УДК 517.5

А. И. Степанец (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

We propose an approach, which enables one to state and solve in completed form principal extremal problems in the theory of approximations in abstract linear spaces. This approach coincides with traditional one in the case of approximation of sets of functions defined and square integrable with respect to a given σ-additive measure on manifolds in R^m, $m \geq 1$.

Пропонується підхід, що дозволяє ставити і розв'язувати в завершеному вигляді основні екстремальні задачі теорії наближень в абстрактних лінійних просторах. Цей підхід співпадає з традиційним у випадку наближення множин функцій, заданих та інтегровних з квадратами відносно заданої σ-адитивної міри на многовидах в R^m, $m \geq 1$.

1. Пространства S^p_Φ. В настоящей работе развивается предложенный в [1 – 7] подход, позволяющий ставить и находить точные решения классических экстремальных задач теории приближения в общих линейных пространствах. В указанных работах рассматриваются пространства S^p_φ, которые строятся следующим образом.

Пусть $\mathfrak{X}$ — произвольное линейное комплексное пространство и $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ — фиксированная счетная система в нем. Предположим, что для любой пары $x, y \in \mathfrak{X}$, в которой хотя бы один из векторов принадлежит φ, определено скалярное произведение (x, y), удовлетворяющее условиям:

1) $(x, y) = \overline{(y, x)}$, где $\bar{z}$ — число, комплексно-сопряженное с z;
2) $(\lambda x_1 + \mu x_2, y) = \lambda(x_1, y) + \mu(x_2, y)$, λ, μ — произвольные числа;
3) $(\varphi_k, \varphi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ 1, & k = l. \end{cases}$

Каждому элементу $f \in \mathfrak{X}$ сопоставляется система чисел $\hat{f}(k)$ посредством равенств

$$\hat{f}(k) = \hat{f}_\varphi(k) = (f, \varphi_k), \quad k = 1, 2, \ldots \quad (k \in N), \tag{1}$$

и при фиксированном $p \in (0, \infty)$ полагается

$$S^p_\varphi = S^p_\varphi(\mathfrak{X}) = \left\{ f \in \mathfrak{X}: \sum_{k=1}^\infty \left|\hat{f}_\varphi(k)\right|^p < \infty \right\}. \tag{2}$$

Элементы $x, y \in S^p_\varphi$ считаются тождественными, если при всех $k \in N$ $\hat{x}_\varphi(k) = \hat{y}_\varphi(k)$.

Для векторов $x, y \in \mathfrak{X}$ определяется φ-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho_\varphi(x, y)_p = \left(\sum_{k=1}^\infty \left| \hat{x}_\varphi(k) - \hat{y}_\varphi(k) \right|^p \right)^{1/p}.$$

Нулевым элементом пространства S^p_φ называется вектор θ, для которого $\hat{\theta}_\varphi(k) = 0$ при всех $k \in N$. Расстояние $\rho_\varphi(\theta, x)$, $x \in S^p_\varphi$, называется φ-нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_{\varphi,p}$. Таким образом,

$$\|x\|_{\varphi,p} = \rho_\varphi(\theta, x) = \left(\sum_{k=1}^\infty \left|\hat{x}_\varphi(k)\right|^p \right)^{1/p}. \tag{3}$$

Множество S^p_φ — линейное пространство. При $p \geq 1$ φ-норма удовлетворяет всем необходимым аксиомам нормы и тогда S^p_φ — линейное нормированное пространство, содержащее ортонормированную систему φ. При $p = 2$ пространство S^2_φ при условии его полноты является гильбертовым. При остальных $p \in (0, \infty)$ пространства S^p_φ наследуют важнейшие свойства гильбертовых пространств — равенство Парсеваля в виде соотношения (3), минимальное свойство частных сумм ряда Фурье и др.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=1}^\infty$ — заданная система комплексных чисел. Если для данного элемента $f \in \mathfrak{X}$ существует элемент $F \in \mathfrak{X}$, для которого

$$\hat{F}_\varphi(k) = \psi_k \hat{f}(k), \qquad k \in N,$$

то вектор F называют ψ-интегралом для f и записывают $F = \mathcal{J}^\psi f$; если U^p_φ — единичный шар в пространстве S^p_φ,

$$U^p_\varphi = \{ f \in S^p_\varphi,\ \|f\|_{\varphi,p} \leq 1 \},$$

то через ψU^p_φ обозначают множество ψ-интегралов всех элементов из U^p_φ:

$$\psi U^p_\varphi = \{ F \in \mathfrak{X} :\ F = \mathcal{J}^\psi f,\ f \in U^p_\varphi \}.$$

Заметим, что в случае, когда пространство $\mathfrak{X}$ полное и, кроме того,

$$\psi_k \neq 0, \quad k \in N,$$

то

$$\psi U^p_\varphi = \left\{ f \in \mathfrak{X} \colon \sum_{k=1}^\infty \left| \frac{\hat{f}_\varphi(k)}{\psi_k} \right|^p \leq 1 \right\},$$

т. е. множество ψU^p_φ является p-эллипсоидом с полуосями, равными $|\psi_k|$.

