УДК 517.982.26

Н. В. Зорий (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЗАДАЧИ РАВНОВЕСИЯ ДЛЯ ПОТЕНЦИАЛОВ С ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ

We investigate the problem of the minimum of energy over fairly general (generally speaking, noncompact) classes of real-valued Radon measures associated with a system of sets in a locally compact space in the presence of an external field. The classes of admissible measures are determined by normalization or by normalization and a constraint σ. In both cases, we establish sufficient conditions for the existence of minimizing measures and prove that, under fairly general assumptions, these conditions are also necessary. We show that, in the case of sufficiently large σ, there exists a close correlation between the facts of unsolvability (or solvability) of both variational problems considered.

Досліджується задача про мінімум енергії при наявності зовнішніх полів над вельми загальними (взагалі кажучи, некомпактними) класами дійсних мір Радона, асоційованих з системою множин в локально компактному просторі. Класи допустимих мір задаються через певне нормування або ж через нормування та деяку мажоранту міру σ. В обох постановках знайдено достатні умови існування мінімізуючих мір та доведено, що при досить широких припущеннях вони є одночасно і необхідними. Показано, що між явищами нерозв'язності (чи розв'язності) відповідних варіаційних задач при досить великих σ існує тісний взаємозв'язок.

Введение. Настоящая работа посвящена экстремальным задачам теории потенциала в локально компактном (отделимом) пространстве $\mathbf{X}$. Используемые понятия и результаты теории мер и интегрирования содержатся в [1, 2] (см. также краткие обзоры в [3, 4]).

Пусть $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(\mathbf{X})$ — линейное пространство всех вещественнозначных мер Радона ν на $\mathbf{X}$, снабженное топологией *широкой* сходимости [1]; в дальнейшем вещественнозначную меру Радона будем называть просто *мерой*. *Ядро* κ на $\mathbf{X}$ определяется как полунепрерывная снизу функция $\kappa : \mathbf{X}\times\mathbf{X} \to (-\infty, \infty]$ [3, 5].

Понятие *емкости* множества Q относительно ядра κ связано, как известно, с задачей о минимизации *энергии* $\kappa(\nu, \nu)$ в классе всех единичных мер, сосредоточенных на Q. Исследование существования решений этой вариационной задачи составляет важнейшую часть классической теории потенциала и ее обобщений (см., например, [3, 6, 7]).

В последние десятилетия возрос интерес к задаче о минимизации энергии при наличии *внешних полей*. Речь идет о минимизации функционала

$$\mathcal{F}_f(\nu) := \kappa(\nu, \nu) - 2\int f\, d\nu, \tag{1}$$

где f — заданная в $\mathbf{X}$ вещественнозначная универсально измеримая функция. Новый импульс в развитии этой тематики, берущей свое начало еще с работ Гаусса и Фростмана, обусловлен появившимися в 80-е годы многочисленными приложениями задачи о минимизации $\mathcal{F}_f(\nu)$ к конструктивной теории функций. Отметим, что указанная задача имеет важные приложения как в своей традиционной постановке (когда классы допустимых мер задаются определенной нормировкой), так и в постановке, в которой допустимые распределения ограничены сверху некоторой фиксированной мажорантой $\sigma \in \mathfrak{M}$ (см. [8]).

В настоящей работе задача о минимизации $\mathcal{F}_f(\nu)$ рассматривается над весьма общими (вообще говоря, *некомпактными*) классами мер, ассоциированных с системой множеств в $\mathbf{X}$. Классы допустимых мер задаются одним из упомянутых выше способов: либо некоторой нормировкой, либо нормировкой и фиксированной мажорантой σ.

Для задач обоих типов при достаточно общих предположениях на их исходные параметры найдены *необходимые и достаточные* условия существования минимизирующих мер. При этом в случае достаточно больших σ выявлена тесная корреляция между феноменами их неразрешимости (или разрешимости).

Исследования проводятся в рамках некоторого общего подхода, основы которого заложены в [4, 9, 10]. Часть результатов настоящей работы анонсирована в [11].

1. Обозначения. Следуя [3], всюду в работе предполагаем, что либо пространство $\mathbf{X}$ компактно, либо ядро κ неотрицательно. *Энергия* и *потенциал* меры ν относительно ядра κ определяются соответственно равенствами (см. [3])

$$\kappa(\nu, \nu) := \int \kappa(x, y) d(\nu \otimes \nu)(x, y)$$

и

$$\kappa_\nu(x) := \kappa(x, \nu) := \int \kappa(x, y) d\nu(y), \quad x \in \mathbf{X}$$

(конечно, если соответствующий интеграл определен — как конечное число или $\pm\infty$). Обозначим через $\mathcal{E} = \mathcal{E}_\kappa(\mathbf{X})$ множество всех мер ν с $-\infty < \kappa(\nu, \nu) < +\infty$.

Пусть для заданного множества $Q \subset \mathbf{X}$ $\mathfrak{M}^+(Q)$ обозначает класс всех мер $\nu \geq 0$, сосредоточенных на Q. Обозначим $\mathcal{E}^+(Q) := \mathfrak{M}^+(Q) \cap \mathcal{E}$. В случае $Q = \mathbf{X}$ указание на множество Q в этих обозначениях будем опускать.

Пусть $S(\cdot)$ обозначает носитель меры или функции. Если $\mathbf{Y}$ — топологическое пространство, то через $\Phi(\mathbf{Y})$ обозначим класс всех полунепрерывных снизу функций ψ на $\mathbf{Y}$ таких, что либо $\psi \geq 0$, либо $S(\psi)$ компактно.

2. Постановка задачи. Пусть $m, p \in \mathbb{N}$, где $m \leq p$, фиксированы. Обозначим

$$I := \{1, \ldots, p\}, \quad I^+ := \{1, \ldots, m\}, \quad I^- := I \setminus I^+,$$

$$\alpha_i := \begin{cases} 1, & \text{если} \quad i \in I^+; \\ -1, & \text{если} \quad i \in I^-. \end{cases}$$

Пусть $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ — упорядоченная совокупность непустых множеств $A_i \subset \mathbf{X}$, $i \in I$, удовлетворяющих условию

$$\overline{A}_i \cap \overline{A}_j = \varnothing \quad \forall\, i \in I^+, \quad j \in I^-; \tag{2}$$

множество всех таких $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(m, p)$.

Зафиксировав $\mathcal{A} \in \mathfrak{A}$, обозначим через $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ подмножество из $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$, состоящее из всех *линейных комбинаций* вида $\mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i$, где $\mu^i \in \mathfrak{M}^+(A_i)$ для всех $i \in I$.

Два элемента из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$,

$$\mu_1 = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_1^i \quad \text{и} \quad \mu_2 = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu_2^i,$$

будем считать *тождественными* $(\mu_1 \equiv \mu_2)$ в том и только в том случае, когда

$$\mu_1^i = \mu_2^i \quad \forall\, i \in I.$$

Очевидно, что при так определенном отношении тождества в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ соответствие

$$\prod_{i \in I} \mathfrak{M}^+(A_i) \ni (\mu^i)_{i \in I} \mapsto \mu = \sum_{i \in I} \alpha_i \mu^i \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$$

взаимно однозначно.

***Замечание* 1.** Отношение тождества в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$, вообще говоря, сильнее, чем отношение равенства мер, унаследованное из $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$. (Для обозначения последнего сохраним символ $=$.) Эти два бинарных отношения в $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ эквивалентны в том и только в том случае, когда множества A_i, $i \in I$, попарно не пересекаются.

Будем писать $\mu_1 \le \mu_2$, где $\mu_1, \mu_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, если $\mu_2^i - \mu_1^i \ge 0$ для всех $i \in I$. Для произвольного фиксированного $\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ обозначим

$$\mathfrak{M}^\sigma(\mathcal{A}) := \{\mu \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \colon \mu \le \sigma\}.$$

Работа посвящена исследованию проблемы разрешимости вариационных задач о минимизации $\mathcal{F}_f(\mu)$ (см. (1)), где μ пробегает некоторые подклассы из $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ или $\mathfrak{M}^\sigma(\mathcal{A})$. Для единообразия изложения введем обозначение[1] $\mathfrak{M}^\omega(\mathcal{A})$, где $\omega \in \{\infty\} \cup \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ и

$$\mathfrak{M}^\omega(\mathcal{A}) := \begin{cases} \mathfrak{M}(\mathcal{A}), & \text{если} \quad \omega = \infty; \\ \mathfrak{M}^\sigma(\mathcal{A}), & \text{если} \quad \omega = \sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A}); \end{cases}$$

в случае $\omega = \infty$ индекс ω в этом и других обозначениях будем, как правило, опускать. При этом будем считать, что $\sigma \le \infty$ для всех $\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Функцию f из (1) определим следующим образом. Всюду далее будем считать, что для каждого $i \in I$ существуют $f_{i1}, f_{i2} \in \Phi(\overline{A_i})$ такие, что значение f в любой точке $x \in \overline{A_i}$ определено тогда и только тогда, когда определена разность $f_{i1}(x) - f_{i2}(x)$, причем[2]

$$f(x) = f_{i1}(x) - f_{i2}(x). \tag{3}$$

Для данного $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in I}$ обозначим

$$A := \bigcup_{i \in I} A_i, \quad A^+ := \bigcup_{i \in I^+} A_i, \quad A^- := \bigcup_{i \in I^-} A_i.$$

Пусть функция g задана, положительна и непрерывна по крайней мере всюду на $\overline{A}$. Зафиксировав вектор $a = (a_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}^p$ с $a_i > 0$, $i \in I$, для данных $\mathcal{A}$, κ, g, f и ω, $\omega \in \{\infty\} \cup \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, определим следующие классы мер:

$$\mathcal{E}^\omega(\mathcal{A}, a, g) := \left\{\mu \in \mathfrak{M}^\omega(\mathcal{A}) \colon \mu \in \mathcal{E}, \quad \int g\, d\mu^i = a_i \quad \forall i \in I\right\},$$

$$\mathcal{E}^\omega_f(\mathcal{A}, a, g) := \left\{\mu \in \mathcal{E}^\omega(\mathcal{A}, a, g) \colon \int f\, d\mu \text{ определен}^3 \text{ и } \ne -\infty\right\}.$$

Обозначим

$$\mathcal{F}^\omega_f(\mathcal{A}, a, g) := \inf_{\mu \in \mathcal{E}^\omega_f(\mathcal{A}, a, g)} \mathcal{F}_f(\mu)$$

(как обычно, инфимум над пустым множеством полагаем равным $+\infty$).

Задачу о минимизации $\mathcal{F}_f(\mu)$ в классе $\mathcal{E}^\omega_f(\mathcal{A}, a, g)$ назовем $\mathcal{F}^\omega_f(\mathcal{A}, a, g)$-

---

[1] Чтобы обосновать введение такого обозначения, отметим, что класс $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$ является точной верхней гранью упорядоченного по отношению включения множества всех $\mathfrak{M}^\sigma(\mathcal{A})$, где $\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

[2] Условие (3) выполняется, в частности, в случае $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathfrak{M}$ фиксировано. Это вытекает из того факта [3], что потенциалы неотрицательных мер полунепрерывны снизу на $\mathbf{X}$.

