УДК 517.98

А. С. Меллит (Нац. техн. ун-т Украины „КПИ", Киев)

КОГДА СУММА ТРЕХ ЧАСТИЧНЫХ ОТРАЖЕНИЙ РАВНА НУЛЮ

With the accuracy up to a unitary equivalence, we describe all irreducible triples of self-adjoint operators A_1, A_2, A_3 such that $\sigma(A_i) \subset \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, and $A_1 + A_2 + A_3 = 0$.

Описано, з точністю до унітарної еквівалентності, всі незвідні трійки самоспряжених операторів A_1, A_2, A_3 таких, що $\sigma(A_i) \subset \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, та $A_1 + A_2 + A_3 = 0$.

Введение. На протяжении XX века многие математики интересовались задачей об описании наборов из n самосопряженных операторов $A_i = A_i^*$ с заданными спектрами $\sigma(A_i) \subset \{x_1^{(i)} \leq \ldots \leq x_k^{(i)}\}$, сумма которых кратна тождественному оператору (см., например, [1, 2]).

В работах [3 – 5] исследовалась задача об описании $*$-представлений $*$-алгебры, порожденной проекторами с суммой, кратной единице

$$\mathcal{P}_{n,\alpha} = C\left\langle p_1, p_2, \ldots, p_n \mid p_i^* = p_i = p_i^2,\, p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \alpha e \right\rangle.$$

В частности, были указаны все значения параметров n и α, при которых $*$-представления существуют, и для некоторых значений параметров были описаны все неэквивалентные неприводимые $*$-представления $\mathcal{P}_{n,\alpha}$. Для других значений n и α оказалось, что $*$-алгебра $\mathcal{P}_{n,\alpha}$ не типа I.

В настоящей статье описаны, с точностью до унитарной эквивалентности, все неприводимые тройки самосопряженных операторов A_1, A_2, A_3 таких, что $\sigma(A_i) \subset \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, и $A_1 + A_2 + A_3 = 0$. Или, на языке $*$-алгебр и $*$-представлений, описаны, с точностью до унитарной эквивалентности, все неприводимые $*$-представления $*$-алгебры

$$\mathcal{R} = C\left\langle a_1, a_2, a_3 \mid a_i^* = a_i = a_i^3,\, a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\rangle.$$

Полученный результат можно также сформулировать следующим образом. Описаны, с точностью до унитарной эквивалентности, все неприводимые шестерки проекторов P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 такие, что

$$P_1 + 2P_2 + P_3 + 2P_4 + P_5 + 2P_6 = 3I,$$

$$P_1 \text{ и } P_2,\; P_3 \text{ и } P_4,\; P_5 \text{ и } P_6 \text{ ортогональны.}$$

О связи этой задачи со $*$-представлениями графов см. [6].

1. Обозначения и предварительные результаты.

Рассмотрим $*$-алгебру

$$\mathcal{R} = C\left\langle a_1, a_2, a_3 \mid a_i^* = a_i = a_i^3,\, a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\rangle.$$

Будем искать все неприводимые неэквивалентные $*$-представления этой алгебры. Гильбертово пространство, в котором действуют операторы представления, будем обозначать символом H. Каждое представление задается тройкой ограниченных операторов $A_1, A_2, A_3 \in B(H)$. Все эти операторы самосопряжены, и, кроме того, выполняются соотношения

$$A_i^3 = A_i, \quad i = 1, 2, 3, \tag{1}$$

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0. \tag{2}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Все неприводимые $*$-представления $*$-алгебры $\mathcal{R}$ в размерностях 1 и 2 эквивалентны одному из следующих неэквивалентных неприводимых $*$-представлений*:

1) *семь одномерных представлений*:

а) $A_1 = A_2 = A_3 = 0$;

б) $A_1 = -1,\ A_2 = 1,\ A_3 = 0,$ *и все перестановки этих операторов*;

2) *одно двумерное представление*

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В случае размерности 1 доказательство состоит в переборе значений A_i.

Если размерность равна двум, можно рассмотреть следы $\operatorname{Tr} A_i$. Поскольку ни один из операторов A_i не может быть кратен тождественному, $\operatorname{Tr} A_i \in \{-1, 0, 1\}$. Возможны два случая (с точностью до перестановки операторов):

1. $\operatorname{Tr} A_1 = -1,\ \operatorname{Tr} A_2 = 1,\ \operatorname{Tr} A_3 = 0$. Тогда — A_1 и A_2 — проекторы, а A_3 — отражение и можно проверить, что представление не может быть неприводимым.