В указанных работах находятся точные значения верхних граней наилучших приближений элементов $f \in \psi U^p_\varphi$ посредством полиномов вида

$$P_{\gamma_n} = \sum_{k \in \gamma_n} \alpha_k \varphi_k,$$

где γ_n — фиксированные наборы из n натуральных чисел и α_k — некоторые коэффициенты, точные значения колмогоровских поперечников $d_n(\psi U^p_\varphi; S^p_\varphi)$, а также точные значения величин

$$e_n(\psi U^q_\varphi)_p = \sup_{f \in \psi U^n_\varphi} \inf_{\alpha_k, \gamma_n} \left\| f - P_{\gamma_n} \right\|_{\varphi,p}, \qquad 0 < p, q < \infty,$$

которые называются наилучшими n-членными приближениями q-эллипсоидов ψU^q_φ в пространстве S^p_φ.

Примечательно, что все эти задачи в конечном счете сводятся к соответствующим экстремальным задачам для числовых рядов с положительными членами, решения которых удается получать в явном виде.

Систему чисел (1) можно рассматривать как множество значений некоторой функции $\hat{f}(t)$, заданной на целочисленной решетке Z^m в евклидовом пространстве R^m размерности m, $m \geq 1$, при надлежащей нумерации точек $t \in Z^m$, а скалярное произведение трактовать как оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ на соответствующее множество функций. Кроме того, функционал, определяемый рядом в (2), можно рассматривать как интеграл, построенный по мере $d\mu$, носителем которой является множество Z^m.

Эта точка зрения позволяет предложить следующие построения.

Пусть $(R^m, d\mu)$, $m \geq 1$, — m-мерное евклидово пространство точек $t = (t_1, \ldots, t_m)$, оснащенное некоторой σ-аддитивной мерой $d\mu$, A — μ-измеримое подмножество из $(R^m, d\mu)$, μ-мера которого равна a, где a — конечное, или же $a = \infty$:

$$\mathrm{mes}_\mu A = |A|_\mu = a, \quad a \in (0, \infty];$$

$Y = Y(A, d\mu)$ — множество всех заданных на A функций $y = y(t)$, измеримых относительно меры $d\mu$.

Пусть, далее, $\mathfrak{X}$ — произвольное линейное пространство векторов x и Φ — линейный оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в Y:

$$\Phi : \mathfrak{X} \to Y(A, d\mu), \quad \Phi(x) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \hat{x}, \quad x \in \mathfrak{X}, \quad \hat{x} \in Y(A, d\mu).$$

При заданном $p \in (0, \infty]$ через $L_p(A, d\mu)$ обозначим подмножество функций из $Y(A, d\mu)$, имеющих конечную норму

$$\|y\|_{L_p(A, d\mu)} = \begin{cases} \left(\int_A |y(t)|^p \, dt\right)^{1/p}, & p \in (0, \infty); \\ \operatorname*{ess\,sup}_{t \in A} |y(t)|, & p = \infty, \end{cases} \tag{4}$$

а через $S_\Phi^p = S_\Phi^p(\mathfrak{X}; Y)$ — прообраз в $\mathfrak{X}$ при отображении Φ множества $L_p(A, d\mu)$. Таким образом,

$$S_\Phi^p = S_\Phi^p(\mathfrak{X}; Y) = \{x \in \mathfrak{X}, \|\hat{x}\|_{L_p(A, d\mu)} < \infty\}. \tag{5}$$

Элементы $x_1, x_2 \in S_\Phi^p$ считаются тождественными, если почти всюду относительно меры μ $\hat{x}_1(t) = \hat{x}_2(t)$.

Для элементов $x_1, x_2 \in S_\Phi^p$, $p \in (0, \infty)$, определим Φ-расстояние между ними с помощью равенства

$$\rho_\Phi(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)_{S_\Phi^p} = \|\Phi(x_1 - x_2)\|_{L_p(A, d\mu)} = \left(\int_A |\hat{x}_1(t) - \hat{x}_2(t)|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Нулевым элементом множества S_Φ^p назовем элемент θ, для которого почти всюду на A $\hat{\theta}(t) = 0$.

Расстояние $\rho_\Phi(\theta; x)$, $x \in S_\Phi^p$, называется Φ-нормой элемента x и обозначается через $\|x\|_p = \|x\|_{p,\Phi}$. Таким образом, по определению

$$\|x\|_p = \|x\|_{p,\Phi} = \rho(\theta; x)_{S_\Phi^p} = \|\hat{x}\|_{L_p(A, d\mu)}. \tag{6}$$

В таком случае S_Φ^p — линейное метрическое пространство: операции сложения элементов и умножения их на числа, определенные в $\mathfrak{X}$, остаются пригодными и для любой пары $x_1, x_2 \in S_\Phi^p$. Кроме того, для любых чисел λ_1 и λ_2 элемент $x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ принадлежит к S_Φ^p. Действительно, поскольку $x_3 \in \mathfrak{X}$, то $\hat{x}_3(t) = \lambda_1 \hat{x}_1(t) + \lambda_2 \hat{x}_2(t)$. Если теперь $p \geq 1$, то в силу неравенства Минковского

$$\|x_3\|_p = \|\hat{x}_3\|_{L_p(A,d\mu)} \le |\lambda_1|\|\hat{x}_1\|_{L_p(A,d\mu)} + |\lambda_2|\|\hat{x}_2\|_{L_p(A,d\mu)} =$$
$$= |\lambda_1|\|x_1\|_p + |\lambda_2|\|x_2\|_p.$$