[3] Заметим, что тогда для всех $\mu \in \mathcal{E}^\omega_f(\mathcal{A}, a, g)$ функция f необходимо определена $|\mu|$-почти всюду в $\mathbf{X}$.

задачей. $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задача называется *разрешимой*, если существуют *минимизирующие* меры λ:

$$\lambda \in \mathcal{E}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g), \quad \mathcal{F}_f(\lambda) = \mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g).$$

Множество (возможно, пустое) всех таких λ обозначим через $\mathcal{W}^{\omega} = \mathcal{W}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Наряду со своей очевидной электростатической интерпретацией сформулированная задача имеет многочисленные приложения к ряду задач теории потенциала и теории аппроксимации (см., например, [8] и приведенную в ней библиографию).

Всюду далее будем считать выполненным (хотя бы) один из следующих случаев:

Случай I. $m = p$ (т. е. $I^- = \varnothing$).

Случай II. $g_{\min} := \inf_{x \in A} g(x) > 0$.

В случае, когда множества A_i, $i \in I$, компактны, а ядро κ непрерывно на $A^+ \times A^-$, достаточные условия разрешимости $\mathcal{F}_f^{\infty}(\mathcal{A}, a, g)$-задачи содержатся в [5]. Легко видеть, что рассуждения из [5] остаются в силе (при сохранении других условий) и для $\omega \neq \infty$.

Для логарифмического ядра на плоскости известны некоторые достаточные условия разрешимости $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задачи и в некомпактном случае (см. обзор в [8]). Однако их формулировки, как и методы доказательства, являются специфическими для логарифмической теории потенциала и на другие пространства или ядра не переносятся.

Чтобы решить $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задачу в общем случае произвольного локально компактного пространства $\mathbf{X}$ и некомпактных множеств A_i, $i \in I$, всюду далее будем считать ядро κ *положительно определенным*. Это, напомним, означает, что κ симметрично (т. е. $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ для всех x, y) и энергия $\kappa(\nu, \nu)$, $\nu \in \mathfrak{M}(\mathbf{X})$, неотрицательна, если только определена. Тогда множество $\mathcal{E}$ образует предгильбертово пространство со скалярным произведением

$$\kappa(\nu_1, \nu_2) := \int \kappa(x, y)\, d(\nu_1 \otimes \nu_2)(x, y)$$

и полунормой $\|\nu\| := \sqrt{\kappa(\nu, \nu)}$ (см., например, [3]).

Трудности, возникающие при исследовании проблемы разрешимости $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задачи в некомпактном случае, преодолеваются путем эффективного использования в предгильбертовом пространстве $\mathcal{E}$ обеих топологий — широкой, индуцированной из $\mathfrak{M}$, и *сильной* (т. е. задаваемой полунормой $\|\cdot\|$). Чтобы эти топологии были надлежащим образом согласованы, ядро κ предполагаем удовлетворяющим свойству *совершенности* (более общо, *согласованности*) [3] в случае I или $\mathcal{A}$*-совершенности* (более общо, $\mathcal{A}$*-согласованности*) [9] в случае II (см. п. 4 ниже).

Пусть A_i, $i \in I$, замкнуты. При достаточно общих предположениях на κ, g и f в работе получен *критерий* разрешимости $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. А именно, доказано, что эта задача разрешима для всех a и ω, $\omega \in \{\infty\} \cup \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, тогда и только тогда, когда внутренняя емкость $C(A)$ множества A конечна. Если, напротив, для некоторого $i_0 \in I$ выполняется $C(A_{i_0}) = +\infty$, то для каждого a с достаточно большим a_{i_0} существует $\sigma = \sigma(a) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ такое, что $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задача не разрешима для всех $\omega \geq \sigma$.

Полученные результаты конкретизированы для ядер Ньютона, Рисса, Грина в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$.

3. Предварительные сведения. Этот пункт содержит несколько простых утверждений из теории мер и интегрирования, часто используемых в работе.

Зафиксируем меру $\nu \geq 0$. Следуя [2] (п. 4.13.1), функцию ψ на $\mathbf{X}$ назовем ν-σ-*конечной*, если $S(\psi)$ содержится в счетном объединении ν-интегрируемых множеств[4].

Пусть E — ν-измеримое множество, ν_E — сужение ν на E, ψ — вещественнозначная функция на $\mathbf{X}$. Комбинируя предложения $1-3$ из [1] и предложение 4.14.6 из [2], получаем следующие леммы.

Лемма 1. *Предположим, что функция ψ либо принадлежит классу $\Phi(\mathbf{X})$, либо неотрицательна и ν-σ-конечна. Тогда справедливо тождество*

$$\int \psi \, d\nu_E = \lim_{K \uparrow E} \int \psi \, d\nu_K,$$

где K пробегает направленное по отношению включения семейство всех компактных подмножеств из E.

Лемма 2. *Пусть функция ψ неотрицательна и ν-σ-конечна. Тогда*

$$\int \psi \, d\nu_E = \int \psi \varphi_E \, d\nu,$$

где φ_E — характеристическая функция множества E.

Говорят [3], что некоторое утверждение $R(x)$, содержащее переменную точку $x \in \mathbf{X}$, справедливо *приблизительно всюду* (пр. вс.) в Q (где Q — множество в $\mathbf{X}$), если множество всех тех $x \in Q$, для которых $R(x)$ ложно, имеет нулевую внутреннюю емкость.

Вследствие леммы 2.3.1 из [3] справедливо следующее утверждение.

Лемма 3. *Пусть $\nu \in \mathcal{E}^+(Q)$ — ограниченная мера и $\psi \geq q$, где $q \in [-\infty, +\infty]$, пр. вс. в Q. Тогда $\psi \geq q$ ν-почти всюду в $\mathbf{X}$.*

4. Концепции совершенных, согласованных, $\mathcal{A}$-совершенных и $\mathcal{A}$-согласованных ядер. Для данных $\mathcal{A}$ и κ обозначим

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A}) := \mathfrak{M}(\mathcal{A}) \cap \mathcal{E}.$$

Введем также обозначение $\overline{\mathcal{A}} := (\overline{A_i})_{i \in I}$. Тогда вследствие условия (2) имеем $\overline{\mathcal{A}} \in \mathfrak{A}$.

Известно, что пространство $\mathcal{E}$, вообще говоря, не полно в сильной топологии. Действительно, согласно классическим результатам Картана [6], $\mathcal{E}$ не полно даже в случае евклидова пространства $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и ньютонова ядра $\kappa(x, y) = |x - y|^{2-n}$.

С другой стороны, Картаном [6] и автором [12, 13] доказано, что в случае ньютонова ядра конусы мер $\mathcal{E}^+(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\overline{\mathcal{A}})$ соответственно, рассматриваемые как подпространства из $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$, сильно полны, причем из сильной сходимости в этих подпространствах вытекает широкая сходимость к тому же пределу.

Концепции *совершенных* и *согласованных* ядер [3] и концепции $\mathcal{A}$-*совершенных* и $\mathcal{A}$-*согласованных* ядер [9] получены постулированием части упомянутых результатов соответственно из [6] и [12, 13] на случай произвольных по-

[4] Это условие выполняется, в частности, если мера ν ограничена (т. е. $\nu(\mathbf{X}) < +\infty$) или пространство $\mathbf{X}$ счетно на бесконечности.

ложительно определенного ядра κ и локально компактного пространства $\mathbf{X}$. Ввиду основополагающего значения этих понятий в настоящем исследовании напомним их определения.

4.1. Всюду далее S — некоторое направленное множество.

Определение 1 [3]. *Ядро называется совершенным, если выполняются следующие условия*:

P_1) *пространство* $\mathcal{E}^+$ *сильно полно*;

P_2) *сильная топология в* $\mathcal{E}^+$ *сильнее широкой топологии в* $\mathcal{E}^+$.

Определение 2 [3]. *Ядро называется согласованным, если выполняется следующее условие*:

C) *если* ν — *широкая предельная точка сильной направленности Коши* $(\nu_s)_{s\in S}$ *из* $\mathcal{E}^+$, *то* $\nu_s \to \nu$ *сильно.*

Предложение 1 [3]. *Для того чтобы ядро было совершенным, необходимо и достаточно, чтобы оно было согласованным и строго положительно определенным.*

Напомним (см. [7]), что (положительно определенное) ядро κ называется *строго положительно определенным*, если утверждения $\kappa(\nu, \nu) = 0$, $\nu \in \mathcal{E}$, и $\nu = 0$ равносильны.

***Пример* 1.** В евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ядро Ньютона и, более общо, ядра Рисса $|x-y|^{\alpha-n}$, $0 < \alpha < n$, и ядра Грина g_D (здесь $D \subset \mathbb{R}^n$ — открытое множество, g_D — его обобщенная функция Грина) совершенны [6, 14, 15].

4.2. Пусть $\mathbb{B}(\mathcal{A})$ — класс всех сильных направленностей Коши $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{A})$ с

$$\sup_{s\in S} |\mu_s|(\mathbf{X}) < +\infty. \tag{4}$$

Определение 3 [9]. *Ядро называется* $\mathcal{A}$*-совершенным, если для каждой направленности* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *выполняются следующие условия*:

$\mathcal{A}P_1$) $(\mu_s)_{s\in S}$ *сильно сходится в* $\mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\overline{\mathcal{A}})$;

$\mathcal{A}P_2$) *если* $\mu \in \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\overline{\mathcal{A}})$ — *сильный предел* $(\mu_s)_{s\in S}$, *то* $\mu_s \to \mu$ *широко.*

Определение 4 [9]. *Ядро называется* $\mathcal{A}$*-согласованным, если для каждой направленности* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *выполняется следующее условие*:

$\mathcal{A}C$) *если* μ — *широкая предельная точка* $(\mu_s)_{s\in S}$, *то* $\mu \in \mathcal{E}$ *и* $\mu_s \to \mu$ *сильно.*

Предложение 2 [9]. *Для того чтобы ядро было* $\mathcal{A}$*-совершенным, необходимо и достаточно, чтобы оно было* $\mathcal{A}$*-согласованным и удовлетворяло следующему условию*:

$\mathcal{A}SD$) *если* $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A})$ *сходится сильно к* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\overline{\mathcal{A}})$, *то* $\gamma_1 = \gamma_2$.

***Замечание* 2.** Свойство $\mathcal{A}SD$), очевидно, необходимо выполняется, если κ строго положительно определено. Обратно, из свойства $\mathcal{A}SD$) вытекает строгая положительная определенность сужения κ на любое компактное множество $K \subset A_i$, $i \in I$. Более общо, если κ удовлетворяет свойству $\mathcal{A}SD$), то для любой ограниченной меры $\nu \in \mathcal{E}$, сосредоточенной на A_i, $i \in I$, утверждения $\|\nu\| = 0$ и $\nu = 0$ эквивалентны [9].

***Пример* 2.** В $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ядра Рисса произвольного порядка $\alpha \in (0, n)$ (и, в частности, ядро Ньютона) $\mathcal{A}$-совершенны для любого $\mathcal{A}$ [12, 13]. Ядра Грина g_D (где $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$) $\mathcal{A}$-совершенны для любого $\mathcal{A}$ с $\operatorname{dist}(A^+, A^-) > 0$ [16].

