УДК 517.9:519.46

М. І. Сєров (Полтав. техн. ун-т),
Р. М. Черніга (Ін-т математики НАН України, Київ)

СИМЕТРІЇ ЛІ, Q-УМОВНІ СИМЕТРІЇ ТА ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ СИСТЕМИ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ДИФУЗІЇ-КОНВЕКЦІЇ

A complete description of Lie symmetries is obtained for a class of nonlinear diffusion-convection systems containing two Burgers-type equations with two arbitrary functions. A nonlinear diffusion-convection system with unique symmetry properties that is simultaneously invariant with respect to the generalized Galilee algebra and the operators of Q-conditional symmetries with cubic nonlinearities relative to dependent variables is found. For the systems of evolution equations, operators of this sort are found at the first time. For the found nonlinear system, a system of Lie and non-Lie ansätze is constructed. Exact solutions, which can be used in solving the relevant boundary-value problems, are also obtained.

Наведено вичерпний опис симетрій Лі нелінійної системи двох рівнянь дифузії-конвекції типу двох зачеплених рівнянь Бюргерса, яка містить дві довільні функції. Знайдено нелінійну систему дифузії-конвекції з унікальними симетрійними властивостями, яка одночасно інваріантна відносно узагальненої алгебри Ґалілея та відносно операторів Q-умовної симетрії з кубічними нелінійностями відносно залежних змінних. Для систем еволюційних рівнянь такі оператори знайдено вперше. Для знайденої системи побудовано систему лііівських та нелііівських анзаців; також отримано точні розв'язки, які можна застосувати для розв'язання відповідних крайових задач.

1. Вступ. Загальновідомо, що скалярне рівняння дифузії-конвекції

$$U_t = (A(U)U_x)_x + B(U)U_x, \tag{1}$$

де $A(U)$, $B(U)$ — довільно задані дійсні гладкі функції, $U = U(t,x)$ — шукана функція, нижні індекси t і x означають диференціювання за цими змінними, узагальнює низку нелінійних рівнянь, які є базовими при математичному моделюванні процесів у фізиці, хімії, біології (див., наприклад, [1 – 4] і цитовану там літературу). Найвідомішим нелінійним рівнянням вигляду (1) є рівняння Бюрґерса

$$U_t = U_{xx} + \lambda U U_x, \quad \lambda \in \mathbf{R}, \tag{2}$$

яке зустрічається при описі найрізноманітніших процесів (приклади та детальну бібліографію див. у книзі [5]).

Максимальна алгебра симетрій Лі (максимальна алгебра інваріантності) рівняння (2) є узагальненою алгеброю Ґалілея $AG_2^0(1,1)$ з базовими операторами [6]

$$P_0 = \partial_t, \quad P_1 = \partial_x, \tag{3}$$

$$G^0 = tP_1 - \frac{1}{\lambda}\partial_U, \tag{4}$$

$$D = 2tP_0 + xP_1 - U\partial_U, \tag{5}$$

$$\Pi = t^2P_0 + txP_1 - \left(\frac{x}{\lambda} + tU\right)\partial_U, \tag{6}$$

де

$$\partial_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad \partial_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \partial_U = \frac{\partial}{\partial U}.$$

Оператори (3), (4) породжують класичну алгебру Ґалілея $AG^0(1,1)$, яка не містить так званого одиничного оператора, і тому комутатор $[G, P_1] = 0$, а оператори (3) – (5) — розширену алгебру Ґалілея $AG_1^0(1,1)$. Зауважимо, що лінійне рівняння дифузії (див. (2) при $\lambda = 0$) також інваріантне відносно алгебри Ґалілея $AG(1, 1)$. На противагу алгебрі $AG^0(1, 1)$ алгебра $AG(1, 1)$ містить деякий одиничний оператор (у випадку лінійного рівняння дифузії це $U\partial_U$), причому $[G, P_1] = \mathrm{const}\, U\partial_U \neq 0$. Детальніше про зображення алгебри $AG_1^0(1,1)$ та відповідні диференціальні рівняння див. [7, 8].

Q-умовну симетрію (тобто некласичну симетрію за термінологією [9]) рівняння Бюрґерса було досліджено в роботі [10] (див. також [11]). Виявилося, що рівняння (1) має нескінченний набір Q-умовних симетрій. Це є наслідком того факту, що воно лінеаризується відомою нелокальною заміною Коула – Гопфа $W = 2(\ln U)_x/\lambda$.

Симетрії Лі рівняння (1) у випадку $B(U) = 0$ вичерпно описано у книзі [12]. У випадку двох довільних функцій $A(U)$ і $B(U)$ ця задача розв'язувалася в роботі [13]. Вичерпний опис симетрій Лі (групову класифікацію) рівняння реакції-дифузії-конвекції, тобто рівняння (1) з реактивним членом у вигляді довільної функції $C(U)$, наведено в роботах [14, 15]. Зокрема, там отримано нові випадки розширення симетрії Лі рівняння реакції-дифузії-конвекції, які доповнюють результати робіт [13] при $C(U) = 0$ і [16] при $C(U) \neq 0$.

У роботі [15] також отримано визначальні рівняння для знаходження Q-умовних симетрій рівняння реакції-дифузії-конвекції та наведено нетривіальні частинні розв'язки цих рівнянь. Це дозволило отримати нові оператори Q-умовних симетрій для деяких відомих рівнянь реакції-дифузії-конвекції (наприклад, рівняння Маррі).

При моделюванні більш складних процесів, зокрема, за участю двох і більше якісно різних компонент, замість рівняння (1) необхідно розглядати систему рівнянь дифузії-конвекції. У випадку двох компонент (наприклад, температури і густини при тепломасопереносі) виникають системи вигляду

$$\overline{U}_t = (A(\overline{U})\overline{U}_x)_x + B(\overline{U})\overline{U}_x, \tag{7}$$

де $\overline{U} = \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix}$ — шукана вектор-функція, $A(\overline{U})$ і $B(\overline{U})$ — матриці розміру $2 \times \times 2$ з елементами $a_{ij}(\overline{U})$ і $b_{ij}(\overline{U})$, $i, j = 1, 2$, які є довільно заданими гладкими функціями.

Очевидно, що здійснити повний опис симетрій Лі (в тому сенсі, як це було зроблено в роботах [14, 15] для скалярного рівняння реакції-дифузії-конвекції, чи в роботах [17 – 19] для системи рівнянь реакції-дифузії) для системи (7) надзвичайно складно, адже вона містить вісім довільних функцій. У цій роботі ми обмежимося розглядом систем вигляду (7) з двома довільними функціями, а саме:

$$\begin{aligned} U_t &= \lambda_1 U_{xx} + \lambda_{10} U U_x + F^1(U, V) V_x, \\ V_t &= \lambda_2 V_{xx} + \lambda_{20} V V_x + F^2(U, V) U_x, \end{aligned} \tag{8}$$

де λ_1, λ_{10}, λ_2, λ_{20} — довільні ненульові сталі, $F^1 = b_{11}(\overline{U})$, $F^2 = b_{22}(\overline{U})$. Такий вибір обумовлений тим, що при $F^1 = F^2 = 0$ система (4) набирає вигляду двох незачеплених рівнянь Бюрґерса, тому вона є векторним аналогом рівняння (2).