Если же $p \in (0, 1)$, то используя неравенство

$$|a+b|^p \le |a|^p + |b|^p, \quad 0 \le p < 1,$$

получаем

$$\|x_3\|_p = \left(\int_A |\lambda_1\hat{x}_1(t) + \lambda_2\hat{x}_2(t)|^p d\mu\right)^{1/p} \le$$

$$\le \left(|\lambda_1|^p \int_A |\hat{x}_1(t)|^p d\mu + |\lambda_2|^p \int_A |\hat{x}_2(t)|^p d\mu\right)^{1/p} \le 2^{1/p}(|\lambda_1|\|x_1\|_p + |\lambda_2|\|x_2\|_p),$$

т. е. всегда $x_3 \in S^p_\varphi$.

Ясно, что при $p \ge 1$ функционал $\|\cdot\|_p$ удовлетворяет всем необходимым аксиомам нормы и поэтому при $p \ge 1$ S^p_Φ — линейное нормированное пространство.

По терминологии, принятой в теории интегральных преобразований, элемент $\hat{x} = \Phi(x)$ является изображением (Φ-изображением) элемента x, а множество $E(\Phi)$ значений оператора Φ — множеством изображений. Таким образом, Φ-расстояние и Φ-норма — это расстояние и норма в пространстве изображений.

2. Мультипликаторы. Приближающие агрегаты и объекты приближений. В качестве приближающих агрегатов для элементов $x \in S^p_\Phi$ используем элементы из S^p_Φ, у которых образы имеют носители γ_σ заданной меры σ. Понятно, что именно этот принцип заложен в классическом случае при построении, например, тригонометрических полиномов для приближения данной периодической функции, если под оператором Φ понимать отображение функций во множество их коэффициентов Фурье. В общем случае здесь возникают проблемы, которые в конечном счете вызваны тем, что пространства S^p_Φ могут быть не полными. В связи с этим дадим следующие определения.

Пусть $\omega = \omega(t)$ — некоторая функция из $Y(A, d\mu)$. Тогда через M^ω_Φ обозначим оператор, действующий из $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{X}$, который данному $x \in \mathfrak{X}$ ставит в соответствие элемент $x_\omega \in \mathfrak{X}$ такой, что если $\Phi(x) = \hat{x}(t)$, то почти всюду $\hat{x}_\omega(t) = \Phi(x_\omega) = \omega(t)\hat{x}(t)$. Оператор M^ω_Φ будем называть мультипликатором оператора Φ, порождаемым функцией ω; через $\Omega_\Phi(\mathfrak{X}) = \Omega_\Phi(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ обозначим подмножество функций ω из $Y(A, d\mu)$, для которых мультипликаторы M^ω_Φ существуют.

Если $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ — некоторые подмножества из $\mathfrak{X}$, $\omega \in \Omega_\Phi(\mathfrak{X})$ и оператор M^ω_Φ отображает $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}'$, то будем говорить, что M^ω_Φ имеет тип $(\mathfrak{N}, \mathfrak{N}')$. В частности, если M^ω_Φ отображает S^p_Φ в S^p_Φ, то оператор M^ω_Φ имеет тип (S^p_Φ, S^p_Φ) или, короче, тип (p, p). Множество функций ω, порождающих операторы типа (p, p), обозначим через Ω^p_Φ.

Итак, если $\omega \in \Omega^p_\Phi$ и оператор M^ω_Φ действует из S^p_Φ, то он действует также в S^p_Φ; при этом каждому $x \in S^p_\Phi$ соответствует элемент $x_\omega = M^\omega_\Phi(x)$, для которого почти всюду на A выполняется равенство

$$\hat{x}_\omega(t) = \Phi(x_\omega) = \omega(t)\hat{x}(t), \qquad \hat{x}_\omega \in L_p(A, d\mu). \tag{7}$$

Пусть при заданном $\sigma > 0$ γ_σ — μ-измеримое множество в A,

$$\operatorname{mes}_\mu \gamma_\sigma \overset{\text{df}}{=} |\gamma_\sigma| = \sigma, \qquad \sigma \le a, \tag{8}$$

и $\lambda = \lambda(t)$ — измеримая функция с носителем γ_σ. Предположим, что при заданном $p \in (0, \infty)$ $\lambda \in \Omega_\Phi^p$ и $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) \overset{\text{df}}{=} x_\lambda = M_\Phi^\lambda(x)$, так что согласно (7)

$$\hat{U}_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) = \Phi(U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)) = \begin{cases} \lambda(t)\hat{x}(t), & t \in \gamma_\sigma; \\ 0, & t \,\overline{\in}\, \gamma_\sigma, \quad x \in S_\Phi^p. \end{cases} \tag{9}$$

Именно элементы $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)$ и рассматриваются в качестве приближающих агрегатов для $x \in S_\Phi^p$. Если при этом $\lambda(t) \equiv 1$ на γ_σ, т. е. когда $\lambda(t)$ совпадает с характеристической функцией $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ множества γ_σ, то полагаем $U_{\gamma_\sigma}(x; \chi_{\gamma_\sigma}) = U_{\gamma_\sigma}(x)$.