4.3. Замечание **3.** Вопрос о соотношениях между классами согласованных (совершенных) и $\mathcal{A}$-согласованных ($\mathcal{A}$-совершенных) ядер до конца не исследован. Очевидно, впрочем, что они не тождественны. С другой стороны, из результатов работ [3, 9] вытекает, что эти классы весьма близки. В частности, справедливо следующее утверждение.

Предложение 3. *Пусть множество всех* $\nu \in \mathcal{E}$ *таких, что* $\kappa(\cdot, \nu)$ *непрерывно на* $\mathbf{X}$ *и имеет компактный носитель, плотно в* $\mathcal{E}$ *в сильной топологии. Тогда* κ *согласованно и* $\mathcal{A}$*-согласованно для каждого* $\mathcal{A}$, *удовлетворяющего условию*

$$\sup_{(x,y) \in A^+ \times A^-} \kappa(x, y) < +\infty.$$

4.4. Применение концепций совершенных и согласованных (соответственно, $\mathcal{A}$-совершенных и $\mathcal{A}$-согласованных) ядер позволило построить теорию внутренних емкостей множеств (соответственно, конденсаторов) в $\mathbf{X}$ (см. соответственно [3] и [4, 9, 10]).

Нам понадобится основной результат теории внутренних емкостей множеств [3] в следующем, несколько измененном, виде.

Предложение 4. *Пусть* κ *согласованно или* $\mathcal{A}$*-согласованно, где* $\mathcal{A}$ *фиксировано. Тогда для любого* $E \subset A_i$, $i \in I$, *с* $C(E) < +\infty$ *существует мера* $\theta = \theta_E \in \mathcal{E}^+(E)$ *со свойствами*

$$\theta(\mathbf{X}) = \|\theta\|^2 = C(E), \tag{5}$$

$$\kappa(x, \theta) \geq 1 \quad \textit{пр. вс. в} \quad E, \tag{6}$$

$$\kappa(x, \theta) \leq 1 \quad \forall x \in S(\theta).$$

Действительно, в случае согласованного κ это утверждение доказано в [3]; при условии $\mathcal{A}$-согласованности оно доказывается без каких-либо изменений.

Мера θ называется *внутренним емкостным распределением,* ассоциированным с E. Заметим, что она единственна, если κ совершенно или $\mathcal{A}$-совершенно.

5. Элементарные свойства экстремалей. Чтобы $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задача имела смысл, естественно предположить выполненным условие

$$\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$$

(или, что равносильно, $\mathcal{E}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g) \neq \varnothing$). Достаточные и (или) необходимые условия для того, чтобы выполнялись эти соотношения, содержатся в следующих леммах.

Лемма 4. *Пусть* $\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *и для всех* $i \in I$ *выполняются следующие условия*:

а) $\alpha_i f(x) \neq -\infty$ *локально* σ^i*-почти всюду*[5];

б) $\sigma^i_K \in \mathcal{E}$, *где* K — *произвольное компактное множество*;

в) $\int g \, d\sigma^i > a_i$.

Тогда $\mathcal{F}_f^{\sigma}(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$.

---

[5] Если некоторое высказывание содержит выражение $f(x)$, то подразумевается, очевидно, что значение f в точке x определено.

Доказательство. Зафиксируем временно $i \in I$. Применяя лемму 1 к (непрерывной и положительной) функции g, из условия в) выводим существование компактного множества $K \subset A_i$ такого, что

$$\int g\, d\sigma_K^i > a_i.$$

Обозначим $E := \{x \in K : \alpha_i f(x) \neq -\infty\}$, $E_n := \{x \in K : \alpha_i f(x) > -n\}$, где $n \in \mathbb{N}$. Тогда вследствие условия а) имеем

$$\int g \varphi_E\, d\sigma_K^i > a_i.$$

А поскольку $g\varphi_{E_n} \uparrow g\varphi_E$ (где $n \to +\infty$), а мера σ_K^i ограничена, то в силу предложения 4.5.3 из [2] и леммы 2 для произвольного достаточно большого $n_0 \in \mathbb{N}$ получаем

$$a_i < \int g \varphi_{E_{n_0}}\, d\sigma_K^i = \int g\, d\sigma_{E_{n_0}}^i.$$

Отсюда, применяя повторно лемму 1, выводим существование компактного множества $K_i \subset E_{n_0}$, удовлетворяющего условию

$$\int g\, d\sigma_{K_i}^i > a_i. \tag{7}$$

Тогда, очевидно,

$$\int \alpha_i f\, d\sigma_{K_i}^i \geq -n_0 \sigma_{K_i}^i(\mathbf{X}) > -\infty. \tag{8}$$

Учитывая условие б), из соотношений (7) и (8) находим

$$\sum_{i \in I} \frac{\alpha_i a_i \sigma_{K_i}^i}{\int g\, d\sigma_{K_i}^i} \in \mathcal{E}_f^\sigma(\mathcal{A}, a, g).$$

Лемма 4 доказана.

На множестве $\mathfrak{A}$ определим отношение частичного упорядочения $\prec$, где

$$\mathcal{A}' \prec \mathcal{A}, \quad \text{если} \quad A_i' \subset A_i \quad \text{для всех} \quad i \in I.$$

Здесь $\mathcal{A}' := (A_i')_{i \in I}$. Пусть для данного $\mathcal{A}$ $\{\mathcal{K}\} = \{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$ обозначает множество всех $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I} \in \mathfrak{A}$ таких, что $\mathcal{K} \prec \mathcal{A}$ и K_i, $i \in I$, компактны.

Лемма 5. *Следующие утверждения равносильны*:

i) $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$;

ii) $\prod_{i \in I} C(\{x \in A_i : \alpha_i f(x) > -\infty\}) > 0$;

iii) $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g) < +\infty$ *для некоторого* $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$;

iv) $\mathcal{F}_f^\sigma(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$ *для некоторого* $\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$;

v) $\mathcal{F}_f^{\sigma_0}(\mathcal{K}, a, g) < +\infty$ *для некоторых* $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$ *и* $\sigma_0 \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g) \downarrow \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g), \tag{9}$$

где $\mathcal{K}$ пробегает направленное по отношению $\prec$ множество $\{\mathcal{K}\}_\mathcal{A}$. Доказательство этого утверждения проводится аналогично доказательству леммы 4 из [17] с применением леммы 1 к функциям κ, g, f_{i1} и f_{i2}, $i \in I$.

Из соотношения (9) вытекает эквивалентность утверждений i) и iii).

Докажем импликацию ii) $\Rightarrow$ iii). Вследствие утверждения ii) для каждого

$i \in I$ найдется компактное множество $K_i \subset A_i$ с $C(K_i) > 0$ такое, что всюду на K_i $f(x)$ определено, причем $\alpha_i f(x) > -\infty$. Применяя к $\mathcal{K} := (K_i)_{i \in I}$ лемму 5 из [17], находим $\mathcal{F}_f(\mathcal{K}, a, g) < +\infty$.

Докажем импликацию i) $\Rightarrow$ ii). Пусть, от противного, существует $i_0 \in I$ с

$$C\left(\{x \in A_{i_0} : \alpha_{i_0} f(x) > -\infty\}\right) = 0.$$

Но тогда для каждого $\nu \in \mathcal{E}^+(A_{i_0})$, $\nu \neq 0$, интеграл $\int \alpha_{i_0} f \, d\nu$ либо не определен, либо равен $-\infty$ (см. лемму 2.3.1 из [3]). Отсюда находим $\mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g) = \varnothing$, что противоречит утверждению i).

Чтобы доказать эквивалентность утверждений i), iv) и v), достаточно доказать соотношение

$$\mathcal{F}_f^{\sigma}(\mathcal{A}, a, g) \downarrow \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g), \tag{10}$$

где σ пробегает направленное по отношению $\leq$ (см. п. 2) множество $\mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Очевидно,

$$\mathcal{E}_f^{\sigma_1}(\mathcal{A}, a, g) \subset \mathcal{E}_f^{\sigma_2}(\mathcal{A}, a, g) \subset \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$$

для всех $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, $\sigma_1 \leq \sigma_2$. Следовательно, имеем

$$\lim_{\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})} \mathcal{F}_f^{\sigma}(\mathcal{A}, a, g) \geq \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g). \tag{11}$$

Чтобы доказать обратное неравенство, предположим, что $\mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$, и выберем $\mu_n \in \mathcal{E}_f(\mathcal{A}, a, g)$, $n \in \mathbb{N}$, удовлетворяющие соотношению

$$\lim_{n \to +\infty} \mathcal{F}_f(\mu_n) = \mathcal{F}_f(\mathcal{A}, a, g).$$

Замечая, что $\mu_n \in \mathcal{E}_f^{\mu_n}(\mathcal{A}, a, g)$, находим

$$\lim_{\sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})} \mathcal{F}_f^{\sigma}(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_f^{\mu_n}(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_f(\mu_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Переходя здесь к пределу по $n \to +\infty$, а затем комбинируя с (11), получаем (10).

Лемма 5 доказана.

***Замечание* 4.** В случае $f = \kappa_\chi$, где $\chi \in \mathcal{E}$, каждое из утверждений i) – v) леммы 5 эквивалентно утверждению

$$\prod_{i \in I} C(A_i) > 0. \tag{12}$$

Действительно, утверждения ii) и (12) равносильны, поскольку $\kappa(x, \chi)$, $\chi \in \mathcal{E}$, определен и конечен пр. вс. в $\mathbf{X}$ (см. [3]).

Всюду далее будем считать $\mathcal{A}$ и f удовлетворяющими утверждению ii) из леммы 5, что не приводит к потере общности рассуждений. Действительно, если это утверждение не выполняется, то вследствие леммы 5 для любого $\omega \in \{\infty\} \cup \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ класс $\mathcal{E}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$ пуст и $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задача теряет смысл.

6. Основные результаты. В этом пункте предполагаем, что A_i, $i \in I$, замкнуты.

Теорема 1. *Предположим, что ядро* κ *согласованно в случае* I *или* $\mathcal{A}$-*согласованно в случае* II *и ограничено*[6] *на* $A^+ \times A^-$. *Пусть каждое множе-*

[6] В случае $I^- = \varnothing$ это условие выполняется автоматически и может быть опущено.

ство A_i, $i \in I$, *либо имеет конечную внутреннюю емкость, либо компактно*[7]. *Пусть для каждого* $i \in I$ *либо* g *ограничена сверху на* A_i, *либо существуют* $r = r_i \in (1, +\infty)$ *и* $\xi = \xi_i \in \mathcal{E}$ *такие, что*

$$g^r(x) \leq \kappa(x, \xi) \quad \text{пр. вс. в} \quad A_i. \tag{13}$$

Предположим также, что f *удовлетворяет одному из следующих условий:*

$$f = \kappa_\chi, \quad \text{где} \quad \chi \in \mathcal{E}, \tag{14}$$

$$-\alpha_i f\big|_{A_i} \in \Phi(A_i) \quad \forall\, i \in I. \tag{15}$$

Тогда $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$*-задача разрешима для всех* a *и* ω, $\omega \in \{\infty\} \cup \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, *таких, что* $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$.