Нагадаємо, що класичним прикладом узагальнення рівняння Бюрґерса до системи є рівняння Нав'є – Стокса. Проте система рівнянь Нав'є – Стокса, як і її аналог на площині — рівняння примежового шару, мають специфічне обмеження — кількість шуканих функцій $U, V, \ldots$ повинна збігатися з кількістю просторових координат x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Система двох рівнянь (8) та її очевидне багатовимірне узагальнення цього обмеження не вимагають.

Зазначимо, що очевидною підстановкою $\lambda_{10} U \to U$, $\lambda_{20} V \to V$ система (8) зводиться до такої ж, але з $\lambda_{20} = \lambda_{10} = 1$, тому нижче будемо розглядати систему

$$\begin{aligned} U_t &= \lambda_1 U_{xx} + U U_x + F^1(U, V) V_x, \\ V_t &= \lambda_2 V_{xx} + V V_x + F^2(U, V) U_x. \end{aligned} \tag{9}$$

Основна частина цієї роботи побудована таким чином. У другому пункті описано всі можливі системи дифузії-конвекції вигляду (9) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, інваріантні відносно нетривіальних алгебр Лі. Встановлено, що у випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ ця система допускає якісно нові симетрії Лі, зокрема, нові зображення алгебри Ґалілея та її розширень операторами масштабних та проективних перетворень.

У третьому пункті отримано систему визначальних рівнянь для знаходження операторів Q-умовної симетрії вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t, x, U, V)\partial_x + \eta^1(t, x, U, V)\partial_V + \eta^2(t, x, U, V)\partial_V. \tag{10}$$

Встановлено, що у випадку таких обмежень на вигляд функції $\xi_U \neq 0$, $\xi_V \neq 0$, $\eta^1_t = \eta^2_t = \eta^1_x = \eta^2_x = 0$ отриману систему можна проінтегрувати. У підсумку доведено, що існує лише один випадок $F^1 = m_1 + U$, $F^2 = m_2 + V$, $m_1, m_2 \in \mathbf{R}$, коли система (9) допускає оператори Q-умовної симетрії, які не збігаються з операторами ліївської симетрії.

У четвертому пункті знайдені оператори ліївської та Q-умовної симетрій застосовано для побудови анзаців та точних розв'язків системи зачеплених рівнянь Бюрґерса

$$\begin{aligned} U_t &= \lambda_1 U_{xx} + U U_x + (m_1 + U) V_x, \\ V_t &= \lambda_2 V_{xx} + V V_x + (m_2 + V) U_x, \end{aligned} \tag{11}$$

де m_1, m_2 — довільні сталі.

2. Симетрії Лі системи рівнянь дифузії-конвекції (9). Легко перевірити, що будь-яка нелінійна система рівнянь дифузії-конвекції (нижче — система ДК) вигляду (9) інваріантна відносно тривіальної (очевидної) алгебри Лі з базовими операторами $P_0 = \partial_t$ і $P_1 = \partial_x$. Ми ставимо задачу: знайти всеможливі пари функцій (F^1, F^2), при яких система (9) допускає розширення тривіальної алгебри Лі, тобто є інваріантною відносно тривимірної або ще ширшої алгебри.

Теорема 1. *Всеможливі максимальні алгебри інваріантності (МАІ) системи ДК (9) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1 \lambda_2 \neq 0$ та відповідні пари функцій (F^1, F^2) вичерпуються тими, які наведено в таблиці. Будь-яка інша система ДК вигляду (9), інваріантна відносно нетривіальної алгебри Лі, локальною підстановкою*

$$x^* = x - mt, \quad t^* = t, \quad U^* = U + m, \quad V^* = V + m, \quad \lambda \in \mathbf{R} \tag{12}$$

зводиться до однієї з наведених у таблиці.

МАІ системи ДК (9) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$

$F^2)$	Обмеження	Базові оператори МАІ
	$\omega = U/V$	$P_0,\ P_1$ $D = 2tP_0 + xP_1 - U\partial_U - V\partial_V$
	$\omega = U - V$	$P_0,\ P_1$ $G_x = tP_1 - (\partial_U + \partial_V)$
)	$\alpha_1 \neq 0$ або $\alpha_2 \neq 0$	$P_0,\ P_1,\ G_x,\ D$
		$P_0,\ P_1,\ G_x,\ D$ $\Pi = tD - t^2P_0 - x(\partial_U + \partial_V)$

…ся на застосуванні алгоритму Лі (див., наприклад, [12, …К (9). Наголосимо, що реалізація цього алгоритму у ви…стять *довільні функції*, не піддається уніфікації і є вельми …ля громіздких перетворень, характерних при застосуванні …жуємо систему визначальних рівнянь для знаходження … η^2 — координат інфінітезимального оператора

$$\ldots + \xi^1(t,x,U,V)\partial_x + $$
$$+ \eta^1(t,x,U,V)\partial_U + \eta^2(t,x,U,V)\partial_V \qquad (13)$$

…кцій (F^1, F^2). Ця система має вигляд

$$\xi^1_U = \xi^1_V = \eta^k_{UU} = \eta^k_{VV} = \eta^k_{UV} = 0, \quad k = 1, 2,$$
$$\xi^0_t = 2\xi^1_x, \qquad (14)$$

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\eta^1_V = (\lambda_1 - \lambda_2)\eta^2_U = 0, \qquad (15)$$

$$\ldots = 2\lambda_1\eta^1_{xU} - \xi^1_t - U\xi^1_x,$$
$$\ldots = 2\lambda_2\eta^2_{xV} - \xi^1_t - V\xi^1_x, \qquad (16)$$

$$\ldots - \eta^1_U + \xi^1_x\big)F^1 + (U - V)\eta^1_V = 2\lambda_2\eta^1_{xV},$$
$$\ldots - \eta^2_V + \xi^1_x\big)F^2 + (V - U)\eta^2_U = 2\lambda_1\eta^2_{xU}, \qquad (17)$$

$$\eta^1_t = \lambda_1\eta^1_{xx} + \eta^1_x U + \eta^2 F^1,$$
$$\eta^2_t = \lambda_2\eta^2_{xx} + \eta^1_x F^2 + \eta^2_x V. \qquad (18)$$

…ом рівнянь (14), (15) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ є

$$\xi^0 = 2a(t), \quad \xi^1 = \dot{a}(t)x + b(t),$$
$$\ldots \beta_1(t,x), \quad \eta^2 = \alpha_2(t,x)V + \beta_2(t,x), \qquad (19)$$

де a, b, α_k, β_k, $k = 1, 2$, — довільні функції своїх аргументів. Крапка над функціями тут і нижче означає диференціювання за змінною t. Підставляючи (19) в рівняння (16), отримуємо

$$\alpha_k = -\dot{a}, \quad \beta_k = -\dot{b} - \ddot{a}x, \quad k = 1, 2. \tag{20}$$

Беручи до уваги (18), знаходимо

$$\begin{aligned} a(t) &= a_2 t^2 + 2a_1 t + a_0, \\ b(t) &= a_2 \kappa t^2 + b_1 t + b_0, \end{aligned} \tag{21}$$

якщо $F^1 = F^2 = \kappa$, де a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, κ — довільні сталі, та

$$a(t) = 2a_1 t + a_0, \quad b(t) = b_1 t + b_0 \tag{22}$$

— у випадку всіх інших F^1 і F^2.