Пусть $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ — множество всех измеримых подмножеств из A, меры которых равны σ. Будем говорить, что при данном $p > 0$ оператор Φ удовлетворяет условию (A_p), если функции $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ всех множеств $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ принадлежат к Ω_Φ^p при любых $\sigma \in [0, a)$. Таким образом, если Φ удовлетворяет условию (A_p), то все элементы $U_{\gamma_\sigma}(x)$ определены при любом $x \in S_\Phi^p$ и находятся в S_Φ^p. Элемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$ называется сужением элемента x ранга σ, элемент $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)$ — λ-сужением x ранга σ.

Пусть p — любое положительное число и $x \in S_\Phi^p$. Тогда в силу (6) и (9) имеем

$$\left\| x - U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) \right\|_p^p = \left\| \hat{x}(t) - \hat{U}_{\gamma_\sigma}(x; \lambda; t) \right\|_{L_p(A, d\mu)}^p =$$

$$= \int_{\gamma_\sigma} |1 - \lambda(t)|^p |\hat{x}(t)|^p \, d\mu + \int_{A \setminus \gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu.$$

Отсюда приходим к следующему утверждению.

Предложение 1. *Пусть $p \in (0, \infty)$, $x \in S_\Phi^p = S_\Phi^p(\mathfrak{X}; Y)$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ и оператор Φ удовлетворяет условию (A_p). Тогда*

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \overset{\text{df}}{=} \inf_{\lambda \in \Omega_\Phi^p} \| x - U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) \|_p = \| x - U_{\gamma_\sigma}(x) \|_p.$$

При этом выполняется равенство

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p = \|x\|_p^p - \int_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu. \tag{10}$$

Таким образом, если $\chi_{\gamma_\sigma} \in \Omega_\Phi^p$, то среди всех элементов $U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda)$, порождаемых мультипликаторами M_Φ^λ и удовлетворяющих условию (9), наименее уклоняется от элемента x по Φ-норме в пространстве S_Φ^p элемент $U_{\gamma_\sigma}(x)$, т. е. среди всех λ-сужений x данного ранга σ ближайшим к x оказывается именно его сужение при $\lambda(t) \equiv 1$. Понятно, что это свойство является аналогом минимального свойства сумм Фурье в пространствах Гильберта L_2.

Пусть $\Gamma = \{\gamma_\sigma\}_{\sigma>0}$, $|\gamma_\sigma| = \sigma$, — семейство измеримых подмножеств из A, исчерпывающее при $\sigma \to \infty$ все множество A, т. е. обладающее тем свойством, что любая точка $t \in A$ находится во всех множествах γ_σ при всех достаточно больших значениях σ, так что

$$\lim_{\substack{\sigma\to\infty \\ \gamma_\sigma\in\Gamma}} \int\limits_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu = \int\limits_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \qquad \forall x \in S_\Phi^p. \tag{11}$$

Объединяя соотношения (10) и (11), видим, что

$$\lim_{\substack{\sigma\to\infty \\ \gamma_\sigma\in\Gamma}} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p = 0 \qquad \forall x \in S_\Phi^p.$$

Определим теперь объекты приближения — объединения элементов $x \in \mathfrak{X}$, соответствующих в теории приближений понятию класса функций. Такие объекты, как и приближающие агрегаты, вводятся с помощью мультипликаторов. Однако здесь представляется более удобным использование несколько другой терминологии, более близкой к традиционной. Пусть $\psi = \psi(t)$ — произвольная функция из $\Omega_\Phi(\mathfrak{X})$ и M_Φ^ω — мультипликатор оператора Φ, порождаемый этой функцией. В таком случае образ x_ψ элемента x при отображении M_Φ^ψ будем называть ψ-интегралом элемента x и записывать $M_\Phi^\psi(x) = x_\psi = \mathcal{J}^\psi x$; при этом x иногда удобно называть ψ-производной для x_ψ и записывать $x = D^\psi x_\psi$.

Таким образом, если x_ψ является ψ-интегралом для x, то почти всюду

$$\hat{x}_\psi = \Phi(\mathcal{J}^\psi x) = \psi(t)\hat{x}(t). \tag{12}$$

Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество из $\mathfrak{X}$, то через $\psi\mathfrak{N}$ обозначается множество ψ-интегралов всех тех $x \in \mathfrak{N}$, для которых они существуют. В частности, если U_Φ^p — единичный шар в некотором пространстве S_Φ^p,

$$U_\Phi^p = \{x : x \in S_\Phi^p, \ \|x\|_{p,\Phi} \le 1\},$$

то ψU_Φ^p — множество ψ-интегралов всех $x \in U_\Phi^p$, для которых эти интегралы существуют.

Сопоставляя соотношения (12) и (7), видим, что в качестве функций ψ, для которых определение ψ-интеграла корректно, можно выбрать любую функцию из $\Omega_\Phi(S_\Phi^p)$. В этом случае справедливо включение $\psi S_\Phi^p \subset S_\Phi^p$.