Достаточные условия разрешимости $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$-задачи, содержащиеся в теореме 1, при некоторых дополнительных ограничениях являются также необходимыми. Чтобы сформулировать соответствующий результат, напомним следующее определение.

Определение 5 (см. [7]). *Ядро* κ *называется удовлетворяющим обобщенному принципу максимума с постоянной* h, *если для каждой меры* $\nu \geq 0$ *такой, что* $S(\nu)$ *компактно и* $\kappa(x, \nu) \leq M$ *на* $S(\nu)$, *выполняется* $\kappa(x, \nu) \leq \leq hM$ *на* $\mathbf{X}$.

Теорема 2. *Пусть ядро* κ $\mathcal{A}$*-совершенно, непрерывно при* $x \neq y$, *ограничено на* $A^+ \times A^-$ *и удовлетворяет обобщенному принципу максимума с некоторой постоянной* h. *Пусть функция* g *ограничена, причем* $g_{\min} > 0$. *Предположим также, что* $f = \kappa_\chi$, *где* $\chi \in \mathcal{E}$ *— ограниченная мера со следующими свойствами:*

$$S(\chi) \cap A = \varnothing, \tag{16}$$

$$\sup_{x \in S(\chi),\, y \in K} \kappa(x, y) < \infty \quad \forall\, K \subset A \quad (K \text{ компактно}). \tag{17}$$

Для того чтобы при указанных предположениях $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$*-задача была разрешима для всех* a *и* ω *с* $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$C(A) < +\infty.$$

Более того, если для некоторого i_0 *(например,* $i_0 \in I^+$*) выполняется*

$$C(A_{i_0}) = +\infty, \tag{18}$$

то для каждого вектора $a = (a_i)_{i \in I}$ *с*

$$a_{i_0} > h\left[\chi^+(\mathbf{X}) + g_{\min}^{-1} \sum_{i \in I^-} a_i\right] \sup_{x \in A_{i_0}} g(x) \qquad (=: H) \tag{19}$$

найдется мажоранта $\sigma = \sigma(a) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *такая, что* $\mathcal{F}_f^\sigma(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$, *но* $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$*-задача не разрешима для всех* $\omega \geq \sigma$, $\omega \in \{\infty\} \cup \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

В случае $I^- = \varnothing$, $\chi \leq 0$ теорема 2 допускает следующее усиление.

---

[7] Емкость компактного подмножества из A, вообще говоря, может быть равной $+\infty$. Она необходимо конечна, если ядро совершенно или $\mathcal{A}$-совершенно (см. замечание 2).

Теорема 3. *Пусть* $I^- = \varnothing$, κ $\mathcal{A}$*-совершенно и* $f = \kappa_\chi$, *где* $\chi \in \mathcal{E}$ *и* $\chi \le 0$. *Предположим также, что* $g_{\min} > 0$ *и для каждого* $i \in I$ *либо* g *ограничена сверху на* A_i, *либо существуют* $r = r_i \in (1, +\infty)$ *и* $\xi = \xi_i \in \mathcal{E}$, *удовлетворяющие условию* (13). *Для того чтобы при указанных предположениях* $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$*-задача была разрешима для всех* a *и* ω *с* $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$, *необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$C(A) < +\infty.$$

Более того, если $C(A) = +\infty$, *то для каждого вектора* a *найдется мажоранта* $\sigma = \sigma(a) \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ *такая, что* $\mathcal{F}_f^\sigma(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$, *но* $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$*-задача не разрешима для всех* $\omega \ge \sigma$, $\omega \in \{\infty\} \bigcup \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Отметим также следующий результат, выявляющий связь между феноменами неразрешимости $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$-задачи при разных ω. Он является вспомогательным в доказательстве теорем 2 и 3, но на наш взгляд представляет и самостоятельный интерес.

Теорема 4. *Пусть* $C(A) = +\infty$, κ $\mathcal{A}$*-совершенно и ограничено на* $A^+ \times A^-$, *а* $f = \kappa_\chi$, *где* $\chi \in \mathcal{E}$. *Предположим, что* $g_{\min} > 0$ *и для каждого* $i \in I$ *либо* g *ограничена сверху на* A_i, *либо существуют* $r \in (1, +\infty)$ *и* $\xi \in \mathcal{E}$, *удовлетворяющие условию* (13). *Если* $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$*-задача (где вектор* a *фиксирован) не разрешима для* $\omega = \infty$, *то она не разрешима и для всех достаточно больших мажорант* $\omega = \sigma \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$.

Применение теорем 1 – 4 дает возможность получить ряд новых утверждений о разрешимости $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$-задачи в случае классических ядер. Сформулируем, например, соответствующий вариант теоремы 2.

Теорема 5. *Пусть* $\mathbf{X} = \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, *а* κ *— ядро Рисса порядка* $\alpha \in (0, n)$ *(в частности, ядро Ньютона) или ядро Грина. Предположим, что* $\mathcal{A}$ *удовлетворяет условию*

$$\operatorname{dist}(A^+, A^-) > 0,$$

функция g *ограничена, причем* $g_{\min} > 0$, *а* $f = \kappa_\chi$, *где* $\chi \in \mathcal{E}$ *— ограниченная мера с*

$$S(\chi) \bigcap A = \varnothing.$$

Тогда заключение теоремы 2 остается в силе.

Отметим, что в условиях теоремы 5 постоянная h из соотношения (19) равна $2^{n-\alpha}$, если κ — ядро Рисса порядка $\alpha \in (2, n)$, или 1 — во всех других случаях (см. [7]).

7. Предельные точки минимизирующих направленностей. Экстремальные меры. Всюду в этом пункте, за исключением пп. 7.4, предполагаем выполненным условие

$$-\infty < \mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g) < +\infty.$$

Введенные здесь понятия и полученные результаты используются в доказательствах теорем 1 – 4 (см. пп. 8 – 12). Имея в виду дальнейшее развитие теории, сформулируем их в несколько более общем виде, чем это необходимо для целей настоящей работы.

7.1. Направленность $(\mu_s)_{s \in S}$ называется *минимизирующей* в $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$-задаче, если $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$ и

$$\lim_{s\in S}\mathcal{F}_f(\mu_s) = \mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A},a,g); \tag{20}$$

множество всех таких $(\mu_s)_{s\in S}$ обозначим через $\mathbb{M}^{\omega} = \mathbb{M}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f)$.

Лемма 6. *Для любых* $(\mu_s)_{s\in S}$ *и* $(\nu_t)_{t\in T}$ *из* $\mathbb{M}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f)$ *справедливо равенство*

$$\lim_{(s,t)\in S\times T}\|\mu_s-\nu_t\| = 0,$$

где $S\times T$ *— направленное произведение направленных множеств* S *и* T.

Доказательство. Замечая, что класс $\mathcal{E}_f^{\omega}(\mathcal{A},a,g)$ выпуклый, для всех $(s,t)\in S\times T$ имеем

$$4\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A},a,g) \le 4\mathcal{F}_f\left(\frac{\mu_s+\nu_t}{2}\right) = \|\mu_s+\nu_t\|^2 - 4\int f\,d(\mu_s+\nu_t).$$

Применяя тождество параллелограмма в $\mathcal{E}$, отсюда находим

$$0 \le \|\mu_s-\nu_t\|^2 \le -4\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A},a,g) + 2\mathcal{F}_f(\mu_s) + 2\mathcal{F}_f(\nu_t).$$

Переходя теперь к пределу по $(s,t)\in S\times T$, в силу (20) получаем лемму.

***Следствие* 1.** *Каждая направленность из* $\mathbb{M}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f)$ *сильно фундаментальна.*

Поэтому, переходя при необходимости к поднаправленностям, направленности из $\mathbb{M}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f)$ всегда можно считать сильно ограниченными.

***Следствие* 2.** *В случае* II *справедливо соотношение*

$$\mathbb{M}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f) \subset \mathbb{B}(\mathcal{A}). \tag{21}$$

Доказательство. Учитывая очевидную оценку

$$\int g\,d\nu \ge \nu(\mathbf{X})\inf_{x\in S(\nu)} g(x), \qquad \nu\in\mathfrak{M}^+(\overline{A}), \tag{22}$$

в условиях случая II находим

$$\sup_{\mu\in\mathcal{E}(\mathcal{A},a,g)}\mu^i(\mathbf{X}) \le a_i g_{\min}^{-1} < +\infty, \qquad i\in I. \tag{23}$$

Следовательно, направленности из $\mathbb{M}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f)$ удовлетворяют соотношению (4); вместе со следствием 1 это означает включение (21). Следствие 2 доказано.

7.2. Наряду с широкой топологией, индуцированной из $\mathfrak{M}(\mathbf{X})$, для мер из класса $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ удобно использовать так называемую $\mathcal{A}$*-широкую* топологию, введенную в [9].

Определение 6. *Направленность* $(\mu_s)_{s\in S}\subset\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *называется сходящейся к* $\mu\in\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ $\mathcal{A}$*-широко, если* $\mu_s^i\to\mu^i$ *широко для всех* $i\in I$. *Соответствующую* $\mathcal{A}$*-широкой сходимости топологию в* $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ *назовем* $\mathcal{A}$*-широкой топологией.*

***Замечание* 5.** Очевидно, что из $\mathcal{A}$-широкой сходимости в $\mathfrak{M}(\overline{\mathcal{A}})$ вытекает широкая сходимость к тому же пределу; обратное утверждение справедливо тогда и только тогда, когда множества $\overline{A_i}$, $i\in I$, попарно не пересекаются [9].

Лемма 7. *Множество* $\mathcal{E}(\mathcal{A},a,g)$ $\mathcal{A}$*-широко относительно компактно.*

Доказательство. Пусть $K\subset\overline{A_i}$, $i\in I$, компактно. Применяя соотношение (22) к $\nu = \mu^i_K$, $\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g)$, в силу положительности и непрерывности g находим (ср. с (23))

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A},a,g)} \mu^i(K) \le a_i \left[\min_{x \in K} g(x)\right]^{-1} < +\infty. \tag{24}$$

Следовательно, множества $\{\mu^i : \mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g)\}$, $i \in I$, широко ограничены, а поэтому (см. предложение 9 из [1], гл. III, § 2) широко относительно компактны. В силу определения 6 отсюда вытекает лемма.

7.3. Определение 7. *Меру* $\gamma \in \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\overline{\mathcal{A}})$ *назовем экстремальной в* $\mathcal{F}^{\omega}_f(\mathcal{A}, a, g)$*-задаче, если существует* $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathrm{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$, *сильно и* $\mathcal{A}$*-широко сходящаяся к* γ.

Множество (возможно, пустое) всех таких γ обозначим через $\mathcal{W}^{\omega}_* = \mathcal{W}^{\omega}_*(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Лемма 8. *Каждая мера* $\gamma \in \mathcal{W}^{\omega}_*(\mathcal{A}, a, g, f)$ *является сильным пределом каждой направленности из* $\mathrm{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Действительно, это непосредственно вытекает из определения 7 и леммы 6.