Таким чином, з урахуванням формул (19), (20) і (22) класифікаційні рівняння (17) для знаходження функцій F^1 і F^2 зводяться до вигляду

$$\begin{aligned} a_1 F^1 &= (a_1 U + b_1) F^1_U + (a_1 V + b_1) F^1_V, \\ a_1 F^2 &= (a_1 U + b_1) F^2_U + (a_1 V + b_1) F^2_V. \end{aligned} \tag{23}$$

Залишилося побудувати загальні розв'язки лінійної системи (23) при всіх можливих значеннях довільних параметрів a_1 і b_1. Розв'язки системи (23) при $a_1 \neq 0$, $b_1 = 0$; $a_1 = 0$, $b_1 \neq 0$ та $a_1 b_1 \neq 0$ (при цьому a_1 і b_1 розглядаються як незалежні параметри) породжують відповідно нелінійності та МАІ у випадках 1 – 3 (див. таблицю). У випадку лінійної залежності між параметрами a_1 і b_1 отримуємо систему ДК (9) з функціями $F^1 = (U + m) f(\omega)$, $F^2 = (V + m) q(\omega)$, де f, g — довільні функції аргументу $\omega = (U + m)/(U + m)$, яка підстановкою (12) зводиться до першого випадку (див. таблицю).

При розгляді особливого випадку $F^1 = F^2 = \kappa$, в якому коефіцієнти інфінітезимального оператора X мають найбільш загальний вигляд (19) – (21), розв'язання класифікаційних рівнянь (17) приводить до випадку 2 при $F^1 = F^2 = \kappa \neq 0$ та до випадку 4 при $F^1 = F^2 = 0$ (див. таблицю). Теорему доведено.

***Зауваження* 1.** Як випливає з теореми (див. таблицю, випадок 4), система незачеплених рівнянь Бюрґерса повністю зберігає симетрію скалярного рівняння Бюрґерса (2). Це нетривіальний результат, оскільки, наприклад, аналогічне твердження у випадку рівняння Гамільтона – Якобі буде неправильним [22].

Розв'язання рівнянь (14) – (18) у випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ є дуже громіздким, оскільки рівняння (15) перетворюються в тотожності (тобто не виникає умов $\eta^1_V = \eta^2_U = 0$), а тому знаходження всіх можливих розв'язків решти рівнянь перетворюється в складну задачу, якій присвячено роботу [23]. Тут ми лише подаємо найбільш багату на симетрії Лі систему ДК вигляду

$$\begin{aligned} U_t &= U_{xx} + UU_x + (U + m_1) V_x, \\ V_t &= V_{xx} + VV_x + (V + m_2) U_x. \end{aligned} \tag{24}$$

Теорема 2. *МАІ системи ДК (24) при $m_1 \neq m_2$ є узагальненою алгеброю Галілея $AG^0_2(1, 1)$ з базовими операторами*

$$\begin{gathered}
P_0,\ P_1,\ G_x^0 = tP_1 + Q_1^0, \\
D_0 = 2t\partial_t + x\partial_x - U\partial_U - V\partial_V + Q_2^0, \\
\Pi_0 = tD_0 - t^2\partial_t + xQ_1^0 + \frac{2(\partial_U - \partial_V)}{m_1 - m_2}.
\end{gathered} \tag{25}$$

При $m_1 = m_2 = 0$ *МАІ породжується алгеброю* $AG_2(1, 1)$ *з базовими операторами*

$$\begin{gathered}
P_0,\ P_1,\ Q_1 = \frac{(U-V)(\partial_U - \partial_V)}{2}, \quad G_x = t\partial_x + \frac{xQ_1}{2} - Q_2, \\
D = 2t\partial_t + x\partial_x + \frac{Q_1}{2} - (U\partial_U + V\partial_V), \\
\Pi = tD_1 - t^2\partial_t + \frac{x^2}{4}Q_1 - xQ_2
\end{gathered} \tag{26}$$

та оператором

$$X^\infty = (MU + MV - 2M_x)(\partial_U - \partial_V), \tag{27}$$

де $M = M(t, x)$ *— загальний розв'язок лінійного рівняння дифузії* $M_t = M_{xx}$;

$$\begin{gathered}
Q_1^0 = \frac{U+V+2m_1}{m_2 - m_1}\partial_U + \frac{U+V+2m_2}{m_1 - m_2}\partial_V, \\
Q_2^0 = \frac{m_2U + m_1V + 2m_1m_2}{m_2 - m_1}(\partial_U - \partial_V) + U\partial_U + V\partial_V, \\
Q_2 = \frac{\partial_U + \partial_V}{2}.
\end{gathered}$$

Доведення зводиться до розв'язання системи визначальних рівнянь (14) – (18) у випадку наперед відомих лінійних функцій $F^1 = U + m_1$, $F^2 = U + m_2$. Оскільки це не викликає труднощів, то ми його не наводимо.

Зауваження 2. Система (24) при $m_1 = m_2 = m \neq 0$ підстановкою (12) зводиться до такої ж системи, але при $m_1 = m_2 = 0$.

3. Q-умовна симетрія системи рівнянь дифузії-конвекції (9). Застосування алгоритму для знаходження Q-умовних симетрій (див. [21], § 5.7) дозволяє отримати перевизначену нелінійну систему визначальних диференціальних рівнянь з частинними похідними (ДРЧП) на коефіцієнти оператора Q (10). Зауважимо, що на противагу лієвським операторам оператори Q-умовних симетрій визначаються з точністю до довільного множника-функції $N(t, x, U, V)$, тобто (10) є канонічною (найпростішою) формою сім'ї операторів $N(t, x, U, V)Q$.