3. Аппроксимационные характеристики. В настоящей работе рассматриваются следующие аппроксимационные характеристики множеств ψU_Φ^p. Для каждого $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ полагаем

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q = \inf_{\lambda\in\Omega_\Phi^p} \|x - U_{\gamma_\sigma}(x;\lambda)\|_{q,\Phi}, \qquad x \in S_\Phi^p, \tag{13}$$

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U_\Phi^p)_q = \sup_{x\in\psi U_\Phi^p} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q \tag{14}$$

и

$$\mathscr{D}_\sigma(\psi U_\Phi^p)_q = \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U_\Phi^p)_q. \tag{15}$$

В случае приближения периодических функций тригонометрическими полиномами величине $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q$ будет соответствовать наилучшее приближение функции x посредством полиномов степени σ; величине $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U_\Phi^p)_q$ — верхняя грань на заданном множестве функций таких наилучших приближений; величина $\mathscr{D}_\sigma(\psi U_\Phi^p)_q$ напоминает тригонометрический поперечник порядка σ множества ψU_Φ^p.

Рассматриваются также следующие характеристики, которым в периодическом случае соответствуют величины, связанные с наилучшим σ-членным приближением:

$$e_\sigma(x)_q = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_q = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \inf_{\lambda \in \Omega_\Phi^p} \left\| x - U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda) \right\|_{q,\Phi} \tag{16}$$

и

$$e_\sigma(\psi U_\Phi^p)_q = \sup_{x \in \psi U_\Phi^p} e_\sigma(x)_q. \tag{17}$$

Дальнейшие рассмотрения ограничиваются случаем, когда $p = q$. Кроме того, предполагается, что соответствующие характеристические функции $\chi_{\gamma_\sigma}(\cdot)$ принадлежат к Ω_Φ^p, т. е. оператор Φ удовлетворяет условию (A_p). В таком случае, согласно предложению 1, наибольший интерес представляют величины (13) – (17), когда $\lambda(t) = \chi_{\gamma_\sigma}(t)$. В связи с этим полагаем

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p = \left\| x - U_{\gamma_\sigma}(x) \right\|_{p,\Phi}, \qquad x \in S_\Phi^p, \tag{18}$$

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U_\Phi^p)_p = \sup_{x \in \psi U_\Phi^p} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(x)_p \tag{19}$$

и

$$\mathscr{D}_\sigma(\psi U_\Phi^p)_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U^p)_{p,\Phi}. \tag{20}$$

Аналогично,

$$e_\sigma(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left\| x - U_{\gamma_\sigma}(x) \right\|_{p,\Phi} \tag{21}$$

и

$$e_\sigma(\psi U_\Phi^p)_p = \sup_{x \in \psi U_\Phi^p} e_\sigma(x)_p.$$

4. Величины $\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(U_\Phi^p)_p$ и $\mathscr{D}_\sigma(\psi U_\Phi^p)_p$. В дальнейшем используется понятие перестановки функции в убывающем порядке. Это понятие, по-видимому, впервые появилось в работах Харди и Литтлвуда (см. [8], гл. X) и затем с успехом использовалось многими авторами. Приведем здесь необходимые определения, придерживаясь текста из книги Н. П. Корнейчука [9] (гл. 6). Там рассматриваются перестановки функций одной переменной, но основные определения пригодны и в общем случае.

Пусть на μ-измеримом множестве $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\operatorname{mes}_\mu A = a$, где a — конечно или бесконечно, задана неотрицательная и μ-измеримая функция $f(x)$, у которой функция распределения

$$m_f(y) = \operatorname{mes}_\mu E_y, \qquad E_y = \{x : x \in A,\ f(x) \geq y\}, \qquad y \geq 0,$$

принимает при $y > 0$ только конечные значения.

Функция $t = m_f(y)$ не возрастает при всех $y \geq 0$, при этом $m_f(0) = a$. Если $m_f(y)$ непрерывна и строго убывает, то на промежутке $t \in (0, a)$ существует строго убывающая обратная к ней функция $y = \overline{\varphi}(t)$, которую и называют перестановкой функции $f(x)$ в убывающем порядке. В общем случае, в зависимости от функции $f(\cdot)$, $m_f(y)$ может иметь промежутки постоянства, а также разрывы первого рода в конечном или же счетном множестве точек. Чтобы однозначно определить обратную к ней функцию, исправим график функции $m_f(y)$ следующим образом. В каждой точке разрыва y_j функции $m_f(y)$ дополним ее график отрезком $y = y_j$, $m_f(y_j + 0) \leq t \leq m(y_j + 0)$, а на каждом промежутке $[\alpha, \beta]$, где $m_f(y)$ постоянна, оставим в ее графике только одну точку с координатами, например, $y = (\alpha + \beta)/2$, $t = m_f((\alpha + \beta)/2)$. В таком случае каждому $t \in (0, a)$ будет соответствовать единственная точка с координатами $(t, m_f^{-1}(t))$. Это отображение и определяет функцию $y = \overline{\varphi}(t)$ — перестановку функции $\varphi(x)$ в рассматриваемом случае.