Лемма 9. *Для каждого* $\gamma \in \mathcal{W}^{\omega}_*(\mathcal{A}, a, g, f)$ *выполняются соотношения*

$$\gamma \in \mathfrak{M}^{\omega}(\overline{\mathcal{A}}), \tag{25}$$

$$\int g\, d\gamma^i \le a_i \quad \forall\, i \in I. \tag{26}$$

Доказательство. Согласно принятым определениям существует направленность $(\mu_s)_{s \in S} \subset \mathcal{E}^{\omega}_f(\mathcal{A}, a, g)$ такая, что $\mu^i_s \to \gamma^i$ широко, $i \in I$. Следовательно (см., например, [3]), для любого $\psi \in \Phi(\overline{A_i})$ имеем

$$\int \psi\, d\gamma^i \le \liminf_{s \in S} \int \psi\, d\mu^i_s, \quad i \in I. \tag{27}$$

Подставляя $\psi = g$ в (27), получаем (26).

В случае $\omega = \infty$ соотношение (25) очевидно. Поэтому пусть $\omega \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$; тогда $\omega^i - \mu^i_s \ge 0$ для всех $s \in S$ и $i \in I$. Вследствие широкой замкнутости конуса $\mathfrak{M}^+(\mathbf{X})$ отсюда находим $\omega^i - \gamma^i \ge 0$, $i \in I$. Лемма 9 доказана.

Класс всех $\mathcal{A}$-широких предельных точек всех направленностей из $\mathrm{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$ обозначим через $\mathcal{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$. Из определения 7 находим

$$\mathcal{W}^{\omega}_*(\mathcal{A}, a, g, f) \subset \mathcal{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f).$$

Покажем, что при условиях согласованности ядра κ справедливо и обратное включение.

Лемма 10. 1. *Пусть ядро* κ *согласованно в случае* I *или* $\mathcal{A}$*-согласованно в случае* II. *Тогда из каждого* $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathrm{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$ *можно выделить поднаправленность, сходящуюся сильно и* $\mathcal{A}$*-широко к некоторому* $\gamma \in \mathcal{W}^{\omega}_*(\mathcal{A}, a, g, f)$. *Следовательно, класс* $\mathcal{W}^{\omega}_*(\mathcal{A}, a, g, f)$ *не пуст и совпадает с* $\mathcal{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$.

2. *Пусть ядро* κ *совершенно в случае* I *или* $\mathcal{A}$*-совершенно в случае* II. *Тогда* $\gamma_1 = \gamma_2$ *для всех* $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{W}^{\omega}_*(\mathcal{A}, a, g, f)$.

Доказательство. 1. Зафиксируем $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathrm{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$. Вследствие леммы 7 из $(\mu_s)_{s \in S}$ можно выделить поднаправленность (пусть $(\mu_t)_{t \in T}$), сходящуюся $\mathcal{A}$-широко к некоторому $\mu_* \in \mathcal{M}^\omega(\mathcal{A}, a, g, f)$. Применяя свойство C) в случае I или $\mathcal{A}C$) в случае II (это правомерно в силу следствий 1 и 2), находим $\mu_t \to \mu_*$ сильно. На основании определения 7 имеем $\mu_* \in \in \mathcal{W}_*^\omega(\mathcal{A}, a, g, f)$.

2. Согласно лемме 8 любая направленность $(\mu_s)_{s\in S} \in \mathrm{M}^\omega(\mathcal{A}, a, g, f)$ сильно сходится к произвольно выбранным $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathcal{W}_*^\omega(\mathcal{A}, a, g, f)$. Применяя свойство строгой положительной определенности ядра κ в случае I или свойство $\mathcal{A}SD$) в случае II (это правомерно в силу предложений 1, 2 и следствия 2), находим $\gamma_1 = \gamma_2$.

Лемма 10 доказана.

Замечание 6. В условиях и обозначениях утверждения 2 леммы 10, вообще говоря, $\gamma_1 \not\equiv \gamma_2$. Тождество $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ выполняется, если $\overline{A_i}$, $i \in I$, попарно дизъюнктны.

Непосредственно из определений классов $\mathcal{W}^\omega(\mathcal{A}, a, g, f)$ и $\mathcal{W}_*^\omega(\mathcal{A}, a, g, f)$ находим

$$\mathcal{W}^\omega(\mathcal{A}, a, g, f) \subset \mathcal{W}_*^\omega(\mathcal{A}, a, g, f);$$

обратное соотношение, вообще говоря, не верно[8]. Покажем, что эти классы все же совпадают при надлежащих дополнительных условиях. (См. также теорему 1′ из п. 9.)

Лемма 11. *Пусть A_i, $i \in I$, замкнуты, а κ совершенно в случае* I *или $\mathcal{A}$-совершенно в случае* II. *Если $\mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима, то каждая экстремальная в этой задаче мера является ее решением.*

Доказательство. Зафиксируем $\gamma \in \mathcal{W}_*^\omega$; требуется доказать соотношение

$$\gamma \in \mathcal{W}^\omega. \tag{28}$$

Согласно условиям леммы существует $\lambda \in \mathcal{W}^\omega$. Тогда в силу утверждения 2 леммы 10 $\gamma = \lambda$, и поэтому

$$\mathcal{F}_f(\gamma) = \mathcal{F}_f(\lambda) = \mathcal{F}_f^\omega(\mathcal{A}, a, g).$$

Учитывая (25), отсюда заключаем, что для доказательства (28) достаточно доказать соотношение

$$\int g\, d\gamma^i = a_i, \quad i \in I. \tag{29}$$

Но вследствие равенства $\gamma = \lambda$ имеем $\int g\, d|\gamma| = \int g\, d|\lambda|$ и, следовательно,

$$\sum_{i\in I} \int g\, d\gamma^i = \sum_{i\in I} \int g\, d\lambda^i = \sum_{i\in I} a_i,$$

что ввиду (26) возможно только в случае (29). Лемма 11 доказана.

7.4. Пусть f удовлетворяет условию (14); в этом случае будем писать $\mathcal{F}_\chi(\nu)$, $\mathcal{E}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g)$ и $\mathcal{F}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g)$ вместо соответственно $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}(\nu)$, $\mathcal{E}_{\kappa_\chi}^\omega(\mathcal{A}, a, g)$ и $\mathcal{F}_{\kappa_\chi}^\omega(\mathcal{A}, a, g)$.

---

[8] Действительно, теоремы 2 и 3 содержат условия, при которых $\mathcal{W}^\omega(\mathcal{A}, a, g, f) = \varnothing$, в то время как $\mathcal{W}_*^\omega(\mathcal{A}, a, g, f) \neq \varnothing$ в соответствии с леммой 10. См. также результаты из [9, 10], соответствующие случаю $g = 1$, $f = 0$, $\omega = \infty$.

Очевидно, для каждого $\nu \in \mathcal{E}$ $\mathcal{F}_\chi(\nu)$ определено, конечно и допускает представление

$$\mathcal{F}_\chi(\nu) = -\|\chi\|^2 + \|\chi - \nu\|^2. \tag{30}$$

Отсюда находим соотношения

$$\inf_{\nu \in \mathcal{E}} \mathcal{F}_\chi(\nu) \geq -\|\chi\|^2 > -\infty, \tag{31}$$

$\mathcal{E}^\omega_\chi(\mathcal{A}, a, g) = \mathcal{E}^\omega(\mathcal{A}, a, g)$ и, следовательно,

$$\mathcal{F}^\omega_\chi(\mathcal{A}, a, g) = -\|\chi\|^2 + \inf_{\nu \in \mathcal{E}^\omega(\mathcal{A}, a, g)} \|\chi - \nu\|^2.$$

Лемма 12. *Пусть* $\mathcal{F}^\omega_\chi(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$. *Тогда*

$$\mathcal{F}_\chi(\gamma) = \mathcal{F}^\omega_\chi(\mathcal{A}, a, g) \quad \forall \gamma \in \mathcal{W}^\omega_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi).$$

Доказательство. Зафиксируем $\gamma \in \mathcal{W}^\omega_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$ и $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbf{M}^\omega(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$; тогда в силу леммы 8 $\mu_s \to \gamma$ сильно. Применяя (30), отсюда находим

$$\lim_{s \in S} \mathcal{F}_\chi(\mu_s) = \mathcal{F}_\chi(\gamma).$$

Комбинируя это равенство с (20), получаем лемму.

8. Вспомогательное утверждение. Всюду далее множества A_i, $i \in I$, предполагаем замкнутыми. При доказательствах теорем 1 – 4 используется следующая лемма.

Лемма 13. *Предположим, что* $\mathcal{F}^\omega_f(\mathcal{A}, a, g)$ *конечно, а* κ *согласовано в случае* I *или* $\mathcal{A}$*-согласовано в случае* II *и ограничено на* $A^+ \times A^-$. *Пусть* $i \in I$ *фиксировано, причем множество* A_i *либо имеет конечную внутреннюю емкость, либо компактно, а функция* g *либо ограничена сверху на* A_i, *либо удовлетворяет условию* (13) *для некоторых* $r = r_i \in (1, +\infty)$ *и* $\xi = \xi_i \in \mathcal{E}$. *Тогда справедливо соотношение*

$$\int g \, d\gamma^i = a_i \quad \forall \gamma \in \mathcal{W}^\omega_*(\mathcal{A}, a, g, f). \tag{32}$$

Доказательство. Зафиксируем $\gamma \in \mathcal{W}^\omega_*(\mathcal{A}, a, g, f)$. Вследствие (26) доказательство леммы сводится к доказательству неравенства

$$\int g \, d\gamma^i \geq a_i. \tag{33}$$

Согласно результатам из п. 7 существует сильно ограниченная направленность $(\mu_s)_{s \in S} \in \mathbf{M}^\omega(\mathcal{A}, a, g, f)$, сходящаяся к γ $\mathcal{A}$-широко. Тогда, подставляя $\psi = -g\,\varphi_K$ в (27), для каждого компактного $K \subset \mathbf{X}$ находим

$$\int g\,\varphi_K \, d\gamma^i \geq \limsup_{s \in S} \int g\,\varphi_K \, d\mu^i_s. \tag{34}$$

Если A_i компактно, то (33) непосредственно вытекает из (34) при $K = A_i$. Поэтому всюду далее A_i некомпактно; тогда согласно принятым условиям κ неотрицательно и

$$C(A_i) < +\infty. \tag{35}$$

Через $\{K\}$ обозначим возрастающее относительно включения семейство всех компактных подмножеств из A_i. Используя леммы 1, 2 и неравенство (34), получаем следующие соотношения:

$$a_i = \int g\,d\mu_s^i = \lim_{K\in\{K\}} \int g\,\varphi_K\,d\mu_s^i \qquad \forall\, s \in S,$$

$$\int g\,d\gamma^i = \lim_{K\in\{K\}} \int g\,\varphi_K\,d\gamma^i \geq \lim_{K\in\{K\}} \left(\limsup_{s\in S} \int g\,\varphi_K\,d\mu_s^i \right).$$

Сравнивая их с требуемым неравенством (33), видим, что для его доказательства достаточно для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ доказать существование $K_0 \in \{K\}$ такого, что

$$\int g\,\varphi_{K'\setminus K}\,d\mu_s^i < \varepsilon \tag{36}$$

для всех $s \in S$ и всех $K, K' \in \{K\}$, $K' \supset K \supset K_0$.