2. $\operatorname{Tr} A_1 = \operatorname{Tr} A_2 = \operatorname{Tr} A_3 = 0$. В этом случае операторы A_1, A_2, A_3 являются отражениями, что и дает нам представление 2).

2. Центрированные образующие. Пусть $\mathcal{A}$ — $*$-алгебра и $a \in \mathcal{A}$. Если a^*a коммутирует с aa^*, то a называется слабо центрированным. Если, кроме того, два любых элемента из множества $\{a^n a^{*n}, a^{*n} a^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ коммутируют, то a называется центрированным (см., например, [7, 8]).

Выберем в $\mathcal{R}$ другую систему образующих. Пусть $\varepsilon = -1/2 + (\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}$, $\varepsilon^3 = 1$. Возьмем такой элемент алгебры x, что

$$a_i = \varepsilon^i x + \varepsilon^{-i} x^*, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3}$$

Это можно сделать, так как $1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$, и x соотношениями (3) задается однозначно. Образ x в представлении будем обозначать через X. Справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *В образующих x, x^* $*$-алгебра $\mathcal{R}$ имеет следующий вид*:

$$\mathcal{R} = C\langle x, x^* \mid$$

$$x^3 + x^{*3} = 0, \tag{4}$$

$$x^2 x^* + x x^* x + x^* x^2 - x = 0, \tag{5}$$

$$x^{*2} x + x^* x x^* + x x^{*2} - x^* = 0\rangle. \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим левые части (4) – (6) символами K, L, M соответственно. Тогда

$$a_1^3 - a_1 = K + \varepsilon L + \varepsilon^2 M,$$

$$a_2^3 - a_2 = K + \varepsilon^2 L + \varepsilon M,$$

$$a_3^3 - a_3 = K + L + M.$$

Из того, что

$$\det\begin{pmatrix}1 & \varepsilon & \varepsilon^2\\ 1 & \varepsilon^2 & \varepsilon\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} = 3(\varepsilon^2-\varepsilon) \neq 0,$$

следует эквивалентность тройки соотношений (4) – (6) соотношениям (1). Соотношение (2) проверяется непосредственно с помощью (3) и равенства $1+\varepsilon+\varepsilon^2=0$.

Лемма доказана.

Домножим (5) справа на x^*, а (6) слева на x и вычтем полученные тождества одно из другого. Получим

$$[xx^*, x^*x] = xx^{*2}x - x^*x^2x^* = 0, \tag{7}$$

т. е. x является слабо центрированным. Верно и более сильное утверждение.

Лемма 3. *Элемент x является центрированным.*

Доказательство. Заметим, что $x^3=-x^{*3}$ коммутирует с образующими x и x^*, т. е. принадлежит центру алгебры. Это означает, что достаточно проверить, что xx^*, x^*x, x^2x^{*2}, $x^{*2}x^2$ попарно коммутируют:

$$[xx^*, x^{*2}x^2] = xx^{*3}x^2 - x^*x^3x^{*2} = 0,$$

$$[xx^*, x^2x^{*2}] = xx^*x^2x^{*2} - x^2x^{*2}xx^* = x(x^*x^2x^* - xx^{*2}x)x^* = 0,$$

$$[x^2x^{*2}, x^{*2}x^2] = x^2x^{*4}x^2 - x^{*2}x^4x^{*2} = x^2x^*x^2x^{*3} - x^3x^{*2}xx^{*2} =$$

$$= x^2(x^*x^2x^* - xx^{*2}x)x^{*2} = 0.$$

Остальные требуемые равенства доказываются аналогично.

3. Конечномерность неприводимых представлений. Будем изучать неприводимые представления алгебры $\mathcal{R}$. Поскольку элемент x^3 лежит в центре алгебры, согласно лемме Шура, в неприводимом представлении оператор X^3 будет скалярным. Положим $X^3=\lambda I$, где $\lambda\in\mathbb{C}$. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 4. *Все неприводимые $*$-представления алгебры $\mathcal{R}$ не более чем трехмерны.*

Доказательство разбивается на два случая: $\lambda=0$ и $\lambda\neq 0$.

