УДК 512.544

А. В. Тушев (Днепропетр. нац. ун-т)

ИНДУЦИРОВАННЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АБЕЛЕВЫХ ГРУПП КОНЕЧНОГО РАНГА

We prove that any irreducible faithful representation of an almost torsion-free Abelian group G of a finite rank over a finitely generated field of characteristic zero is induced from an irreducible representation of a finitely generated subgroup of G.

Доведено, що кожне незвідне точне зображення абелевої групи G скінченного рангу і майже без скруту над скінченнопородженим полем нульової характеристики індуковане з незвідного зображення скінченнопородженої підгрупи групи G.

В данной работе рассматриваются свойства индуцированных модулей над групповыми кольцами абелевых групп конечного ранга. Эти свойства основаны на известной теории Куммера, которая, в свою очередь, является следствием теории Галуа. Так, доказанная в [1] (гл. VIII, теорема 16) неприводимость некоторых многочленов, а также доказанные в [1] (гл. VIII, теорема 13) соотношения степеней расширений полей приводят к индуцированию модулей. Впервые данный подход был применен в работе [2]. Из приведенного ниже утверждения видно, как это происходит.

Пусть R — кольцо, G — группа и H — ее подгруппа. Пусть U — правый RH-модуль. Поскольку групповое кольцо RG можно рассматривать как левый RH-модуль, определено тензорное произведение $U \otimes_{RH} RG$ (см. [3], § 5.1), которое согласно [3] (§ 5.1, предложение 3) является правым RG-модулем, называемым RG-модулем, индуцированным с RH-модуля U. Согласно [4] (гл. III, предложение 5.3), если M — RG-модуль и $U \leq M$, то $M \cong U \otimes_{RH} RG$ тогда и только тогда, когда $M = \oplus_{t \in T} Ut$, где T — некоторая правая трансверсаль подгруппы H в G. Напомним, что правая (левая) трансверсаль подгруппы H в группе G — это некоторое множество элементов, выбранных по одному из каждого правого (левого) смежного класса группы G по подгруппе H. Если kG-модуль M некоторого представления φ группы G на полем k индуцирован со своего kH-подмодуля U, где H — подгруппа группы G, то говорят, что представление φ индуцировано с представления ϕ подгруппы H, причем U является модулем представления ϕ. Поле k называется конечнопорожденным, если оно является конечнопорожденным расширением своего простого подполя.

Основным результатом данной работы является теорема, в которой утверждается, что любое точное неприводимое представление абелевой группы G конечного ранга и почти без кручения над конечнопорожденным полем нулевой характеристики индуцировано с некоторого неприводимого представления некоторой конечнопорожденной плотной подгруппы группы G. В связи с этим результатом естественно возникает следующее предположение.

Предположение. *Любое точное неприводимое представление нильпотентной группы G конечного ранга и почти без кручения над конечнопорожденным полем нулевой характеристики индуцировано с некоторого неприводимого представления ϕ некоторой плотной подгруппы H группы G такой, что фактор-группа $H/\operatorname{Ker}\phi$ конечно порождена.*

В работе используются стандартные обозначения теории полей (см. [1]). Пусть p — простое число, подгруппу B абелевой группы B будем называть p-изолированной, если $p \notin \pi(t(A/B))$.

Лемма 1. *Пусть f — расширение поля k, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f такая, что $\left|G/\left(G \cap k^*\right)\right| = n$, где n не делится* *на характеристику поля k, причем для любого простого числа $q \in \pi(t(G))$ k содержит первообразный корень из 1 степени q и первообразный корень из 1 степени 4. Пусть $g \in G \setminus (k^* \cap G)$ и t — порядок образа элемента g в фактор-группе $g \in G/(k^* G)$. Предположим, что для любого простого числа p, делящего t, либо $k^* \cap G$ — p-изолированная подгруппа группы k^*, либо k^* содержит первообразный корень из 1 степени p. Пусть $d = k(g)$, тогда $[d:k] = t$.*

Доказательство. Пусть $g^t = a \in k^* \cap G$. Если $a = 1$ и p — простое число, делящее t, то $p \in \pi(t(G))$ и g^m — первообразный корень из 1 степени p, где $m = t/p$. В то же время так как t — порядок образа элемента g в фактор-группе $g \in G/(k^* G)$, то $g^m \notin k$, а это противоречит условию. Таким образом, $a \neq 1$.