Не наводячи громіздких викладок, характерних для алгоритму, ми подаємо лише результат його застосування — систему визначальних ДРЧП для знаходження функцій ξ, η^1, η^2, F^1 і F^2:

$$\xi_{UU} = \xi_{VV} = \xi_{UV} = 0, \tag{28}$$

$$\begin{gathered}
\lambda_1\eta_{VV} + F^1\xi_V = 0, \\
\lambda_2\eta^2_{UU} + F^2\xi_U = 0,
\end{gathered} \tag{29}$$

$$\begin{gathered}
\lambda_1\eta^1_{UU} - 2\lambda_1\xi_{xU} + 2(\xi + U)\xi_U + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}F^2\xi_V = 0, \\
\lambda_2\eta^2_{VV} - 2\lambda_2\xi_{xV} + 2(\xi + V)\xi_V + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}F^1\xi_U = 0,
\end{gathered} \tag{30}$$

$$2\lambda_1\eta^1_{UV} - 2\lambda_1\xi_{xV} + \frac{1}{\lambda_2}(\lambda_2 U + \lambda_1 V + (\lambda_1+\lambda_2)\xi)\xi_V + 2F^1\xi_U = 0,$$
$$2\lambda_2\eta^2_{UV} - 2\lambda_2\xi_{xU} + \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_2 U + \lambda_1 V + (\lambda_1+\lambda_2)\xi)\xi_U + 2F^2\xi_V = 0, \tag{31}$$

$$\lambda_1\eta^1_{xx} - \eta^1_t - 2\xi_x\eta^1 + \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-1\right)\eta^2\eta^1_V + U\eta^1_x + F^1\eta^2_x = 0,$$
$$\lambda_2\eta^2_{xx} - \eta^2_t - 2\xi_x\eta^2 + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-1\right)\eta^1\eta^2_U + V\eta^2_x + F^2\eta^1_x = 0, \tag{32}$$

$$\lambda_1\left(2\eta^1_{xU} - \xi_{xx}\right) + (2\xi+U)\xi_x - 2\eta^1\xi_U +$$
$$+\left(1-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)\eta^2\xi_V - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}F^2\eta^1_V + F^1\eta^2_U + \xi_t + \eta^1 = 0,$$
$$\lambda_2\left(2\eta^2_{xV} - \xi_{xx}\right) + (2\xi+V)\xi_x - 2\eta^2\xi_V + \tag{33}$$
$$+\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\eta^1\xi_U - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}F^1\eta^2_U + F^2\eta^1_V + \xi_t + \eta^2 = 0,$$

$$2\lambda_1\eta^1_{xV} + \left(\xi_x - \eta^1_U + \eta^2_V\right)F^1 - 2\eta^1\xi_V + \frac{1}{\lambda_2}[(\lambda_2-\lambda_1)\xi + \lambda_2 U - \lambda_1 V]\eta^1_V +$$
$$+\eta^1F^1_U + \eta^2F^1_V = 0,$$
$$2\lambda_2\eta^2_{xU} + \left(\xi_x - \eta^2_V + \eta^1_U\right)F^2 - 2\eta^2\xi_U + \frac{1}{\lambda_1}[(\lambda_2-\lambda_1)\xi + \lambda_2 U - \lambda_1 V]\eta^2_U + \tag{34}$$
$$+\eta^2F^2_V + \eta^1F^2_U = 0.$$

Очевидно, що система ДРЧП (28) – (34) є перевизначеною. Проте вона сумісна, оскільки має очевидний розв'язок $\xi = \text{const}$, $\eta^1 = \eta^2 = 0$, F^1, F^2 — довільні. Цей розв'язок веде до ліївських операторів $P_0 = \partial_t$, $P_1 = \partial_x$, і далі ми ним нехтуємо.

Незважаючи на те, що рівняння (28) легко розв'язуються і отримується

$$\xi = \alpha_0(t,x) + \alpha_1(t,x)U + \alpha_2(t,x)V, \tag{35}$$

де α_0, α_1, α_2 — довільні гладкі функції, розв'язати перевизначену систему з решти 12 нелінійних ДРЧП з урахуванням (35) вдалося лише при додаткових обмеженнях на функції η^1 і η^2.

Нехай $\eta^k_t = \eta^k_x = 0$, $k = 1, 2$. Тоді рівняння (32) зводяться до квазілінійних рівнянь першого порядку відносно функцій η^1 і η^2, а це дає можливість їх проінтегрувати і підставити отримані вирази для цих функцій в решту рівнянь. Виявляється, що у випадку $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\xi_U \neq 0$ (або $\xi_V \neq 0$) отримана перевизначена система буде несумісною при будь-яких F^1, F^2, окрім випадку $F^1 = F^2 = 0$, який не викликає зацікавлення, оскільки система буде незачепленою.

У випадку $\lambda_1 = \lambda_2$ (не втрачаючи загальності можна вважати $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$) є лише один випадок, коли система (28) – (34) сумісна. Таким чином, отримуємо таке твердження.

Теорема 3. *Нелінійна система дифузії-конвекції* (9) ($F^1 \neq 0$ *або* $F^2 \neq 0$)

допускає оператор Q-умовної симетрії вигляду

$$Q = \partial_t + \xi(t, x, U, V)\partial_x + \eta^1(U, V)\partial_U + \eta^2(U, V)\partial_V, \tag{36}$$

де $\xi_U \neq 0$ або $\xi_V \neq 0$, тоді і тільки тоді, коли

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \quad F^1 = m_1 + U, \quad F^2 = m_2 + V, \quad m_1, m_2 \in \mathbf{R}.$$

При зазначених умовах

$$\xi = \frac{U+V}{2} + \alpha_0,$$

$$\eta^1 = -\frac{U(U+V)^2 + 2\alpha_0 U(U+V)}{4} + \beta_0 U + \gamma_1, \tag{37}$$

$$\eta^2 = -\frac{V(U+V)^2 + 2\alpha_0 V(U+V)}{4} + \beta_0 V + \gamma_2,$$

якщо $m_1 = m_2 = 0$, і

$$\xi = \frac{U+V}{2},$$

$$\eta^1 = -\frac{(U+m_1)(U+V)^2 + (m_2 - m_1)U^2}{4} + \beta_0 U + \gamma_1, \tag{38}$$

$$\eta^2 = -\frac{(V+m_2)(U+V)^2 + (m_1 - m_2)V^2}{4} + \beta_0 V + \gamma_2,$$

якщо $m_1 \neq m_2$. У формулах (37), (38) α_0, β_0, γ_1, γ_2 — *довільні сталі.*

Пошук операторів Q-умовної симетрії при $\xi_U = \xi_V = 0$ і $\lambda_1 \neq \lambda_2$ з необхідністю приводить до умов (див. (29), (30)) $\eta^k_{UU} = \eta^k_{VV} = \eta^k_{UV} = 0$, $k = 1, 2$. Оскільки ці умови збігаються з умовами, які виникають при пошуку ліївських операторів (див. (14)), то, як правило, отримуються ліївські оператори. Але бувають і винятки. В цьому напрямку нами отримано такий результат.

Теорема 4. *Нелінійна система дифузії-конвекції* (9) *при*

$$F^1 = \frac{\lambda_1(U+m)}{\lambda_2}, \quad F^2 = \frac{\lambda_2(V-m)}{\lambda_1}, \tag{39}$$

де $\lambda_1 \neq \lambda_2$, m — довільна стала, інваріантна лише відносно тривіальної алгебри симетрії Лі з базовими операторами ∂_t, ∂_x, але допускає оператор Q-умовної симетрії

$$Q = (\lambda_1 - \lambda_2)\partial_t - (\lambda_1 + \lambda_2)m\partial_x + \frac{U+V}{t}(\lambda_1\partial_U - \lambda_2\partial_V). \tag{40}$$

Доведення. З теореми 1 випливає, що максимальною (в розумінні Лі) алгеброю інваріантності системи (9), (39) є алгебра з базовими операторами P_0, P_1.

