P_J'CPP_J = P_J'DPP_J = DP_JPP_J.$$

Используя определяющие соотношения, находим $\tau CP_j = \tau DP_j$. Поскольку P_j образуют разложение единицы, то $C = D$. Следовательно, функтор F_{φ_2} унивалентен. А так как $F_{\varphi_2} \circ F_\xi(\pi)$ эквивалентно π, для любого представления π каждый объект из категории $\operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\alpha}$ эквивалентен объекту вида $F_{\varphi_2}(\varsigma)$, где $\varsigma \in \operatorname{Rep}\mathcal{P}_{n,\, abo,\frac{1}{\alpha}}$. Таким образом, F_{φ_2} осуществляет эквивалентность категорий. То же справедливо для категорий $*$-представлений.

Пусть π является представлением алгебры $\mathcal{P}_{n,\, abo,\tau}$, действующим в пространстве H. Обозначим $P_j = \pi(q_j)$, $P = \pi(p)$. Представление $\tilde{\pi} = F_\xi \circ F_{\varphi_2}(\pi)$ действует в пространстве $\mathcal{H} = E(H \oplus \ldots \oplus H)$, где идемпотент E суть $\frac{1}{\tau}\operatorname{diag}(PP_1P, \ldots, PP_nP)$. Обозначим $\tilde{P} = \tilde{\pi}(p)$ и $\tilde{P}_j = \tilde{\pi}(q_j)$. Прямым вычислением получаем

$$\tilde{P} = \frac{1}{\tau}\sum_{i,j=1}^{n} PP_iPP_jP \otimes e_{ij},$$

$$\tilde{P}_j = \frac{1}{\tau}PP_jP \otimes e_{jj}.$$

Покажем, что $\tilde{\pi}$ эквивалентно π. Имеем $F_{\varphi_2}(\tilde{\pi}) = F_{\varphi_2} \circ F_\xi \circ F_{\varphi_2}(\pi)$, согласно доказанному выше $F_{\varphi_2} \circ F_\xi \circ F_{\varphi_2}(\pi)$ эквивалентно $F_{\varphi_2}(\pi)$. Поскольку

F_{φ_2} является эквивалентностью категорий, он приводит неэквивалентные представления в неэквивалентные. Но мы доказали, что $F_{\varphi_2}(\pi)$ эквивалентно $F_{\varphi_2}(\tilde{\pi})$. Значит, представления π и $\tilde{\pi}$ эквивалентны. Естественность указанных выше изоморфизмов функторов проверяется непосредственно. Очевидно, что все упомянутые эквивалентности являются унитарными в случае $*$-представлений.

Теорема доказана.

4. Гиперболические функторы, сохраняющие свойство унитаризуемости. Представление π $*$-алгебры $\mathcal{A}$ в пространстве H называется унитаризуемым, если H можно наделить структурой гильбертова пространства с нормой, эквивалентной исходной, так, чтобы представление π было $*$-представлением.

Следующая лемма является частью математического фольклора и ее доказательство приведено лишь для замкнутости изложения.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра, $\pi_1, \pi_2 \in \operatorname{Rep} \mathcal{A}$. Если π_1 и π_2 эквивалентны и π_1 унитаризуемо, то π_2 также унитаризуемо и соответствующие $*$-представления унитарно эквивалентны.*

Доказательство. Если π_1 является $*$-представлением относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $\pi_2(x) = C^{-1}\pi_1(x)C$ для всех $x \in \mathcal{A}$, то π_2 — $*$-представление относительно скалярного произведения $\langle u, v \rangle_C = \langle Cu, Cv \rangle$. Известно, что два эквивалентных $*$-представления унитарно эквивалентны.

***Следствие* 1.** *Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — $*$-алгебры и существуют взаимно обратные эквивалентности категорий $F: \operatorname{Rep} \mathcal{A} \to \operatorname{Rep} \mathcal{B}$ и $G: \operatorname{Rep} \mathcal{B} \to \operatorname{Rep} \mathcal{A}$, которые переводят $*$-представления в $*$-представления. Тогда каждый из этих функторов переводит унитаризуемые представления в унитаризуемые, а неунитаризуемые в неунитаризуемые.*

Гиперболический функтор на $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ может быть задан альтернативным образом.

Теорема 5. 1. *Существует эквивалентность категорий F_T, которая делает диаграмму коммутативной:*

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\alpha} & \xrightarrow{T} & \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,n-\alpha} \\ F_\xi \downarrow & & \downarrow F_\xi \\ \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}} & \xrightarrow[F_T]{} & \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{n-\alpha}} \end{array}.$$

Следовательно, $F_T\colon \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,\tau} \to \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,\frac{\tau}{n\tau-1}}$.