Справедливо соотношение

$$\sup_{s\in S} \left\| \mu_s^i \right\| < +\infty. \tag{37}$$

Действительно, в случае I оно вытекает из неравенства

$$\left\| \mu_s^i \right\| \leq \left\| \mu_s \right\|, \qquad s \in S,$$

очевидного ввиду неотрицательности ядра κ и мер μ_s, $s \in S$, а в случае II — из соотношения

$$\sup_{s\in S} \kappa(\mu_s^+, \mu_s^-) < +\infty,$$

которое в свою очередь следует из (23) и ограниченности κ на $A^+ \times A^-$.

Применяя предложение 4, из (35) и согласованности ядра в случае I или его $\mathcal{A}$-согласованности в случае II выводим, что для каждого $E \subset A_i$ существует внутреннее емкостное распределение θ_E, ассоциированное с E.

Рассмотрим меры $\theta_{A_i\setminus K}$, где $K \in \{K\}$. Из результатов работы [3] находим неравенство

$$\left\| \theta_{A_i\setminus K} - \theta_{A_i\setminus K'} \right\|^2 \leq \left\| \theta_{A_i\setminus K} \right\|^2 - \left\| \theta_{A_i\setminus K'} \right\|^2 \qquad \forall\, K \subset K',$$

а из соотношений (5) и (35) — утверждение, что направленность $\left\| \theta_{A_i\setminus K} \right\|$, $K \in \{K\}$, ограничена и не возрастает, а поэтому фундаментальна в $\mathbb{R}$. Следовательно, $(\theta_{A_i\setminus K})_{K\in\{K\}}$ сильно фундаментальна в $\mathcal{E}$. Еще раз используя (5) и (35), отсюда находим

$$(\theta_{A_i\setminus K})_{K\in\{K\}} \in \mathbb{B}(\mathcal{A}).$$

А поскольку, очевидно, $(\theta_{A_i\setminus K})_{K\in\{K\}}$ сходится к нулю широко, то вследствие условия C) в случае I или условия $\mathcal{A}\,C$) в случае II она сходится к нулю и сильно. Поэтому имеем

$$\lim_{K\in\{K\}} \left\| \theta_{A_i\setminus K} \right\| = 0. \tag{38}$$

Всюду далее будем предполагать, что для некоторых $r \in (1, +\infty)$ и $\xi \in \mathcal{E}$ выполняется условие (13). Это не приводит к потере общности доказательства.

Действительно, согласно принятым предположениям в обратном случае существует $c < +\infty$ такое, что $g(x) \le c$ на A_i. Комбинируя это соотношение с (6) при $E = A_i$, снова приходим к (13), где $r \in (1, +\infty)$ — любое, а ξ определяется равенством $\xi := c^r \theta_{A_i}$.

Обозначим $q := r(r-1)^{-1}$, где $r \in (1, +\infty)$ — число, фигурирующее в условии (13). Комбинируя (13) с (6) при $E = A_i$ и учитывая неотрицательность ядра, видим, что для любых $K, K' \in \{K\}$, $K \subset K'$, неравенство

$$g(x)\varphi_{K'\setminus K}(x) \;\le\; \kappa(x,\xi)^{1/r}\kappa(x,\theta_{A_i\setminus K})^{1/q} \tag{39}$$

справедливо пр. вс. в $K'\setminus K$ и всюду в дополнении этого множества к A_i. Применяя лемму 3 к сужению меры μ_s^i на $K'\setminus K$, выводим, что соотношение (39) выполняется μ_s^i-почти всюду в $\mathbf{X}$.

Интегрируя (39) относительно μ_s^i, а затем применяя к выражению в правой части неравенство Гельдера и, последовательно, неравенство Коши – Буняковского, получаем

$$\int g\,\varphi_{K'\setminus K}\,d\mu_s^i \;\le\; \Big[\int \kappa(x,\xi)\,d\mu_s^i(x)\Big]^{1/r}\Big[\int \kappa(x,\theta_{A_i\setminus K})\,d\mu_s^i(x)\Big]^{1/q} \;\le$$

$$\le\; \|\xi\|^{1/r}\,\|\theta_{A_i\setminus K}\|^{1/q}\,\|\mu_s^i\|.$$

Учитывая (37) и (38), отсюда выводим существование $K_0 \in \{K\}$ такого, что для всех s и всех K, K', $K_0 \subset K \subset K'$, выполняется (36), следовательно, (33), а поэтому и (32).

Лемма 13 доказана.

9. Доказательство теоремы 1. Справедливо следующее, более сильное, чем теорема 1, утверждение.

Теорема 1′. *Пусть выполняются условия теоремы* 1. *Тогда для любых a и ω таких, что $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g) < +\infty$, класс минимизирующих мер $\mathcal{W}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$ не пуст и сильно, $\mathcal{A}$-широко (а поэтому и широко) компактен. Кроме того, справедливы тождества*

$$\mathcal{W}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f) \;=\; \mathcal{W}_*^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f) \;=\; \mathcal{M}^{\omega}(\mathcal{A},a,g,f). \tag{40}$$

Доказательство. Покажем, что в принятых условиях $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g) > -\infty$. Ввиду (31) для этого достаточно при условии (15) доказать неравенство

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}(\mathcal{A},a,g)} \int \alpha_i f\, d\mu^i \;<\; +\infty, \tag{41}$$

где $i \in I$ произвольно фиксировано. Но (41), очевидно, выполняется, если функция $\alpha_i f\big|_{A_i}$ неположительна. Вследствие (15) в обратном случае она имеет компактный носитель S_i и ограничена сверху. Применяя соотношение (24) при $K = S_i$, снова получаем (41).

Следовательно, $\mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$ конечно. В силу леммы 10 класс $\mathcal{W}_*^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$ не пуст. Пусть γ — его элемент, а $(\mu_s)_{s\in S}$ — направленность из $\mathrm{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$ такая, что

$$\mu_s \to \gamma \quad \text{сильно и } \mathcal{A}\text{-широко}. \tag{42}$$

Докажем включение

$$\gamma \in \mathcal{W}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f). \tag{43}$$

Прежде всего отметим, что вследствие соотношения (25) и леммы 13 выполняется

$$\gamma \in \mathcal{E}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g). \tag{44}$$

Заметим также, что $\mathcal{F}_f(\gamma)$ определено и удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{F}_f(\gamma) \le \lim_{s\in S} \mathcal{F}_f(\mu_s) \qquad \left(= \mathcal{F}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)\right). \tag{45}$$

Действительно, в случае (14) это утверждение содержится в лемме 12, а в случае (15) вытекает из (42) и соотношения (27) при $\psi = -\alpha_i f\,|_{A_i}$, $i \in I$.

Из (45) находим $\int f\, d\gamma \ne -\infty$. Вместе с (44) это означает, что γ принадлежит классу допустимых мер $\mathcal{E}_f^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$. Еще раз используя (45), отсюда находим (43).

Следовательно, класс $\mathcal{W}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$ не пуст и совпадает с $\mathcal{W}_*^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$. А так как последний совпадает с $\mathcal{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$ (см. лемму 10), то справедливы тождества (40).

Пусть $(\lambda_s)_{s\in S}$ — направленность из $\mathcal{W}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$. Поскольку, очевидно, она принадлежит $\mathrm{M}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$, то в силу леммы 10 из нее можно выбрать поднаправленность, сходящуюся сильно и $\mathcal{A}$-широко к некоторой экстремальной мере γ_0. Вследствие (40) имеем $\gamma_0 \in \mathcal{W}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g, f)$, и поэтому утверждение о компактности доказано.

Теорема 1′, а вместе с ней и теорема 1 доказаны.

10. Доказательство теоремы 4. Для каждого $i \in I$ с $C(A_i) = +\infty$ обозначим через τ_n^i, $n \in \mathbb{N}$, единичные меры из $\mathcal{E}^+(A_i)$ такие, что $S(\tau_n^i)$ компактны и

$$\tau_n^i \to 0 \quad \text{сильно и широко} \quad (n \to +\infty); \tag{46}$$

они существуют в силу $\mathcal{A}$-совершенности ядра. Из условия $g_{\min} > 0$ находим

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \int g\, d\tau_n^i > 0. \tag{47}$$

Отметим, что в принятых условиях $\mathcal{F}_{\chi}^{\infty}(\mathcal{A}, a, g)$ конечно для всех a (см. пп. 5, 7). Зафиксируем некоторый вектор a и предположим, что $\mathcal{F}_{\chi}^{\infty}(\mathcal{A}, a, g)$-задача не разрешима. Тогда вследствие лемм 10 и 12 найдется мера γ со свойствами $\gamma \in \mathcal{W}_*^{\infty}(\mathcal{A}, a, g, \kappa_{\chi})$ и

$$\gamma \notin \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g). \tag{48}$$

Обозначим $\sigma := \sum_{i\in I} \alpha_i \sigma^i$, где

$$\sigma^i := \begin{cases} \gamma^i, & \text{если} \quad C(A_i) < +\infty; \\ \gamma^i + \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{\left[a_i - \int g\, d\gamma^i\right]\tau_n^i}{\int g\, d\tau_n^i}, & \text{если} \quad C(A_i) = +\infty. \end{cases} \tag{49}$$

Наша цель — доказать, что в указанных условиях и обозначениях $\mathcal{F}_{\chi}^{\omega}(\mathcal{A}, a, g)$-задача неразрешима и для каждого фиксированного $\omega \in \mathfrak{M}(\mathcal{A})$ такого, что

$$\omega \geq \sigma. \tag{50}$$

Через $\tilde{\tau}_n^i$, $i \in \mathbb{N}$, обозначим n-е слагаемое под знаком суммы в (49). Рассмотрим последовательность $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathfrak{M}(\mathcal{A})$, где

$$\zeta_n^i := \begin{cases} \gamma^i, & \text{если} \quad C(A_i) < +\infty; \\ \gamma^i + \tilde{\tau}_n^i, & \text{если} \quad C(A_i) = +\infty. \end{cases} \tag{51}$$

Тогда, учитывая (46) и (47), получаем

$$\zeta_n \to \gamma \quad \text{сильно и } \mathcal{A}\text{-широко} \quad (n \to +\infty). \tag{52}$$

Вследствие леммы 13 для каждого $i \in I$ такого, что $C(A_i) < +\infty$, имеем $\int g\, d\gamma^i = a_i$. Из этого равенства и соотношений (26), (49) – (51) находим

$$(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{E}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g). \tag{53}$$

Поэтому, применяя тождество (30) и неравенство Коши – Буняковского, для каждого n получаем

$$\mathcal{F}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_\chi(\zeta_n) = -\|\chi\|^2 + \|\chi - \zeta_n\|^2 \leq$$
$$\leq \mathcal{F}_\chi(\gamma) + \|\zeta_n - \gamma\|(\|\zeta_n - \gamma\| + 2\|\chi - \gamma\|).$$

Переходя здесь к пределу по $n \to +\infty$ и используя при этом (52) и соотношения

$$\mathcal{F}_\chi(\gamma) = \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g),$$

находим

$$\lim_{n\to+\infty} \mathcal{F}_\chi(\zeta_n) = \mathcal{F}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g).$$

Следовательно (см. (53)), $(\zeta_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}^\omega(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$. Это вместе с (52) означает, что

$$\gamma \in \mathcal{W}_*^\omega(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi). \tag{54}$$

Предположим, рассуждая от противного, что $\mathcal{F}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима. Тогда вследствие (54) и леммы 11 имеем $\gamma \in \mathcal{W}^\omega(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$, что невозможно в силу (48).