Оператор Q-умовної симетрії можна отримати шляхом розв'язання визначальних рівнянь (28) – (34), підставивши в них (39). Проте ми застосуємо інший шлях, який ґрунтується лише на означенні Q-умовної симетрії (див. [21, с. 282]). Отже, розглянемо систему (9), (39) як деякий многовид

$$\begin{aligned} S_1 &= 0, \\ S_2 &= 0, \end{aligned} \tag{41}$$

де

$$S_1 = \lambda_1 U_{xx} - U_t + UU_x + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(U+m)V_x,$$
$$S_2 = \lambda_2 U_{xx} - V_t + VV_x + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(V-m)V_x, \tag{42}$$

в продовженому просторі змінних $t,\ x,\ U,\ V,\ U_t,\ V_t,\ U_x,\ V_x,\ U_{xx},\ V_{xx},\ldots$.

За відомими формулами [12] шукаємо продовження Q оператора (40) в продовженому просторі. При цьому нас не цікавлять ті доданки продовженого оператора, які містять диференціювання за похідними $\partial_{U_{tt}},\ \partial_{U_{tx}},\ \partial_{V_{tt}},\ \partial_{V_{tx}},\ \partial_{U_{xxx}},\ \partial_{V_{xxx}},\ldots$, оскільки при дії на (41) вони будуть перетворюватися в нулі. У підсумку отримуємо оператор

$$\tilde{Q} = Q + \frac{1}{t}\left(U_t + V_t - \frac{U+V}{t}\right)\left(\lambda_1\partial_{U_t} - \lambda_2\partial_{V_t}\right) +$$
$$+ \frac{1}{t}(U_x+V_x)\left(\lambda_1\partial_{U_x} - \lambda_2\partial_{V_x}\right) + \frac{1}{t}(U_{xx}+V_{xx})\left(\lambda_1\partial_{U_{xx}} - \lambda_2\partial_{V_{xx}}\right) + \ldots \tag{43}$$

Подіявши оператором (43) на ліві частини системи (41), одержимо

$$\tilde{Q}S_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 t}(\lambda_2 S_1 + \lambda_1 S_2 + QU),$$
$$\tilde{Q}S_2 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1 t}(\lambda_2 S_1 + \lambda_1 S_2 - QV), \tag{44}$$

де

$$QU = (\lambda_1 - \lambda_2)U_t - (\lambda_1+\lambda_2)mU_x - \frac{\lambda_1}{t}(U+V),$$
$$QV = (\lambda_1 - \lambda_2)V_t - (\lambda_1+\lambda_2)mV_x + \frac{\lambda_2}{t}(U+V). \tag{45}$$

Виконання умов (44), (45) означає, що система рівнянь (41), (42) Q-умовно інваріантна відносно оператора (40) за означенням. Теорему доведено.

4. Анзаци, редукція та точні розв'язки. Використаємо деякі результати попередніх пунктів для побудови анзаців, проведення редукції та знаходження точних розв'язків системи ДК (11).

Розглянемо систему рівнянь (24). Як випливає з теореми 2, максимальною в розумінні Лі алгеброю інваріантності системи (24) є узагальнена алгебра Ґалілея $AG_2^0(1,1)$ з базовими операторами (25). Застосуємо симетрійні властивості для редукції системи (24) до системи звичайних диференціальних рівнянь.

У відомій книзі [20] знайдено всі нееквівалентні (неспряжені) одновимірні підалгебри алгебри $AG_2(1,1)$, відносно якої є інваріантним лінійне рівняння теплопровідності. Як зазначалося вище, алгебра $AG_2^0(1,1)$ відрізняється від алгебри $AG_2(1,1)$ лише відсутністю одиничного оператора, тому вислід П. Олвера неважко поширити і на алгебру $AG_2^0(1,1)$. У підсумку ми отримали систему одновимірних підалгебр

$$k_1\partial_t + k_2\partial_x, \qquad \partial_t + k_3 G, \qquad D, \qquad \partial_t + \Pi, \tag{46}$$

де $k_1,\ k_2,\ k_3$ — довільні сталі. Розгляньмо кожну з них окремо.

1. Оператору $k_1\partial_t + k_2\partial_x$ відповідає анзац

$$U = \varphi(\omega), \qquad V = \psi(\omega), \qquad \omega = k_2 t - k_1 x, \tag{47}$$

де $\varphi,\ \psi$ — довільні гладкі функції. Якщо підставити анзац (47) в систему (24), то для знаходження невідомих функцій φ, ψ одержимо систему звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР)

$$\begin{aligned} k_2\dot\varphi &= k_1^2\ddot\varphi - k_1\varphi\dot\varphi - k_1(\varphi+m_1)\dot\psi, \\ k_2\dot\psi &= k_1^2\ddot\psi - k_1(\varphi+m_2)\dot\varphi - k_1\psi\dot\psi. \end{aligned} \tag{48}$$

Тут і нижче $\dot\varphi = d\varphi/d\omega$, $\ddot\varphi = d^2\varphi/d\omega^2$. Система (48) є редукованою для системи (24).

2. Оператору $\partial_t + k_3 G$ відповідає анзац

$$\begin{aligned} U &= \frac{(k_3t-m_1)\varphi(\omega)+\psi(\omega)+(k_3t-m_1)^2}{m_1-m_2} - m_1, \\ V &= \frac{(k_3t-m_2)\varphi(\omega)+\psi(\omega)+(k_3t-m_2)^2}{m_2-m_1} - m_2, \\ \omega &= x - \frac{k_3}{2}t^2, \end{aligned} \tag{49}$$

який редукує систему (24) до системи ЗДР

$$\begin{aligned} \ddot\varphi - \varphi\dot\varphi + \dot\psi - 2k_3 &= 0, \\ \ddot\psi - \psi\dot\varphi - k_3\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{50}$$

3. Оператор D породжує анзац

$$\begin{aligned} U &= \frac{m_1t^{-1/2}\varphi(\omega)+t^{-1}\psi(\omega)+m_1m_2}{m_1-m_2}, \\ V &= \frac{m_2t^{-1/2}\varphi(\omega)+t^{-1}\psi(\omega)+m_1m_2}{m_2-m_1}, \\ \omega &= t^{-1/2}x, \end{aligned} \tag{51}$$

який редукує систему (24) до системи ЗДР

$$\begin{aligned} \ddot\varphi + \varphi\dot\varphi + \frac{1}{2}(\omega\dot\varphi+\varphi) - \dot\psi &= 0, \\ \ddot\psi + \psi\dot\varphi + \frac{1}{2}\omega\dot\psi + \dot\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{52}$$

4. Оператор $\partial_0 + \Pi$ породжує анзац

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{m_1-m_2}\Big\{&(t^2+1)^{-1/2}m_1(\varphi(\omega)-2t\omega) - \\ &-(t^2+1)^{-1}(\psi(\omega)+t\omega\varphi(\omega)-2t)+\omega^2+m_1m_2\Big\}, \\ V = \frac{1}{m_2-m_1}\Big\{&(t^2+1)^{-1/2}m_2(\varphi(\omega)-2t\omega) - \\ &-(t^2+1)^{-1}(\psi(\omega)+t\omega\varphi(\omega)-2t)+\omega^2+m_1m_2\Big\}, \\ \omega = (t^2+1&)^{-1/2}x, \end{aligned} \tag{53}$$