Допустим, что для некоторого простого числа p, делящего t, существует элемент $b \in k$ такой, что $b^p = a$. Тогда $(g^m b^{-1})^p = 1$, где $m = t/p$. Предположим сначала, что поле k содержит первообразный корень ξ из 1 степени p. Тогда $g^m b^{-1} = \xi$, а так как $b \in k$ и $\xi \in k$, то отсюда следует, что $g^m \in k^* \cap G$. Но это невозможно, так как t — порядок образа элемента g в фактор-группе $G/(k^* \cap G)$.

Предположим теперь, что $k^* \cap G$ — p-изолированная подгруппа группы k^*. Поскольку $a \in k^* \cap G$ и $k^* \cap G$ является p-изолированной подгруппой в k^*, то $b \in k^* \cap G$ и, следовательно, $g^m b^{-1} \in G$. А так как $(g^m b^{-1})^p = 1$, то $p \in \pi(t(G))$ и, значит, согласно условию леммы $g^m b^{-1} \in k^* \cap G$. Отсюда следует, что $g^m \in k^* \cap G$. Но это невозможно, так как t — порядок образа элемента g в фактор-группе $G/(k^* \cap G)$.

Итак, в обоих случаях поле k не содержит корней из элемента a степени p для любого простого числа p, делящего t.

Предположим, что t делится на 4 и $a \in -4k^4$, тогда существует элемент $b \in k$ такой, что $a = -4b^4$. Пусть $m = t/4$ и $h = g^m$, тогда $h^4 = -4b^4$ и, следовательно, $h^2 = (\pm 2i) b^2$, где i — первообразный корень из 1 степени 4. Поскольку поле k содержит i, то $h^2 = g^{2m} \in k^* \cap G$. Но это невозможно, так как t — порядок образа элемента g в фактор-группе $G/(k^* \cap G)$.

Таким образом, $a \notin k^p$ для любого простого числа p, делящего n, и $a \notin -4k^k$, если $4 \mid n$. Тогда из теоремы 16 [1] (гл. VIII) следует, что элемент g является корнем неприводимого над полем k многочлена $X - a$, и из предложения 3 [1] (гл. VII) — что $[d:k] = t$.

Лемма 2. *Пусть f — расширение поля k, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f такая, что для любого простого числа $q \in \pi(t(G))$ поле k содержит первообразный корень из 1 степени q и первообразный корень из 1 степени 4. Пусть p — простое число такое, что $p \neq \operatorname{char} k$ и $|G/(k^* \cap G)| = n = p^m$. Предположим, что либо поле k содержит первообразный корень из 1 степени p, либо $k^* \cap G$ — p-изолированная подгруппа группы k^*. Тогда $[k(G):k] = n$.*

Доказательство. Предположим, что поле k содержит первообразный корень ξ из 1 степени p. Доказательство проведем индукцией по m. Пусть $g \in G$, причем порядок образа элемента g в фактор-группе $G/\left(k^* \cap G\right)$ равен p, и пусть $d = k(g)$. Тогда согласно лемме 1 $[d:k] = p$. Предположим, что существует элемент $h \in G \cap d$ такой, что $h^p = g$, тогда порядок образа элемента h в фактор-группе $G/\left(k^* \cap G\right)$ равен p^2. Из леммы 1 следует, что $[k(h):k] = p^2$, а так как $k(h) \le k(g)$ и $[k(g):k] = p$, то это противоречит предложению 2 из [1] (гл. VII). Таким образом, можно считать, что фактор-группа $\left(d^* \cap G\right)/\left(k^* \cap G\right)$ — элементарная абелева. Положим $d^* \cap G = L$, тогда $k^* \cap G = k^* \cap L$. Пусть $\left|L/\left(L \cap k^*\right)\right| = p^t$, тогда $\left|Lk^*/k^*\right| = p^t$ и $d = k\left(Lk^*\right)$. Из теоремы 13 [1] (гл. VIII) следует $p = [d:k] = \left|L^p(k^*)^p/(k^*)^p\right|$. Поскольку поле k содержит первообразный корень из 1 степени p, отсюда нетрудно получить $\left|Lk^*/k^*\right| = p$ и, следовательно, $\left|L/\left(L \cap k^*\right)\right| = p$. Тогда $G \cap d = (G \cap k)\langle g \rangle$, и утверждение следует из предположения индукции.