Теорема 4 доказана.

11. Доказательство теоремы 2. В силу теоремы 1 достаточно доказать необходимую часть утверждения теоремы 2; поэтому предположим выполненным условие (18). Тогда вследствие $\mathcal{A}$-совершенности ядра A_{i_0} некомпактно и, следовательно, $\kappa \geq 0$.

Зафиксируем вектор a, удовлетворяющий соотношению (19). Применяя теорему 4, видим, что для доказательства теоремы достаточно доказать неразрешимость $\mathcal{F}_\chi^\omega(\mathcal{A}, a, g)$-задачи в случае $\omega = \infty$, который всюду далее предполагаем выполненным.

Пусть, от противного, $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g)$-задача разрешима. Рассуждения, направленные на получение противоречия с этим предположением, разобьем на следующие 5 этапов.

1. Покажем сначала, что в принятых условиях потенциалы $\kappa(x, \chi^+)$ и

$\kappa(x,\chi^-)$ непрерывны на A_{i_0}. Поскольку эти функции полунепрерывны снизу на $\mathbf{X}$ как потенциалы неотрицательных мер, достаточно доказать их полунепрерывность сверху на A_{i_0}.

Зафиксировав точку $x_0 \in A_{i_0}$ и ее компактную окрестность $W_{x_0} \subset A_{i_0}$, рассмотрим функцию

$$\kappa^*(x,y) := -\kappa(x,y) + \sup_{\xi\in W_{x_0},\,\eta\in S(\chi)} \kappa(\xi,\eta), \qquad (x,y)\in W_{x_0}\times S(\chi). \tag{55}$$

Вследствие условий (16), (17) и непрерывности κ при $x \neq y$ она неотрицательна и непрерывна. Следовательно, функция

$$\kappa^*(x,\chi^+) := \int \kappa^*(x,y)\,d\chi^+(y), \qquad x\in W_{x_0},$$

будучи потенциалом меры χ^+ относительно ядра κ^*, полунепрерывна снизу.

С другой стороны, интегрируя соотношение (55) относительно (ограниченной) меры χ^+, видим, что $\kappa^*(x,\chi^+)$ совпадает с точностью до конечного слагаемого со сужением $-\kappa(x,\chi^+)$ на W_{x_0}. Следовательно, $\kappa(x,\chi^+)$ полунепрерывна сверху на W_{x_0}.

Рассуждения для $\kappa(x,\chi^-)$ аналогичны.

2. Зафиксируем $\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}_{\mathcal{A}}$ (см. п. 5) со свойством

$$C(K_i) > 0 \quad \forall i\in I \tag{56}$$

или, что равносильно (см. оценку (31), лемму 5 и замечание 4), с конечным $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K},a,g)$.

Обозначив $J := I\setminus\{i_0\}$, введем в рассмотрение класс мер

$$\mathcal{E}(\mathcal{K},a,g,J) := \left\{\mu\in\mathfrak{M}_g(\mathcal{K}) : \int g\,d\mu^i = a_i \quad \forall i\in J\right\}$$

и соответствующую экстремальную характеристику

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K},a,g,J) := \inf_{\mu\in\mathcal{E}(\mathcal{K},a,g,J)} \mathcal{F}_\chi(\mu).$$

Очевидно,

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K},a,g,J) \le \mathcal{F}_\chi(\mathcal{K},a,g), \tag{57}$$

и поэтому $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K},a,g,J)$ конечно. Отметим также следующую оценку (ср. с (23)):

$$\mu^i(\mathbf{X}) \le a_i g_{\min}^{-1} < \infty \quad \forall\mu\in\mathcal{E}(\mathcal{K},a,g,J), \quad i\in J. \tag{58}$$

Пусть H — значение выражения в правой части соотношения (19). Обозначим

$$\mathcal{E}_H(\mathcal{K},a,g,J) := \left\{\mu\in\mathcal{E}(\mathcal{K},a,g,J) : \int g\,d\mu^{i_0} \le H\right\}.$$

Цель данного этапа — доказать тождество

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K},a,g,J) = \inf_{\mu\in\mathcal{E}_H(\mathcal{K},a,g,J)} \mathcal{F}_\chi(\mu). \tag{59}$$

Зафиксировав произвольное $\mu\in\mathcal{E}(\mathcal{K},a,g,J)$, введем следующие обозначения:

$$\mu_J := \sum_{i\in J}\alpha_i\mu^i \qquad (=\mu-\mu^{i_0}),$$

$$\mu_J^\chi := \chi - \mu_J.$$

Тогда, используя тождество (30), находим

$$\mathcal{F}_\chi(\mu) = -\|\chi\|^2 + \|\chi - \mu_J - \mu^{i_0}\|^2 \geq -\|\chi\|^2 + \|\chi - \mu_J - P\mu_J^\chi\|^2, \tag{60}$$

где P — оператор (*ортогонального*) *проектирования* на выпуклый конус $\mathscr{E}^+(K_{i_0})$ (см., например, [2], § 1.12). Существование[9] проекции $P\mu_J^\chi$ следует из сильной полноты пространства $\mathscr{E}^+(K_{i_0})$, которая в свою очередь вытекает из $\mathcal{A}$-совершенности ядра κ и компактности K_{i_0} в силу следствия 9.5 из [9].

Еще раз применяя (30) к крайней правой части соотношения (6), имеем

$$\mathcal{F}_\chi(\mu) \geq \mathcal{F}_\chi(\mu_J + P\mu_J^\chi).$$

Отсюда вытекает, что для доказательства (59) достаточно доказать неравенство

$$\int g\, dP\mu_J^\chi \leq H. \tag{61}$$

Докажем сначала следующее промежуточное утверждение:

$$\kappa(x, \mu_J^\chi) = \kappa(x, P\mu_J^\chi) \quad \text{пр. вс. в } S(P\mu_J^\chi). \tag{62}$$

Согласно предложению 1.12.4 из [2] справедливы соотношения

$$\kappa(\mu_J^\chi - P\mu_J^\chi, \nu) \leq 0 \quad \forall\, \nu \in \mathscr{E}^+(K_{i_0}),$$

$$\kappa(\mu_J^\chi - P\mu_J^\chi, P\mu_J^\chi) = 0.$$

Рассуждая аналогично тому, как это делалось в [7] (см. доказательство теоремы 4.16), из этих соотношений выводим

$$\kappa(x, \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi) \leq 0 \quad \text{пр. вс. в } K_{i_0}, \tag{63}$$

$$\kappa(x, \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi) = 0 \quad P\mu_J^\chi\text{-почти всюду}. \tag{64}$$

Вследствие (64) для любого $x \in S(P\mu_J^\chi)$ существует направленность $(x_s)_{s\in S} \subset$ $\subset K_{i_0}$ такая, что $x_s \to x$ и

$$\kappa(x_s, \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi) = 0 \quad \forall\, s \in S.$$

Учитывая (63), отсюда видим, что для доказательства соотношения (62) достаточно доказать полунепрерывность сверху $\kappa(x, \mu_J^\chi - P\mu_J^\chi)$ на K_{i_0}. А это непосредственно следует из полунепрерывности снизу $\kappa(x, \mu_J^+ + P\mu_J^\chi)$ на $\mathbf{X}$, непрерывности $\kappa(x, \chi)$ на K_{i_0} (см. этап 1 доказательства) и, наконец, непрерывности $\kappa(x, \mu^-)$ на K_{i_0}; последнее очевидно в силу компактности $S(\mu^-)$ и непрерывности κ на $K_{i_0} \times S(\mu^-)$ (см. лемму 2 в [1], гл. III, § 5).

Использовав (62), докажем оценку (61). Вследствие компактности $S(P\mu_J^\chi)$ и $\mathcal{A}$-совершенности ядра существует (ограниченная) мера $\theta \in \mathscr{E}^+$ на $S(P\mu_J^\chi)$ такая, что

$$\kappa(x, \theta) \geq 1 \quad \text{пр. вс. в } S(P\mu_J^\chi), \tag{65}$$

$$\kappa(x, \theta) \leq 1 \quad \forall\, x \in S(\theta). \tag{66}$$

Применяя лемму 3, видим, что равенство в (62) и неравенство в (65) справедли-

[9] В принятых условиях проекция $P\mu_J^\chi$ единственна; этот факт, однако, здесь не используется.

вы соответственно θ- и $P\mu^{\chi}_{J}$-почти всюду. Учитывая неотрицательность ядра, отсюда находим

$$P\mu^{\chi}_{J}(\mathbf{X}) \le \int \kappa(x,\theta)\,dP\mu^{\chi}_{J}(x) = \int \kappa(x,\mu^{\chi}_{J})\,d\theta(x) \le \int \kappa(x,\theta)\,d(\chi^{+}+\mu^{-})(x).$$

А поскольку κ удовлетворяет обобщенному принципу максимума с постоянной h, то вследствие (66) имеем $\kappa(x,\theta) \le h\ \forall x \in \mathbf{X}$, и поэтому

$$P\mu^{\chi}_{J}(\mathbf{X}) \le h(\chi^{+}+\mu^{-})(\mathbf{X}).$$

Подставляя в правую часть этого неравенства оценку (58), выводим соотношение (61).

Тождество (59) доказано.

3. Докажем теперь существование меры $\bar{\lambda} = \bar{\lambda}_{\mathcal{K}}$, удовлетворяющей соотношениям

$$\bar{\lambda}_{\mathcal{K}} \in \mathcal{E}_{H}(\mathcal{K},a,g,J), \tag{67}$$

$$\mathcal{F}_{\chi}(\lambda_{\mathcal{K}}) = \mathcal{F}_{\chi}(\mathcal{K},a,g,J). \tag{68}$$

В силу (59) существует направленность $(\mu_s)_{s\in S} \subset \mathcal{E}_{H}(\mathcal{K},a,g,J)$ такая, что

$$\lim_{s\in S} \mathcal{F}_{\chi}(\mu_s) = \mathcal{F}_{\chi}(\mathcal{K},a,g,J). \tag{69}$$

Справедливо включение

$$(\mu_s)_{s\in S} \in \mathbb{B}(\mathcal{A}). \tag{70}$$

Действительно, вследствие выпуклости $\mathcal{E}_{H}(\mathcal{K},a,g,J)$ к направленности $(\mu_s)_{s\in S}$, минимизирующей в этом классе функционал $\mathcal{F}_{\chi}$, применимы рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве леммы 6; следовательно, $(\mu_s)_{s\in S}$ сильно фундаментальна. Кроме того, в силу (22) имеем

$$\mu_s^{i_0}(\mathbf{X}) \le H\,g_{\min}^{-1} < \infty \quad \forall s \in S.$$

Комбинируя эту оценку с (58), получаем соотношение (4), а поэтому и (70).

Пусть $\bar{\lambda} \in \mathfrak{M}(\mathcal{K})$ — $\mathcal{A}$-широкая предельная точка направленности $(\mu_s)_{s\in S}$; она существует вследствие широкой ограниченности $(\mu_s^{i})_{s\in S}$, $i \in I$, и широкой замкнутости $\mathfrak{M}^{+}(K_i)$. Покажем, что так определенная мера $\bar{\lambda}$ удовлетворяет соотношениям (67) и (68).