який редукує систему (24) до системи ЗДР

$$\begin{aligned} \ddot\varphi + \varphi\dot\varphi + \dot\psi &= 0, \\ \ddot\psi + \psi\dot\varphi &= \omega(\omega\dot\varphi+\varphi). \end{aligned} \tag{54}$$

Якщо знайти розв'язки редукованих систем (48), (50), (52), (54), то, використавши відповідні анзаци, легко побудувати розв'язки системи (24). Наприклад, проінтегрувавши перше рівняння системи (50), одержимо

$$\psi = -\dot{\varphi} + \frac{1}{2}\varphi^2 + 2k_3\omega + C_1, \tag{55}$$

де C_1 — стала інтегрування. Підставивши (55) в друге рівняння системи (50), отримаємо

$$\dddot{\varphi} - \varphi\ddot{\varphi} - 2\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{2}\varphi^2 + 2k_3\omega + C_1\right)\dot{\varphi} + k_3\varphi = 0. \tag{56}$$

У підсумку одержуємо розв'язок системи (24)

$$\begin{aligned} U &= \frac{(k_3t - m_1)\varphi - \dot{\varphi} + \varphi^2/2 + 2k_3\omega + C_1 + (k_3t - m_1)^2}{m_1 - m_2} - m_1, \\ V &= \frac{(k_3t - m_2)\varphi - \dot{\varphi} + \varphi^2/2 + 2k_3\omega + C_1 + (k_3t - m_2)^2}{m_2 - m_1} - m_2, \end{aligned} \tag{57}$$

де $\omega = x - k_3t^2/2$, $\varphi = \varphi(\omega)$ — довільний розв'язок рівняння (56).

Якщо проінтегрувати перше рівняння системи (54), то знайдемо функцію ψ:

$$\psi = -\dot{\varphi} - \frac{1}{2}\varphi^2 + C_1. \tag{58}$$

Після підстановки (58) в друге рівняння системи (54) одержимо

$$\dddot{\varphi} + \varphi\ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi}^2 + \left(\frac{1}{2}\varphi^2 - C_1\right)\dot{\varphi} + \omega(\omega\dot{\varphi} + \varphi) = 0. \tag{59}$$

Частинним розв'язком рівняння (59) при $C_1 = 0$ є функція $\varphi = 6/\omega$, використання якої та формул (58), (53) приводить до такого розв'язку системи (24):

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{m_1 - m_2}\left(\frac{x^2 - 2m_1tx - 4t}{t^2 + 1} + \frac{12}{x^2} + \frac{6m_1}{x} + m_1m_2\right), \\ V &= \frac{1}{m_2 - m_1}\left(\frac{x^2 - 2m_2tx - 4t}{t^2 + 1} + \frac{12}{x^2} + \frac{6m_2}{x} + m_1m_2\right). \end{aligned} \tag{60}$$

Використовуючи відому техніку, яка детально описана, наприклад, в [24], розв'язок (60) можна розмножити до п'ятипараметричної сім'ї розв'язків за допомогою перетворень інваріантності, породжених п'ятьма базовими операторами (25) алгебри $AG_2^0(1,1)$. Відповідні формули розмноження розв'язків системи (24) застосовні до будь-якого відомого розв'язку. Зокрема, будь-який *стаціонарний* розв'язок $(U_0(x), V_0(x))$ перетвореннями інваріантності, породженими оператором Ґалілея G_x^0, розмножується до такої однопараметричної сім'ї *нестаціонарних* розв'язків системи (24)

$$\begin{aligned} U &= U_0(x + \varepsilon t) - \varepsilon\frac{U_0(x + \varepsilon t) + V_0(x + \varepsilon t) + 2m_1}{m_2 - m_1}, \\ V &= V_0(x + \varepsilon t) + \varepsilon\frac{U_0(x + \varepsilon t) + V_0(x + \varepsilon t) + 2m_2}{m_2 - m_1}, \end{aligned}$$

де ε — довільний дійсний параметр.

Застосуємо тепер оператори Q-умовної симетрії для побудови точних розв'язків. Як випливає з теореми 3, при $m_1 \neq m_2$ система (24) Q-умовно інваріантна відносно оператора

$$Q = \partial_t + \frac{U+V}{2}\partial_x -$$

$$- \frac{1}{4}\Big\{(U+V)^2(U+m_1)\partial_U + (U+V)^2(V+m_2)\partial_V - (m_1-m_2)(U^2\partial U - V^2\partial_V)\Big\}. \quad (61)$$

Для знаходження розв'язку системи (24), інваріантного відносно оператора (61), необхідно проінтегрувати систему рівнянь Лагранжа

$$\frac{dt}{-4} = \frac{dx}{-2(U+V)} =$$

$$= \frac{dU}{(U+m_1)(U+V)^2 + (m_2-m_1)U^2} = \frac{dV}{(V+m_2)(U+V)^2 + (m_1-m_2)V^2}. \quad (62)$$

На противагу аналогічним системам для ліївських операторів (46) ця система є *нелінійною* відносно шуканих функцій U і V, тому її не вдається проінтегрувати без знаходження спеціальної заміни залежних змінних. Нами було встановлено, що після заміни

$$t = t, \quad x = x, \quad w = U + V, \quad z = \frac{m_1 - m_2}{2}\left(\frac{U+V}{U-V} - \frac{m_1+m_2}{m_1-m_2}\right) \quad (63)$$

система (62) набирає вигляду

$$\frac{dt}{-4} = \frac{dx}{-2w} = \frac{dw}{w^2(w-2z)} = \frac{dz}{w(z^2 - m_1m_2)}. \quad (64)$$

Перші інтеграли J_1, J_2, J_3 системи (64) залежать від знаку m_1m_2. Можливі три різні випадки:

а) $m_1m_2 = 0$,

$$J_1 = t + \frac{4}{wz} - \frac{2}{z^2},$$
$$J_2 = x - \frac{2}{z}, \quad (65)$$
$$J_3 = \frac{3}{wz^2} - \frac{1}{z^3};$$

б) $m_1m_2 < 0$,

$$J_1 = t + \frac{2z}{m_1m_2w}\frac{wz - 2m_1m_2}{z^2 - m_1m_2},$$
$$J_2 = x - \frac{2}{w}\frac{wz - 2m_1m_2}{z^2 - m_1m_2}, \quad (66)$$
$$J_3 = \frac{2}{\sqrt{-m_1m_2}}\operatorname{arctg}\frac{z}{\sqrt{-m_1m_2}} + \frac{2}{w}\frac{wz - 2m_1m_2}{z^2 - m_1m_2};$$