Предположим теперь, что поле k не содержит ξ. Пусть $d = k(\xi)$, тогда $[d:k] = r < p$, поскольку неприводимый многочлен элемента ξ имеет степень меньше p.

Покажем, что $G \cap d = G \cap k$. Предположим, что существует элемент $g \in (G \cap d) \setminus (G \cap k)$. Не ограничивая общности, можно считать, что порядок образа $\bar{g}$ элемента g в фактор-группе $(G \cap d)/(G \cap k)$ равен p. Тогда из леммы 1 следует $[k(g):k] = p$, а так как $k(g) \le d$, то это противоречит соотношению $[d:k] = r < p$. Таким образом, $G \cap d = G \cap k$ и, следовательно, $\left|G/\left(d^* \cap G\right)\right| = n = p^m$. Тогда, как показано выше, $[d(G):d] = p^m$ и, следовательно, $[d(G):k] = p^m r$. Поскольку $d(G) = k(G)(\xi)$, то $[d(G):k(G)] \le r$. Поэтому из предложения 2 [1] (гл. VII) и соотношения $[d(G):k] = p^m r$ следует $[k(G):k] = n$.

Пусть f — расширение поля k, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f. Тогда поле $k(G)$ можно рассматривать как kG-модуль, а поле k — как $k\left(G \cap k^*\right)$-модуль. Следовательно, определено тензорное произведение $K \otimes_{k\left(G \cap k^*\right)} kG$, при этом равенство $k(G) = k \otimes_{k\left(G \cap k^*\right)} kG$ означает, что $k(G) = \oplus_{t \in T} kt$, где T — трансверсаль подгруппы $G \cap k^*$ в G.

Утверждение. *Пусть f — расширение поля k, G — подгруппа мультипликативной группы f^* поля f такая, что для любого $q \in \pi(t(G))$ поле k содержит первообразный корень из 1 степени q и первообразный корень из 1 степени 4, фактор-группа $G/\left(G \cap k^*\right)$ — периодическая и $\operatorname{char} k \notin \pi\left(t\left(G/\left(G \cap k^*\right)\right)\right)$. Предположим, что для любого простого числа $p \in \pi\left(t\left(G/\left(G \cap k^*\right)\right)\right)$ либо поле k содержит первообразный корень из 1 степени p, либо подгруппа $G \cap k^*$ является p-изолированной в группе k. Тогда $k(G) = k \otimes_{k\left(G \cap k^*\right)} kG$.*

Доказательство. Поскольку фактор-группа $G/\left(G \cap k^*\right)$ локально конечна, достаточно показать, что для любой подгруппы $H \le G$ такой, что $\left(G \cap k^*\right) \le H$ и $\left|H/\left(G \cap k^*\right)\right| < \infty$, выполняется соотношение $k(H) = k \otimes_{k\left(G \cap k^*\right)} kH$. Таким образом, не ограничивая общности, можно считать, что $G/(G\cap k^*)=n<\infty$ и $\operatorname{char} k$ не делит n. А так как соотношение $k(G)=k\otimes_{k(G\cap k^*)}kG$ означает, что $k(G)=\oplus_{t\in T}kt$, где T — некоторая трансверсаль подгруппы $G\cap k^*$ в группе G, то достаточно показать, что $[k(G):k]=n$. Используем индукцию по n. Пусть p — наименьшее простое число, делящее n, и $N/(k^*\cap G)$ — силовская p-подгруппа фактор-группы $G/(k^*\cap G)$. Предположим, что $|N/(k^*\cap G)|=t$. Пусть $d=k(N)$, тогда согласно лемме 2 $[k(N):k]=t$.

Покажем, что $d^*\cap G=N$. Предположим, что существует элемент $g\in(d^*\cap G)\setminus N$. Не ограничивая общности, можно считать, что порядок образа $\overline{g}$ элемента g в фактор-группе $G/(k^*\cap G)$ равен p', где p' — простое число и $p\neq p'$. Тогда согласно лемме 1 $[k(g):k]=p'$, а так как $k(g)\le d$, то из предложения 2 [1] (гл. VII) следует, что p' делит t, но это невозможно, так как $p\neq p'$. Таким образом, $d^*\cap G=N$.