Переходя при необходимости к поднаправленности, будем считать, что

$$\mu_s \to \bar{\lambda} \quad \mathcal{A}\text{-широко}. \tag{71}$$

Применяя к $(\mu_s)_{s\in S}$ свойство $\mathcal{A}C)$ (это правомерно в силу (70)), выводим, что $\bar{\lambda} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{E}}(\mathcal{K})$ и $\mu_s \to \bar{\lambda}$ сильно. Тогда вследствие (30) имеем

$$\lim_{s\in S} \mathcal{F}_{\chi}(\mu_s) = \mathcal{F}_{\chi}(\bar{\lambda});$$

комбинируя это равенство с (69), получаем (68). Кроме того, из (71) в силу широкой непрерывности отображения $\nu \mapsto \int g\,d\nu$, $\nu \in \mathfrak{M}^{+}(K_i)$, находим

$$\int g\,d\bar{\lambda}^{i} = \lim_{s\in S} \int g\,d\mu_s^{i}, \qquad i \in I;$$

отсюда вытекает (67).

4. Вернемся к исследованию $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. Цель данного этапа — доказать существование экстремальной меры $\gamma_* \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$, удовлетворяющей соотношению

$$\int g\, d\gamma_*^{i_0} \leq H. \tag{72}$$

Зафиксируем $\mathcal{K}_* \in \{\mathcal{K}\}$ со свойством (56). Переходя при необходимости к поднаправленности, будем считать, что для всех $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$ выполняется $\mathcal{K}_* \prec \prec \mathcal{K}$.

Через $(\omega_\mathcal{K})_{\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}}$ обозначим направленность единичных мер из $\mathcal{E}(A_{i_0})$ такую, что

$$\omega_\mathcal{K} \to 0 \quad \text{сильно и широко;} \tag{73}$$

она существует вследствие условия (18) и $\mathcal{A}$-совершенности ядра. (Действительно, можно показать, что требуемым свойствам удовлетворяет, например, направленность $\omega_\mathcal{K} := C(K_{i_0})^{-1} \theta_{K_{i_0}}$, $\mathcal{K} = (K_i)_{i \in I} \in \{\mathcal{K}\}$, где $\theta_{K_{i_0}}$ — емкостное распределение на K_{i_0}.)

В силу предыдущего этапа доказательства для каждого $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$ существует мера $\tilde{\lambda}_\mathcal{K}$, удовлетворяющая соотношениям (67) и (68). Обозначим

$$\mu_\mathcal{K} := \tilde{\lambda}_\mathcal{K} + b_\mathcal{K} \omega_\mathcal{K},$$

где

$$b_\mathcal{K} := \frac{a_{i_0} - \int g\, d\tilde{\lambda}_\mathcal{K}^{i_0}}{\int g\, d\omega_\mathcal{K}}.$$

Заметим, что вследствие (19) и (67) справедливы неравенства

$$\int g\, d\tilde{\lambda}_\mathcal{K}^{i_0} \leq H < a_{i_0},$$

и поэтому $b_\mathcal{K} > 0$. Учитывая этот факт, из принятых определений находим

$$\mu_\mathcal{K} \in \mathcal{E}(\mathcal{A}, a, g), \quad \mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}. \tag{74}$$

Следовательно, имеем

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_\chi(\mu_\mathcal{K}) = -\|\chi\|^2 + \|\chi - \tilde{\lambda}_\mathcal{K} - b_\mathcal{K}\omega_\mathcal{K}\|^2 \leq \mathcal{F}_\chi(\tilde{\lambda}_\mathcal{K}) + c_\mathcal{K}, \tag{75}$$

где

$$c_\mathcal{K} := b_\mathcal{K} \|\omega_\mathcal{K}\| \left(b_\mathcal{K} \|\omega_\mathcal{K}\| + 2\|\chi - \tilde{\lambda}_\mathcal{K}\|\right).$$

Комбинируя (75) с (57) и (68), получаем

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) \leq \mathcal{F}_\chi(\mu_\mathcal{K}) \leq \mathcal{F}_\chi(\mathcal{K}, a, g, J) + c_\mathcal{K} \leq \mathcal{F}_\chi(\mathcal{K}, a, g) + c_\mathcal{K}. \tag{76}$$

Заметим, что числа $b_\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}$, ограничены, поскольку $\int g\, d\omega_\mathcal{K} \geq g_{\min} > > 0$. Ограничены также числа $\|\chi - \tilde{\lambda}_\mathcal{K}\|$, что вытекает из убывания $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{K}, a, g, J)$. А так как $\|\omega_\mathcal{K}\| = o(\mathcal{K})$ в силу (73), то имеем

$$c_\mathcal{K} = o(\mathcal{K}), \quad \mathcal{K} \in \{\mathcal{K}\}.$$

Поэтому, переходя в (76) к пределу по $\{\mathcal{K}\}$, в силу соотношения (9) находим

$$\lim_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}} \mathcal{F}_\chi(\mu_\mathcal{K}) = \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g);$$

вместе с (74) это означает, что

$$(\mu_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi).$$

Тогда согласно лемме 10 найдется мера $\gamma_* \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$, являющаяся $\mathcal{A}$-широкой предельной точкой для $(\mu_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$. Отсюда вследствие (73) и ограниченности $(b_\mathcal{K})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$ выводим, что $\gamma_*^{i_0}$ — широкая предельная точка для $(\tilde{\lambda}_\mathcal{K}^{i_0})_{\mathcal{K}\in\{\mathcal{K}\}}$. Чтобы получить требуемую оценку (72), теперь достаточно воспользоваться соотношением (27) при $\psi = g$.

5. Наконец, покажем, что сделанное предположение о разрешимости $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g)$-задачи противоречит доказанному факту существования меры $\gamma_* \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$ со свойством (72). Действительно, согласно лемме 11 в принятых предположениях необходимо выполняется $\gamma_* \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$. Тогда вследствие (19) и (72) находим

$$H < a_{i_0} = \int g\, d\gamma_*^{i_0} \le H,$$

что невозможно. Теорема 2 доказана.

12. Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 1 достаточно доказать необходимую часть утверждения теоремы 3. Поэтому пусть $C(A) = +\infty$; меняя при необходимости нумерацию, будем без ограничения общности считать выполненным условие

$$C(A_m) = +\infty.$$

Тогда вследствие $\mathcal{A}$-совершенности ядра A_m некомпактно и, следовательно, $\kappa \ge 0$.

Зафиксируем произвольный вектор $a = (a_i)_{i\in I}$. Применяя теорему 4, видим, что для доказательства теоремы 3 достаточно доказать неразрешимость $\mathcal{F}_\chi^\infty(\mathcal{A}, a, g)$-задачи.

Обозначим

$$\mathcal{A}' := (A_1, \ldots, A_{m-1}), \qquad a' := (a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

Применяя тождество (30), вследствие условий $\kappa \ge 0$, $\Gamma^- = \varnothing$ и $\chi \le 0$ находим

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}', a', g) \le \mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g). \tag{77}$$

Зафиксировав произвольным образом $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}', a', g, \kappa_\chi)$, обозначим

$$\nu_n := \mu_n + \frac{a_m \tau_n^m}{\int g\, d\tau_n^m}, \quad n \in \mathbb{N},$$

где τ_n^m, $n \in \mathbb{N}$, — меры, определенные в п. 10. Тогда, очевидно, справедливо включение

$$\nu_n \in \mathcal{E}_\chi(\mathcal{A}, a, g), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{78}$$

а вследствие (46) и (47) (с $i = m$) и соотношение

$$\nu_n^m \to 0 \quad \text{сильно и широко} \quad (n \to +\infty). \tag{79}$$

Заметим, что

$$(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{M}(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi). \tag{80}$$

Действительно, используя (30) и (78), для каждого $n \in \mathbb{N}$ получаем

$$\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g) \le \mathcal{F}_\chi(\nu_n) \le \mathcal{F}_\chi(\mu_n) + \left\|\nu_n^m\right\|\left(\left\|\nu_n^m\right\| + 2\|\chi - \mu_n\|\right).$$

Переходя здесь к пределу при $n \to +\infty$ и учитывая при этом соотношение (79), сильную ограниченность $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ и, последовательно, оценку (77), выводим (80).

Применяя лемму 10, из (80) находим, что $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имеет $\mathcal{A}$-широкой предельной точкой некоторую экстремальную меру $\gamma \in \mathcal{W}_*(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$. Тогда вследствие (79) получаем

$$\gamma^m = 0; \tag{81}$$

отсюда необходимо вытекает неразрешимость $\mathcal{F}_\chi(\mathcal{A}, a, g)$-задачи. Действительно, предполагая обратное, на основании леммы 11 имеем $\gamma \in \mathcal{W}(\mathcal{A}, a, g, \kappa_\chi)$, что противоречит (81).

Теорема 3 доказана.

1. *Бурбаки Н.* Интегрирование. Меры, интегрирование мер. – М.: Наука, 1967. – 396 с.
2. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. Теория и приложения. – М.: Мир, 1969. – 1071 с.
3. *Fuglede B.* On the theory of potentials in locally compact spaces // Acta Math. – 1960. – **103**, № 3–4. – P. 139–215.
4. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. I // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 168–189.
5. *Ohtsuka M.* On potentials in locally compact spaces // J. Sci. Hiroshima Univ. Ser. A-1. – 1961. – **25**, № 2. – P. 135–352.
6. *Cartan H.* Théorie du potentiel newtonien: énergie, capacité, suites de potentiels // Bull. Soc. math. France. – 1945. – **73**. – P. 74–106.
7. *Ландкоф Н. С.* Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. – 515 с.
8. *Saff E. B., Totik V.* Logarithmic potentials with external fields. – Berlin: Springer, 1997. – 505 p.
9. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. II // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 4. – С. 466–488.
10. *Зорий Н. В.* Экстремальные задачи теории емкостей конденсаторов в локально компактных пространствах. III // Там же. – № 6. – С. 758–782.
11. *Zorii N.* On equilibrium problems for potentials with external fields. – Kyiv, 2002. – 31 p. – (Preprint / Nat. Acad. Sci. Ukraine. Inst. Math.; 2002.07).
12. *Зорий Н. В.* Экстремальная задача о минимуме энергии для пространственных конденсаторов // Укр. мат. журн. – 1986. – **38**, № 4. – С. 431–437.
13. *Зорий Н. В.* Одна некомпактная вариационная задача теории риссова потенциала. I; II // Там же. – 1995. – **47**, № 10. – С. 1350–1360; 1996. – **48**, № 5. – С. 603–613.
14. *Deny J.* Les potentiels d'énergie finie // Acta Math. – 1950. – **82**. – P. 107–183.
15. *Deny J.* Sur la définition de l'énergie en théorie du potentiel // Ann. Inst. Fourier. – 1950. – **2**. – P. 83–99.
16. *Зорий Н. В.* Одна вариационная задача теории гринова потенциала. I; II // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 4. – С. 494–500; № 11. – С. 1475–1480.
17. *Зорий Н. В.* Равновесные потенциалы с внешними полями // Там же. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1178–1195.

Получено 24.12.2002