Пусть $\lambda\neq 0$. Докажем, что оператор $X^{*2}X^2$ аннулируется некоторым многочленом степени не выше 3. Рассмотрим следующие операторы:

$$C_1 = \lambda XX^* + \lambda X^*X + X^2X^*X^2,$$

$$C_2 = X^2X^{*2} + X^{*2}X^2 + XX^{*2}X.$$

Легко проверяется, что они принадлежат центру представления, поэтому скалярны. Пусть $C_1=c_1I$, $C_2=c_2I$, где $c_1, c_2\in\mathbb{C}$. Домножим второе равенство справа на $X^{*2}X^2$. Получим

$$(X^{*2}X^2)^2 + X^2X^{*4}X^2 + XX^{*2}XX^{*2}X^2 = c_2X^{*2}X^2,$$

или

$$(X^{*2}X^2)^2 + X^2X^{*4}X^2 + XX^{*3}X^2X^*X = c_2X^{*2}X^2,$$

$$(X^{*2}X^2)^2 + \bar{\lambda}(X^2X^*X^2 + \lambda X^*X) = c_2 X^{*2}X^2,$$

$$(X^{*2}X^2)^2 + \bar{\lambda}c_1 I - \lambda\bar{\lambda}XX^* - c_2X^{*2}X^2 = 0.$$

Снова домножим последнее равенство на $X^{*2}X^2$ справа:

$$(X^{*2}X^2)^3 - c_2(X^{*2}X^2)^2 + \bar{\lambda}c_1X^{*2}X^2 - \lambda^2\bar{\lambda}^2 = 0.$$

Из доказанного следует, что спектр оператора $X^{*2}X^2$ состоит из не более чем трех точек, следовательно, дискретен. Аналогичное утверждение можно проверить и для оператора X^2X^{*2}.

Теперь достаточно выбрать любой v — общий собственный вектор $X^{*2}X^2$ и X^2X^{*2}. Учитывая равенство $XX^* = (\lambda\bar{\lambda})^{-1}(X^{*2}X^2)^{-1}$ и аналогичное соотношение для X^*X, получаем, что v — также собственный вектор операторов X^*X и XX^*. Векторы v, Xv, X^2v порождают инвариантное подпространство для X и X^*. Действительно, X^*v коллинеарен $X^*X^{*2}X^2v = \bar{\lambda}X^2v$, X^*Xv коллинеарен v, а X^*X^2v коллинеарен $X^*X^2XX^*X^*Xv - \lambda\bar{\lambda}Xv$.

Теперь пусть $\lambda = 0$. Обозначим

$$H^0 = \operatorname{Ker} X^{*2} \cap \operatorname{Ker} X^2,$$

$$H^1 = \overline{\operatorname{Ker} X^* + \operatorname{Ker} X}.$$

Тогда из того, что $X^*\operatorname{Ker} X^{*2} \subset \operatorname{Ker} X^*$ и $X\operatorname{Ker} X^2 \subset \operatorname{Ker} X$, следует

$$XH^0 \subset H^1, \quad X^*H^0 \subset H^1.$$

Далее, $\overline{XH^1} = \overline{X\operatorname{Ker} X^*}$. Очевидно, $X\operatorname{Ker} X^* \subset \operatorname{Ker} X^2$. Докажем, что $X\operatorname{Ker} X^* \subset \operatorname{Ker} X^{*2}$. Пусть $x \in \operatorname{Ker} X^*$. Тогда

$$(X^{*2}Xx, X^{*2}Xx) = (XX^{*2}Xx, X^*Xx) = (X^*X^2X^*x, X^*Xx) = 0.$$

Аналогичные утверждения можно доказать и для $X^*\operatorname{Ker} X$. Из этого следует, что

$$XH^1 \subset H^0, \quad X^*H^1 \subset H^0.$$

Заметим, что $H^0 \cap H^1$ является инвариантным подпространством представления. Для неприводимого представления либо $H^0 \cap H^1 = 0$, либо $H^0 \cap H^1 = H$.

Рассмотрим вначале первый случай:

$$H^{0\perp} = \overline{(\operatorname{Ker} X^{*2})^\perp + (\operatorname{Ker} X^2)^\perp} =$$

$$= \overline{(\operatorname{Ker} X^2X^{*2})^\perp + (\operatorname{Ker} X^{*2}X^2)^\perp} = \overline{\operatorname{Im} X^2X^{*2} + \operatorname{Im} X^{*2}X^2} \subset H^1.$$

Поскольку $H^0 \cap H^1 = 0$, последнее включение может выполняться только в случае $H = H^0 \oplus H^1$. Если $H^0 = 0$, то $X = 0$. Предположим, это не так. Но тогда ограничение пары операторов XX^* и X^*X на H^0 должно быть неприводимым. Действительно, если, например, $H^0 = H^{0'} \oplus H^{0''}$ — разложение H^0 в сумму инвариантных подпространств относительно XX^* и X^*X, то, как нетрудно убедиться, подпространство $\overline{H^{0'} + XH^{0'} + X^*H^{0'}}$ будет инвариантным для всего представления и ортогональным к $H^{0''}$, а это противоречит неприводимости всего представления. Из этого утверждения и из того, что XX^* и X^*X коммутируют, следует, что H^0 одномерно. Теперь $H^0 + XH^0 + X^*H^0$ — инвариантное подпространство, значит, оно совпадает с H, и H не более чем трехмерно.