При любом $y \geq 0$ мера Лебега множества точек $t \in (0, a)$, на котором $\overline{\varphi}(t) \geq y$, равна $m_f(y)$. Таким образом,

$$\operatorname{mes}\{t : t \in (0, a),\ \overline{\varphi}(t) \geq y\} = \operatorname{mes}_\mu\{x : x \in A,\ f(x) \geq y\} = m_f(y). \tag{22}$$

Отсюда, в частности, следует справедливость равенства

$$\int_0^a F(\overline{\varphi}(t))\,dt = \int_A F(f(x))\,d\mu \tag{23}$$

для любой функции F, для которой эти интегралы существуют (см. [8], гл. X).

В принятых обозначениях справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\psi = \psi(t)$ — произвольная функция из $Y(A, d\mu)$, существенно ограниченная на A:*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in A} |\psi(t)| = \|\psi\|_M < \infty, \tag{24}$$

и в случае, когда множество A не ограничено,

$$\lim_{|t| \to \infty} \psi(t) = 0. \tag{25}$$

Тогда для произвольных $\mathfrak{X}$, $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, $\sigma < a$ и $p \in (0, \infty)$, для любого оператора Φ, удовлетворяющего условию (A_p), справедливы оценки

$$\mathscr{E}^p_{\gamma_\sigma}(\psi U^p_\Phi)_p \leq \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0 + 0), \tag{26}$$

где $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — перестановка в убывающем порядке функции

$$\varphi_\sigma(t) = \varphi_{\gamma_\sigma}(t) = \begin{cases} |\psi(t)|^p, & t \in A \setminus \gamma_\sigma; \\ 0, & t \in \gamma_\sigma, \end{cases} \tag{27}$$

и

$$\mathscr{D}_\sigma(\psi U^p_\Phi)_p \leq \overline{\psi}(\sigma + 0), \tag{28}$$

где $\overline{\psi}(v)$ — перестановка в убывающем порядке функции $|\psi(t)|$.

Если, к тому же, функции $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ для любых $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ и $\sigma \in (0, a)$ принадлежат множеству $E(\Phi)$, а их прообразы U_{γ_σ} имеют ψ-интегралы, то со-

отношения (26) и (28) являются равенствами. При этом в Γ_σ имеется множество γ_σ^*, для которого выполняются равенства

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma^*}(\psi U_\Phi^p)_p = \mathcal{D}_\sigma(\psi U_\Phi^p)_p = \overline{\psi}(\sigma+0). \tag{29}$$

Это множество определяется соотношением

$$\gamma_\sigma^* = \{ t\in A: |\psi(t)| \geq \overline{\psi}(\sigma+0)\}, \quad \operatorname{mes}\gamma_\sigma^* = \sigma.$$

Доказательство. Условия (24) и (25) гарантируют тот факт, что для функции $|\psi(t)|$ ее функция распределения $m_{|\psi|}(y)$,

$$m_{|\psi|}(y) = \operatorname{mes}_\mu E_y, \quad E_y = \{t\in A: |\psi(t)|\geq y\}, \quad y\geq 0, \tag{30}$$

принимает при любом $y>0$ только конечные значения из промежутка $[0, a]$. Поэтому величины $\overline{\varphi}_\sigma(0+0)$ и $\overline{\psi}(\sigma+0)$ всегда определены.

Заметим также, что в случае, когда $E(\Phi) = L_p(A, d\mu)$, оператор Φ удовлетворяет условию (A_p) и в силу условий (24) и (25) также выполняются требования, обеспечивающие равенства в соотношениях (26) и (28).

Докажем сначала соотношение (26). Если $x\in \psi U_\Phi^p$, то согласно (18), (6) и (12)

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}^p(x)_p = \left\|\Phi((x)-U_{\gamma_\sigma}(x))\right\|_{L_p}^p = \left\|\hat{x}(t)-\chi_{\gamma_\sigma}(t)\hat{x}(t)\right\|_{L_p}^p =$$

$$= \left\|\psi(t)y(t)-\chi_{\gamma_\sigma}(t)\psi(t)y(t)\right\|_{L_p}^p = \int\limits_{A\setminus\gamma_\sigma}|\psi(t)y(t)|^p\,d\mu, \tag{31}$$

где $L_p = L_p(A, d\mu)$, а y — некоторая функция из единичного шара U_p в пространстве $L_p(A, d\mu)$,

$$U_p = \{ y\in L_p(A, d\mu),\ \|y\|_{L_p(A,d\mu)}\leq 1\}.$$

Поэтому согласно (19)

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}^p(\psi U_\Phi^p)_p \leq \sup_{y\in U_p}\int\limits_{A_\sigma}|\psi(t)|^p|y(t)|^p\,d\mu, \quad A_\sigma = A\setminus\gamma_\sigma.$$

Если $y\in U_p$, то функция $h=|y(t)|^p$ принадлежит подмножеству U_1^+ неотрицательных функций из U_1. Следовательно,

$$\mathcal{E}_{\gamma_\sigma}^p(\psi U_\Phi^p)_p \leq \sup_{h\in U_1^+}\int\limits_{A_\sigma}|\psi(t)|^p h(t)\,d\mu = \sup_{h\in U_1^+}\int\limits_{A_\sigma}\varphi_\sigma(t)h(t)\,d\mu$$

и для получения (26) остается показать, что

$$\sup_{h\in U_1^+}\int\limits_{A_\sigma}\varphi_\sigma(t)h(t)\,d\mu = \overline{\varphi}_\sigma(0+0). \tag{32}$$