в) $m_1m_2 > 0$,

$$J_1 = t + \frac{2z}{m_1m_2w}\frac{wz - 2m_1m_2}{z^2 - m_1m_2},$$
$$J_2 = x - \frac{2}{w}\frac{wz - 2m_1m_2}{z^2 - m_1m_2}, \quad (67)$$

$$J_3 = \frac{1}{\sqrt{m_1 m_2}} \ln\left|\frac{z - \sqrt{m_1 m_2}}{z + \sqrt{m_1 m_2}}\right| + \frac{2}{w}\frac{wz - 2m_1 m_2}{z^2 - m_1 m_2}.$$

Таким чином, розв'язок системи (24), інваріантний відносно оператора (61), має вигляд

$$J_1 = \varphi(J_2), \qquad J_3 = \psi(J_2), \tag{68}$$

де φ і ψ — довільні гладкі функції. Підставивши анзац (68) в систему (24) у випадку, наприклад, коли $m_2 = 0$, $m_1 = 1$ (при $m_1 \neq 1$ система (24) заміною $t \to m_1^{-2} t$, $x \to m_1^{-1} x$, $U \to m_1 U$, $V \to m_1 V$ зводиться до такої ж, але з $m_1 = 1$), одержимо редуковану систему ЗДР

$$\ddot{\varphi} + 1 = 0, \qquad 4\ddot{\psi} + \dot{\varphi} = 0. \tag{69}$$

Оскільки це лінійна система, то легко знайти її загальний розв'язок, використавши який та анзац (68), знайдемо розв'язок системи (24) при $m_2 = 0$, $m_1 = 1$:

$$U = \frac{2x^3/3 + 2x^2 + 4C_1(x+2) + 4(C_2 - t)}{W}, \qquad V = \frac{4(t - C_2) - 2x^2}{W}, \tag{70}$$

де $W = x^4/12 + t^2 + C_1(x^2 - 2t) + 2C_2 x$ і C_1, C_2 — сталі інтегрування.

Розгляньмо систему (24) у випадку $m_1 = m_2 = 0$, тобто

$$U_t = U_{xx} + U(U_x + V_x), \qquad V_t = V_{xx} + V(U_x + V_x). \tag{71}$$

Заміною

$$U = u^1(t,x) + u^2(t,x), \qquad V = u^1(t,x) - u^2(t,x) \tag{72}$$

система (71) зводиться до вигляду

$$u_t^1 = u_{xx}^1 + 2u^1 u_x^1, \qquad u_t^2 = u_{xx}^2 + 2u^2 u_x^1. \tag{73}$$

Як випливає з теореми 3, система (71) Q-умовно інваріантна відносно оператора

$$Q = \partial_t + \frac{U + V + 2\alpha_0}{2}\partial_x - \frac{(U+V)(U+V+2\alpha_0)(U\partial_U + V\partial_V)}{4}, \tag{74}$$

який з урахуванням заміни (72) набирає вигляду

$$Q = \partial_t + (u^1 + \alpha_0)\partial_x - u^1(u^1 + \alpha_0)\left(u^1\partial_{u^1} + u^2\partial_{u^2}\right). \tag{75}$$

Хоча відповідна система рівнянь Лагранжа є нелінійною, її неважко проінтегрувати і знайти анзац

$$\alpha_0^2 t - \frac{\alpha_0}{u^1} + \ln\left(1+\frac{\alpha_0}{u^1}\right) = \varphi(\omega),$$
$$\frac{u^2}{u^1} = \psi(\omega), \tag{76}$$
$$\omega = x - \frac{1}{u^1}.$$

Анзац (76) редукує систему ДК (71) до системи ЗДР

$$\ddot{\varphi} = -(\dot{\varphi}-\alpha_0)^2,$$
$$\ddot{\psi} = 0, \tag{77}$$

розв'язавши яку та використавши анзац (76), знайдемо розв'язок системи (71) в неявному вигляді

$$u^1 = \frac{1+\alpha_0 \exp\theta}{x-\exp\theta},$$
$$\frac{u^2}{u^1} = C_1\left(x-\frac{1}{u^1}\right) + C_2, \tag{78}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі інтегрування, $\theta = \alpha_0^2 t - \alpha_0 x$. Підставляючи в (78) формули (72), отримуємо розв'язок в явному вигляді в термінах початкових змінних

$$U = \frac{(\alpha_0(C_1x + C_2 + 1) + C_1)\exp\theta + C_2 + 1}{x - \exp\theta},$$
$$V = \frac{(\alpha_0(C_1x + C_2 - 1) + C_1)\exp\theta + C_2 - 1}{x - \exp\theta}. \tag{79}$$

Зауваження 3. Розв'язки (70) і (79) мають такі властивості:

$$(U, V) \to (0, 0), \quad (U_x, V_x) \to (0, 0), \quad x \to \mp\infty, \quad \alpha_0 > 0,$$

тому вони можуть бути використані при розв'язанні відповідних задач Діріхле і Ноймана для системи ДК (24).

Зауваження 4. Ми побудували розв'язок (79) нелінійної системи ДК (71) з метою продемонструвати ефективність застосування оператора Q-умовної симетрії (74). Зазначимо, що розглядувана система рівнянь інваріантна відносно нескінченновимірної МАІ (див. оператор (27)), тому неважко побудувати нескінченну кількість функціонально незалежних розв'язків системи ДК (71) шляхом розв'язання рівнянь Лі (див., наприклад, [12, с. 20]) для оператора (27). У підсумку одержуємо таку формулу для побудови нових розв'язків:

$$U_{\text{new}} = U_0 + c(U_0 + V_0)M - 2cM_x + \frac{c^2 M}{2},$$
$$V_{\text{new}} = V_0 - c(U_0 + V_0)M + 2cM_x - \frac{c^2 M}{2},$$

де $(U_0(t,x), V_0(t,x))$ — відомий розв'язок (71), c — довільна стала, а $M = M(t,x)$ — будь-який розв'язок лінійного рівняння дифузії $M_t = M_{xx}$.

Врешті-решт розгляньмо систему

$$U_t = \lambda_1 U_{xx} + UU_x + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(U+m)V_x,$$
$$V_t = \lambda_2 V_{xx} + VV_x + \frac{\lambda_2}{\lambda_1}(V-m)U_x, \tag{80}$$

де $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$.

З теореми 4 випливає, що ця система допускає лише тривіальну ліївську симетрію, за допомогою якої можна побудувати лише плоскохвильові розв'язки вигляду (47). Проте вона допускає ще оператор Q-умовної інваріантності (40), який породжує анзац

$$U = \frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_2}t\varphi(\omega) + \lambda_1\lambda_2\psi(\omega) - \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}m,$$
$$V = -\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_1}t\varphi(\omega) - \lambda_1\lambda_2\psi(\omega) + \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}m, \tag{81}$$
$$\omega = (\lambda_1+\lambda_2)mt + (\lambda_1-\lambda_2)x.$$

Анзац (81) редукує систему ДК (80) до системи ЗДР

$$\ddot\varphi = \varphi\dot\psi + k\dot\varphi,$$
$$\ddot\psi = \psi\dot\psi + \varphi, \tag{82}$$

де $k = 2m/(\lambda_1-\lambda_2)^2$. Тепер стає очевидним, що будь-який розв'язок цієї системи ЗДР $(\varphi \neq \text{const}, \psi)$ породжує *неліївський розв'язок* вихідної нелінійної системи ДК (80), оскільки він не може бути зведеним до вигляду (47).