Остался случай $H^0 = H^1 = H$. Это означает, что $X^2 = 0$. Пусть $H^+ = \operatorname{Ker} X$, $H^- = \operatorname{Ker} X^*$. Тогда $XH^- \subset H^+$, $XH^+ = 0$, $X^*H^+ \subset H^-$, $X^*H^- = 0$. Снова видим, что $H^- \cap H^+$ — инвариантное подпространство. Если $H^- \cap H^+ = H$, то $X = 0$. Если $H^- \cap H^+ = 0$, то

$$H^{-\perp} = (\operatorname{Ker} XX^*)^{\perp} = \overline{\operatorname{Im} XX^*} \subset H^+.$$

Отсюда следует, что $H = H^- \oplus H^+$. Нетрудно проверить, что ограничение X^*X на H^- является неприводимым, значит, H^- одномерно и $H^- + XH^-$ — двумерное инвариантное подпространство, которое по условию неприводимости совпадает с H.

4. Описание неприводимых представлений $\mathcal{R}$. В п. 3 было доказано, что неприводимые $*$-представления $\mathcal{R}$ могут существовать только в размерностях 1, 2 и 3. Случай размерностей 1, 2 рассмотрен в п. 1. О представлениях размерности 3 говорится в следующей лемме.

Лемма 5. *Любое неприводимое $*$-представление $*$-алгебры $\mathcal{R}$ размерности 3 эквивалентно одному из следующих неэквивалентных неприводимых $*$-представлений:*

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_3\sqrt{-1} \\ \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

где $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ и либо $|\lambda_3| \neq \lambda_1 = \lambda_2$, либо $|\lambda_3| < \lambda_1$, $|\lambda_3| < \lambda_2$ и $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Кроме того, требуется условие $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$.

Доказательство. Рассмотрим спектр оператора XX^*. Этот оператор не может быть скалярным, так как тогда X был бы кратен унитарному, а значит, приводился бы к диагональному виду. Значит, либо XX^* имеет три собственных числа кратности 1, либо одно кратности 1 и одно кратности 2. Выберем среди собственных значений кратности 1 наименьшее. Обозначим его через t_3, а соответствующий собственный вектор через x. Поскольку операторы X^*X, X^2X^{*2}, $X^{*2}X^2$ коммутируют с X^*X, x является собственным вектором и для них.

Заметим, что в случае, если оператор X вырожден, т. е. 0 — собственное значение XX^*, 0 не может иметь кратность 2 (иначе ранг X был бы равен 1 и $\operatorname{Im} X + \operatorname{Im} X^*$ было бы инвариантным подпространством размерности не больше 2). Из этого следует $t_3 = 0$ и $X^*x = 0$.

Докажем, что векторы x, Xx, X^2x порождают инвариантное подпространство (а значит, и все H). Напомним, что символом λ мы обозначили комплексное число такое, что $X^3 = \lambda I$. Если $\lambda \neq 0$, то

$$X^*x = \frac{1}{\lambda} X^3 X^* x \in \mathbb{C} X^2 x,$$

иначе $X^*x = 0$. Далее,

$$X^*Xx \in \mathbb{C}x,$$

$$X^*X^2x \in \mathbb{C}X^*X^2X^*Xx = \mathbb{C}XX^{*2}X^2x \subset \mathbb{C}Xx.$$

Здесь мы воспользовались тем, что $X^*Xx \neq 0$. Предположим, это не так, тогда $Xx = 0$, $\lambda = 0$, и, значит, $X^*x = 0$, что противоречит тому, что представление неприводимо и трехмерно.

Теперь проверим, что векторы x, Xx, X^2x ортогональны. Они линейно независимы. Нетрудно проверить, что они будут собственными векторами оператора XX^*. Поскольку кратность t_3 равна 1, x ортогонален Xx и X^2x. $(Xx, X^2x) = (x, X^*X^2x) = 0$, так как X^*X^2x параллелен Xx. Рассмотрим матрицу оператора X в базисе, полученном нормированием векторов x, Xx, X^2x. Матрица будет иметь вид (8), причем $\lambda_3^2 = t_3$. Из того, как мы выбирали t_3 среди других собственных чисел XX^* и из $\lambda = \sqrt{-1}\,\lambda_1\lambda_2\lambda_3$, где $\lambda^3 + \bar{\lambda}^3 = 0$, следуют остальные условия леммы. Условие $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$ получаем, если подставить X в уравнение (5).