Функция $\varphi_\sigma(t)$ в силу (24) существенно ограничена на A_σ. Поэтому ее перестановка в убывающем порядке будет ограниченной. Следовательно, существует предел

$$\overline{\varphi}_\sigma(0+0) = \lim_{\upsilon\to 0+0}\overline{\varphi}_\sigma \overset{\text{df}}{=} y_\sigma. \tag{33}$$

Пусть $e_y = E(t: \varphi_\sigma(t)\geq y)$. Ясно, что точка y_σ имеет то свойство, что $\operatorname{mes}_\mu e_y >$

>0 при $0<y<y_\sigma$ и $\operatorname{mes}_\mu e_y=0$ при $y>y_\sigma$. Отсюда, в частности, следует

$$y_\sigma = \operatorname*{ess\,sup}_{t\in A_\sigma} \varphi_\sigma(t). \tag{34}$$

Если $h\in U_1^+$ и $y\in(0,y_\sigma)$, то

$$\int\limits_{A_\sigma} \varphi_\sigma(t)h(t)\,d\mu \le \int\limits_{e_y} \varphi_\sigma(t)h(t)\,d\mu + y\int\limits_{A_\sigma\setminus e_y} h(t)\,d\mu \le \int\limits_{e_y} \varphi_\sigma(t)f(t)\,d\mu, \tag{35}$$

где

$$f(t) = h(t) + (\operatorname{mes}_\mu e_y)^{-1}\int\limits_{A_\sigma\setminus e_y} h(t)\,d\mu.$$

Поскольку

$$\int\limits_{e_y} f(t)\,d\mu \le 1,$$

то из (34) и (35) заключаем, что для любой $h\in U_1^+$

$$\int\limits_{A_\sigma} \varphi_\sigma(t)h(t)\,d\mu \le y_\sigma.$$

Следовательно,

$$\sup_{h\in U_1^+}\int\limits_{A_\sigma} \varphi_\sigma(t)h(t)\,d\mu \le y_\sigma, \tag{36}$$

и для доказательства равенства (32) в силу (33) остается показать, что в последнем соотношении строгого неравенства быть не может.

Пусть y — любое число из промежутка $(0,y_\sigma)$ и e_y — соответствующее ему множество. Положим

$$h_y(t) = \begin{cases} (\operatorname{mes}_\mu e_y)^{-1}, & t\in e_y;\\ 0, & t\in A_\sigma\setminus e_y, \end{cases}$$

так что всегда $h_y\in U_1^+$. В то же время

$$y \le \int\limits_{A_\sigma} \varphi_\sigma(t)h_y(t)\,d\mu \le y_\sigma.$$

Устремляя y к y_σ, видим, что действительно в (36) строгого равенства быть не может, что и завершает доказательство равенства (32), а с ним и оценки (26).

Рассматривая нижние грани по множеству Γ_σ обеих частей (26), получаем

$$\mathfrak{D}_\sigma^p(\psi U_\Phi^p)_p \le \inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+0). \tag{37}$$

Принимая во внимание соотношение (27), заключаем, что наименьшее значение величины $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+0)$ будет в случае, когда $\gamma_\sigma=\gamma_\sigma^*$, и это значение равно $\overline{\psi}^p(\sigma+0)$:

$$\inf_{\gamma_\sigma\in\Gamma_\sigma} \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+0) = \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma^*}(0+0) = \overline{\psi}^p(\sigma+0). \tag{38}$$

Этим доказано и соотношение (28).

Пусть теперь функция $\chi_{\gamma_\sigma}(t)$ при любых $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ и $\sigma \in (0, a)$ принадлежит множеству $E(\Phi)$, а ее прообраз U_{γ_σ} имеет ψ-интеграл, который в силу (23) находится в S^p_Φ. Пусть, далее, при заданном $\gamma_\sigma \in \Gamma$ $y \in (0, y_\sigma)$, $e_y = E(\varphi_\sigma(t) \geq$ $\geq y)$, $\chi_{e_y}(t)$ — характеристическая функция множества e_y,

$$h^*_y(t) = (\mathrm{mes}_\mu\, e_y)^{-1/p} \chi_{e_y}(t),$$

U_y — прообраз функции $h^*_y(t)$ при отображении Φ, так что $\Phi(U_y) = h^*_y(t)$ и $x_\psi = \mathcal{J}^\psi U_y$ — ψ-интеграл элемента U_y. В силу сделанных предположений все построенные здесь элементы существуют, и поскольку

$$\int\limits_A \left|h^*_y(t)\right|^p d\mu = \int\limits_{e_y} \left|h^*_y(t)\right|^p d\mu = 1,$$

то $x_\psi \in \psi U^p_\psi$.