Якщо в системі (82) виконати заміну

$$\varphi = y'' - yy' + ky',$$
$$\psi = y - k, \tag{83}$$

то друге рівняння системи задовольниться тотожно, а з першого одержимо ЗДР четвертого порядку для визначення невідомої функції $y = y(\omega)$:

$$y^{IV} - yy''' - (4y'-k)y'' + y(y')^2 = 0. \tag{84}$$

Отже, використавши формули (83) і анзац (81), отримаємо розв'язки системи рівнянь (80) в неявному вигляді

$$U = t\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_2}\left(y''-yy'+\frac{2m}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}y'\right) + \lambda_1\lambda_2 y - \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}m,$$
$$V = -t\frac{(\lambda_1-\lambda_2)^2}{\lambda_1}\left(y''-yy'+\frac{2m}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}y'\right) - \lambda_1\lambda_2 y + \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2}{(\lambda_1-\lambda_2)^2}m,$$

де функцію $y = y(\omega)$ потрібно знайти з рівняння (84).

Таким чином, у цій роботі ми довели теорему 1, яка дає вичерпний перелік всеможливих МАІ, відносно яких є інваріантною нелінійна система ДК (9) при $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$. На противагу системам реакції-дифузії, всеможливі МАІ якої описано в [17 – 19], кількість нееквівалентних алгебр симетрій Лі для системи ДК (9) набагато менша, що є наслідком особливої ролі зафіксованих нелінійностей UU_x та VV_x, які різко обмежують структуру можливих алгебр інваріантності.

Нами знайдено нелінійну систему ДК (24) з унікальними симетрійними властивостями. З одного боку, вона інваріантна відносно узагальненої алгебри Ґалілея $AG_2^0(1,1)$ при $m_1 \neq m_2$ та $AG_2(1,1)$ при $m_1 = m_2$ (див. теорему 2), а з другого — допускає оператори Q-умовної симетрії з кубічними нелінійностями відносно залежних змінних U і V (див. теорему 3). Наскільки нам відомо, для *систем рівнянь оператори Q-умовної симетрії такої складної структури знайдено вперше*. Досі аналогічні оператори було знайдено лише для скалярних рівнянь [15, 21]. Важливим є також той факт, що процес редукції системи ДК (24) за побудованими операторами Q-умовної симетрії попри свою складність (довелося шукати спеціальні заміни залежних змінних) приводить до набагато простіших систем редукованих рівнянь (див. системи (69), (77)), ніж аналогічна редукція за ліївськими операторами (див. системи (48), (50), (52), (54)). Це ще раз доводить важливість пошуку неліївських симетрій нелінійних рівнянь.

1. *Ames W. F.* Nonlinear partial differential equations in engineering. – New York: Acad. Press, 1972. – 319 p.
2. *Aris R.* The mathematical theory of diffusion and reaction in permeable catalysts. II. – Oxford: Clarendon Press, 1975. – 310 p.
3. *Murray J. D.* Mathematical biology. – Berlin: Springer, 1989. – 767 p.
4. *Gilding B. H., Kersner R.* The characterization of reaction-convection-diffusion processes by travelling waves // J. Different. Equat. – 1996. – **124**. – P. 27 – 79.
5. *Burgers J.* The nonlinear diffusion equation. – Dordrecht: Reidel, 1974. – 240 p.
6. *Катков В. Л.* Групповая классификация решений уравнения Хопфа // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 1965. – **6**. – С. 105 – 106.
7. *Чернига Р. М.* О двумерных нелинейных уравнениях, инвариантных относительно алгебры Галилея // Теоретико-групповые исследования уравнений мат. физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1985. – С. 107 – 114.
8. *Cherniha R. M.* Nonlinear Galilei-invariant PDEs with infinite-dimensional Lie symmetry // J. Math. Anal. and Appl. – 2001. – **253**. – P. 126 – 141.
9. *Bluman G. W., Cole J. D.* The general similarity solution of the heat equation // J. Math. and Mech. – 1969. – **18**. – P. 1025 – 1042.
10. *Arrigo D. J., Broadbridge P., Hill J. M.* Nonclassical symmetry solutions and the methods of Bluman – Cole and Clarkson – Kruskal // J. Math. Phys. – 1993. – **34**. – P. 4692 – 4703.
11. *Черніга Н. Д.* Умовна симетрія рівняння Бюргерса та його узагальнень // Пр. Ін-ту математики НАН України. – 1998. – **19**. – С. 265 – 269.
12. *Овсянников Л. В.* Груповой анализ дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 400 с.
13. *Oron A., Rosenau P.* Some symmetries of the nonlinear heat and wave equations // Phys. Lett. A. – 1986. – **118**. – P. 172 – 176.
14. *Серов М. І., Черніга Р. М.* Симетрії Лі та точні розв'язки нелінійних рівнянь теплопровідності з конвективним членом // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 9. – С. 1262 – 1270.
15. *Cherniha R. M., Serov M. I.* Symmetries, ansätze and exact solutions of nonlinear second-order evolution equations with convection term // Eur. J. Appl. Math. – 1998. – **9**. – P. 527 – 542.
16. *Baikov V., Gazizov R., Ibragimov N., Kovalev V.* Water redistribution in irrigated soil profiles: invariant solutions of the governing equation // Nonlinear Dynamics. – 1997. – **13**. – P. 395 – 409.
17. *Cherniha R.* Lie symmetries of nonlinear two-dimensional reaction-diffusion systems // Rept. Math. Phys. – 2000. – **46**. – P. 63 – 76.
18. *Cherniha R., King J.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. I // J. Phys. A: Math. Gen. – 2000. – **33**. – P. 267 – 282; 7839 – 7841.
19. *Cherniha R., King J.* Lie symmetries of nonlinear multidimensional reaction-diffusion systems. II // Ibid. – 2003. – **36**. – P. 405 – 425.
20. *Olver P.* Applications of Lie groups to differential equations. – New York: Springer, 1986. – 497 p.
21. *Фущич В. И., Штелень В. М., Серов М. И.* Симметрийный анализ и точные решения нелинейных уравнений математической физики. – Киев: Наук. думка, 1989. – 336 с.
22. *Фущич В. І., Черніга Р. М.* Ґалілей-інваріантні системи нелінійних рівнянь типу Гамільтона – Якобі та реакції-дифузії // Допов. НАН України. – 1994. – № 3. – С. 31 – 38.
23. *Cherniha R., Serov M.* Nonlinear systems of the Burgers-type equations: Lie and Q-conditional symmetries, anzaetze and solutions // J. Math. Anal. and Appl. – 2003. – **282**. – P. 305 – 328.
24. *Фущич В. И., Чернига Р. М.* Галилей-инвариантные нелинейные уравнения шредингеровского типа и их точные решения. I // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 10. – С. 1349 – 1357.

Одержано 26.12.2001