2. *Функтор F_T^2 естественно изоморфен тождественному функтору.*

3. *Функтор F_T переводит унитаризуемые представления в унитаризуемые, а неунитаризуемые в неунитаризуемые.*

4. *F_T задается следующим правилом: если операторы $(Q, Q_1, \ldots, Q_n)$ удовлетворяют определяющим соотношениям $\mathcal{P}_{n,abo,\tau}$, то $F_T(Q, Q_1, \ldots, Q_n) = (P, P_1, \ldots, P_n)$, где*

$$P = \frac{1}{n - \frac{1}{\tau}} \sum_{i,j=1}^{n} Q\left(I - \frac{1}{\tau} Q_i\right) Q \left(I - \frac{1}{\tau} Q_j\right) Q \otimes e_{ij},$$

$$P_j = Q\left(I - \frac{1}{\tau} Q_j\right) Q \otimes e_{jj}.$$

5. *Функтор* F_T *преобразует обобщенные размерности следующим образом:*

$$F_T(d, d_1, \dots, d_n) = (d, n-d_1, \dots, n-d_n),$$

где $d = \dim \operatorname{Im} P$, $d_j = \dim \operatorname{Im} P_j$.

Доказательство. Функтор F_T может быть задан правилом $F_\xi \circ T \circ F_\xi^{-1} = F_\xi \circ T \circ F_{\varphi_2}$. Из этого формулы для P и P_j получаются прямыми вычислениями и совпадают с приведенными в теореме. Пусть проекторы $Q, Q_1, \dots, Q_n$ в пространстве H удовлетворяют соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n} Q_j = I, \qquad Q_j Q Q_j = \frac{1}{\alpha} Q_j.$$

Обозначим $\tilde{Q}_j = Q - \alpha Q Q_j Q$, тогда $\tilde{Q}_j$ являются ортогональными проекторами и $\sum_{j=1}^{n} \tilde{Q}_j = (n-\alpha) Q$. Положим

$$u = \frac{1}{\sqrt{n-\alpha}} \left[\tilde{Q}_1, \dots, \tilde{Q}_n\right],$$

тогда $u^t u = P$ и

$$u u^t = \frac{1}{n-\alpha} \sum_{j=1}^{n} \tilde{Q}_j = Q.$$

Следовательно, $\dim \operatorname{Im} P = \dim \operatorname{Im} Q$. Если обозначить $u_j = \sqrt{\alpha}\, Q Q_j$, то $u_j^t u_j = Q_j$ и $u_j u_j^t = \alpha Q Q_j Q$. Следовательно,

$$\dim \operatorname{Im} \tilde{Q}_j = \dim \operatorname{Im} Q - \dim \operatorname{Im} u_j u_j^t = \dim \operatorname{Im} Q - \dim \operatorname{Im} Q_j = d - d_j.$$

Рассмотрим квадрат функтора F_T:

$$F_T^2 = F_\xi \circ T \circ F_\xi^{-1} \circ F_\xi \circ T \circ F_\xi^{-1} = F_\xi \circ T^2 \circ F_\xi^{-1}.$$

Легко видеть, что $T^2 = Id$ и, следовательно, F_T^2 естественно изоморфен тождественному.

Теорема 6. 1. *Функтор* F_s *делает диаграмму коммутативной:*

$$\begin{array}{ccc}
\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\alpha} & \xrightarrow{F_s} & \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\frac{\alpha}{\alpha-1}} \\
F_\xi \downarrow & & \downarrow F_\xi \\
\operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,\frac{1}{\alpha}} & \xrightarrow[T]{} & \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,\frac{\alpha-1}{\alpha}}
\end{array},$$

где функтор $T\colon \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,\tau} \to \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,abo,1-\tau}$ *задан гомоморфизмом* $t(q_j) = q_j$, $t(p) = e - p$. *Следовательно,* $F_s\colon \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\alpha} \to \operatorname{Rep} \mathcal{P}_{n,\frac{\alpha}{\alpha-1}}$ *является эквивалентностью категорий.*

2. *Функтор* F_s^2 *естественно изоморфен тождественному функтору.*

3. *Функтор* F_s *переводит унитаризуемые представления в унитаризуемые, а неунитаризуемые в неунитаризуемые.*

Доказательство. Непосредственно убеждаемся, что $F_{\varphi_2} \circ T \circ F_\xi$ совпадает с функтором F_s из п. 1. Функтор F_s является эквивалентностью категорий как суперпозиция таковых.