Пусть $r=n/t$ и q — простое число, делящее r. Предположим, что поле d не содержит первообразный корень ξ из 1 степени q. Покажем, что подгруппа N является q-изолированной подгруппой в d^*. Предположим, что существует элемент $x\in d^*\setminus N$ такой, что $x^q\in N$. Тогда $x^{qt}\in G\cap k^*$. Следовательно, порядок s образа $\overline{x}$ элемента x в фактор-группе $d^*/(G\cap k^*)$ имеет вид либо $s=ql$, либо $s=l$, где $l=p^m$ и $m\in\mathbb{N}$. Предположим, что $s=l$. Поскольку $N\ge G\cap k^*$ и $x^q\in N$, отсюда следует, что $x\in N$, а это противоречит соотношению $x\in d^*\setminus N$. Таким образом, можно считать, что $s=ql$. Заменив элемент x на x^l, можно считать, что $s=q$.

Пусть $x^q=a$ и предположим, что существует элемент $b\in k$ такой, что $b^q=a$. Тогда $(xb^{-1})^q=1$, а так как d не содержит первообразный корень из 1 степени q, то $xb^{-1}=1$ и, следовательно, $x\in k$. Ввиду того, что подгруппа $G\cap k^*$ — q-изолированная в k, $x\in G\cap k^*$, что невозможно, так как $x\in d^*\setminus N$. Таким образом, $a\notin k^q$ и из теоремы 16 [1] (гл. VIII) следует, что x — корень неприводимого над полем k многочлена $X-a$, и из предложения 3 [1] (гл. VII) следует $[k(x):k]=q$. Поскольку $k(x)\le k(N)$, из предложения 2 [1] (гл. VII) следует, что q делит t, а это невозможно, так как $p\neq q$.

Итак, подгруппа N является q-изолированной подгруппой в d^* для любого простого числа q, делящего r. Тогда по предположению индукции $[k(G):d]=r$ и утверждение следует из предложения 2 [1] (гл. VII).

Теорема. *Любое точное неприводимое представление φ абелевой группы G конечного ранга и почти без кручения над конечнопорожденным полем k нулевой характеристики индуцировано с некоторого неприводимого представления некоторой конечнопорожденной плотной подгруппы группы G.*

Доказательство. Пусть M — модуль представления φ. Поскольку представление φ неприводимо, то $M\cong kG/P$, где P — некоторый максимальный идеал кольца kG, и, следовательно, $M=k(G)$ — поле. Пусть f — алгебраическое замыкание поля M. Пусть $d=k(H,i)$, где H — конечнопорожденная плотная подгруппа группы G такая, что $t(G)\le H$, и i — первообразный корень из 1 степени 4. Согласно лемме 7 [2] $d^*=T\times L$, где T — конечная группа и L — свободная абелева группа. Отсюда следует, что $G\cap d^*$ — конечнопорожденная плотная подгруппа группы G. Заменив H на $G \cap d^*$, можно считать, что $H = G \cap d^*$. Так как $d^* = T \times L$, где T — конечная группа и L — свободная абелева группа, то $t\left(d^* / H\right) = D / H$ — конечная группа. Пусть $N = DG$, тогда D — плотная подгруппа группы N, а так как D — изолированная подгруппа группы d^*, то $D = d^* \cap N$. Тогда из доказанного выше утверждения следует $d(N) = d \otimes_{dD} dN$, т. е. $d(N) = \oplus_{t \in T} dt$, где T — некоторая трансверсаль подгруппы D в N. Поскольку $N = DG$, трансверсаль T можно выбрать так, что $T \subseteq G$, а так как $D \cap G = H$, то T — трансверсаль подгруппы H в группе G. Отсюда следует $k(G) = \oplus_{t \in T} k(H)t$, т. е. $M = k(G) = k(H) \otimes_{kH} kG$.

1. *Ленг С.* Алгебра. – М.: Мир, 1968. – 564 с.
2. *Тушев А. В.* Нетеровы модули над абелевыми группами конечного свободного ранга // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 7, 8. – С. 1042 – 1048.
3. *Ламбек И.* Кольца и модули. – М.: Мир, 1971. – 279 с.
4. *Браун К. А.* Когомологии групп. – М.: Наука, 1987. – 384 с.

Получено 04.02.2002