Неэквивалентность приведенных представлений следует из того, что указанная процедура не зависит от базиса, т. е. числа $\{\lambda_i\}$ являются инвариантами представления.

Осталось проверить, что матрица (8) действительно задает неприводимое представление. Условия (4) – (6) проверяются непосредственно, а для доказательства неприводимости достаточно рассмотреть операторы XX^* и X^*X и заметить, что проекторы на векторы базиса принадлежат представлению, а затем, рассматривая произведения этих проекторов с операторами X и X^*, показать, что любая матрица 3×3 принадлежит представлению.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Любая неприводимая тройка операторов* A_1, A_2, A_3 *в сепарабельном гильбертовом пространстве такая, что* $A_1 + A_2 + A_3 = 0$ *и* $\sigma(A_i) \subset \subset \{-1, 0, 1\}$, $i = 1, 2, 3$, *унитарно эквивалентна одной из следующих неэквивалентных неприводимых троек операторов*:

1) *семь представлений размерности* 1:

а) $A_1 + A_2 + A_3 = 0$;

б) $A_1 = -1$, $A_2 = 1$, $A_3 = 0$ *и все перестановки этих операторов*;

2) *одно представление размерности* 2:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1/2 & \sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{pmatrix};$$

3) *семейство представлений размерности* 3:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_3\sqrt{-1} \\ \lambda_1 & 0 & \lambda_2 \\ -\lambda_3\sqrt{-1} & \lambda_2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1\left(-1/2-(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) & \lambda_3\left(-(1/2)\sqrt{-1}-\sqrt{3}/2\right) \\ \lambda_1\left(-1/2+(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) & 0 & \lambda_2\left(-1/2-(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) \\ \lambda_3\left((1/2)\sqrt{-1}-\sqrt{3}/2\right) & \lambda_2\left(-1/2+(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & \lambda_1\left(-1/2+(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) & \lambda_3\left(-(1/2)\sqrt{-1}+\sqrt{3}/2\right) \\ \lambda_1\left(-1/2-(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) & 0 & \lambda_2\left(-1/2+(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) \\ \lambda_3\left((1/2)\sqrt{-1}+\sqrt{3}/2\right) & \lambda_2\left(-1/2-(\sqrt{3}/2)\sqrt{-1}\right) & 0 \end{pmatrix};$$

где $\lambda_i \in \mathbf{R}$, $i = 1, 2, 3$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$, $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 = 1$, *и либо* $|\lambda_3| \neq \lambda_1 = \lambda_2$, *либо* $|\lambda_3| < \lambda_1$, $|\lambda_3| < \lambda_2$ *и* $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Доказательство. Утверждение является прямым следствием лемм 1, 4, 5.

Автор благодарен Ю. С. Самойленко за постановку задачи и ценные советы при подготовке работы и В. Л. Островскому, который обратил внимание автора на понятие центрированного элемента, что помогло существенно упростить доказательство основного результата.

1. *Klyachko A. A.* Stable bundles, representation theory and Hermitian operators // Selecta Math. – 1998. – **4**. – P. 419 – 445.
2. *Fulton W.* Eigenvalues, invariant factors, highest weights, and Schubert calculus // Bull. Amer. Math. Soc. – 2000. – **37**, № 3. – P. 209 – 249.
3. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Когда сумма идемпотентов или проекторов кратна единице // Функцион. анал. и прил. – 2000. – **34**, № 4. – С. 91 – 93.
4. *Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* Скалярные операторы, представимые суммой проекторов // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 7. – С. 939 – 952.
5. *Кругляк С. А., Рабанович В. И., Самойленко Ю. С.* О суммах проекторов // Функцион. анал. и прил. – 2002. – **36**, № 3. – С. 20 – 35.
6. *Кругляк С. А., Ройтер А. В.* Локально-скалярные представления графов в категории гильбертовых пространств // Локально-скалярные представления и разделяющие функции. – Киев, 2003. – С. 3 – 21. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2003.4).
7. *Morrel B., Muhly P.* Centered operators // Stud. Math. – 1974. – **51**. – P. 251 – 263.
8. *Ostrovskii V., Samoilenko Yu.* Introduction to the theory of representations of finitely presented *-algebras. 1. Representations by bounded operators // Rev. Math. and Math. Phys. – 1999. – **11**. – P. 1 – 261.

Получено 16.01.2003