Для элемента x_ψ согласно (31) имеем

$$\mathcal{E}^p_{\gamma_\sigma}(x_\psi)_p = \left\|\Phi(x_\psi) - U_{\gamma_\sigma}(x_\psi)\right\|^p_{L_p} = \left\|\psi(t) h^*_y(t)\right\|^p_{L_p} =$$

$$= \mathrm{mes}_\mu\, e_y \int\limits_{e_y} |\psi(t)|^p d\mu \geq y.$$

Учитывая произвольность выбора значения y из промежутка $(0, y_\sigma)$, отсюда заключаем, что во множестве ψU^p_Φ существуют элементы x, для которых значения $\mathcal{E}^p_{\gamma_\sigma}(x)$ будут сколь угодно близкими к значению y_σ. Это с учетом соотношения (33) и означает, что в данном случае соотношение (26) на самом деле является равенством. В таком случае, согласно (37) и (38), будет равенством и соотношение (28). Если при этом множество γ^*_σ выбрано из условия (30), то будет справедливым равенство

$$\overline{\varphi}_{\gamma^*_\sigma}(0 + 0) = \overline{\psi}^p(\sigma + 0)$$

и тогда, согласно соотношению (26) (которое теперь является равенством),

$$\mathcal{E}_{\gamma^*_\sigma}(\psi U^p_\Phi)_p = \overline{\psi}(\sigma + 0),$$

откуда и следует (29). Теорема 1 доказана.

5. Величины $e_\sigma(\psi U^p_\Phi)_p$. В принятых обозначениях справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть $\psi = \psi(t)$ — произвольная функция из $Y(A, d\mu)$, существенно ограниченная на A и в случае, когда множество A не ограничено, удовлетворяет условию* (25).

Тогда для произвольных $\mathfrak{X}$, $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\sigma < a$ и $p \in (0, \infty)$, для любого оператора Φ, удовлетворяющего условию (A_p), выполняется соотношение

$$e^p_\sigma(\psi U^p_\Phi) \leq \sup_{\sigma < q \leq a} \frac{q - \sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\psi}^p(t)}}, \tag{39}$$

в котором $\overline{\psi}(v)$ — перестановка в убывающем порядке функции $|\psi(t)|$. Ве-

личина точной верхней грани в (39) достигается при некотором конечном значении $q = q^*$.

Если, к тому же, множество $E(\Phi)$ *значений оператора* Φ *совпадает со всем пространством* $L_p(A, d\mu)$, *то соотношение (39) на самом деле является равенством.*

Доказательство. Для любого $x \in S_\Phi^p$ согласно (6) и (21) имеем

$$e_\sigma^p(x)_p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left\| \Phi(x - U_{\gamma_\sigma}(x)) \right\|_{L_p}^p = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left\| \hat{x}(t)(1 - \chi_{\gamma_\sigma}(t)) \right\|_{L_p}^p =$$

$$= \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu - \int_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \right) =$$

$$= \int_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu, \qquad L_p \overset{\mathrm{df}}{=} L_p(A, d\mu).$$

Следовательно,

$$e_\sigma^p(\psi U_\Phi^p)_p = \sup_{x \in \psi U_\Phi^p} \left(\int_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \right). \tag{40}$$

Если $x \in \psi U_\Phi^p$, то $\hat{x}(t) = \psi(t)\hat{y}(t)$, где y — некоторый элемент из U_p. Поэтому справедливо соотношение

$$\sup_{x \in \psi U_\Phi^p} \left(\int_A |\hat{x}(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} |\hat{x}(t)|^p \, d\mu \right) \le$$

$$\le \sup_{y \in U_p} \left(\int_A |\psi(t)|^p |y(t)|^p \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} |\psi(t)|^p |y(t)|^p \, d\mu \right) =$$

$$= \sup_{h \in U_1^+} \left(\int_A |\psi(t)|^p h(t) \, d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} |\psi(t)|^p h(t) \, d\mu \right), \tag{41}$$

где, как и ранее, U_1^+ — подмножество неотрицательных функций из U_1.

Для нахождения значений правой части (41) воспользуемся следующим утверждением. Это утверждение, наверное, представляет и самостоятельный интерес, поэтому сформулируем его в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть* A — *любое* μ-*измеримое множество из* R^m, $m \ge 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, *где* a — *конечное, или* $a = \infty$, $\varphi(x)$ — *неотрицательная, существенно ограниченная на* A *функция, для которой в случае, когда множество* A *не ограниченное, предполагается, что*

$$\lim_{|x| \to \infty} \varphi(x) = 0. \tag{42}$$

Тогда при любом $\sigma < a$ *выполняется равенство*

$$\mathscr{E}_\sigma(\varphi) = \sup_{h \in U_1^+} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left(\int_A \varphi(x) h(x) \, d\mu - \int_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \varphi(x) h(x) \, d\mu \right) =$$

$$= \sup_{\sigma < q \le a} \frac{q - \sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}, \tag{43}$$

где $\Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$ — *множество всех* μ*-измеримых подмножеств* γ_σ *из* A, *мера которых равна* σ, *а* $\overline{\varphi}(t)$ — *убывающая перестановка функции* $\varphi(x)$.

Точная верхняя грань в правой части (43) *достигается при некотором конечном значении* $q = q^*$.

Предположим, что теорема 3 доказана. Тогда, полагая $\varphi(x) = |\psi(x)|^p$ и объединяя соотношения (40), (41) и (43), получаем соотношение (39).

Заметим теперь, что знак строгого неравенства в (39) может быть только в том случае, когда такой же знак будет в (41). Строгое неравенство в (39) возможно только из-за того, что не каждая функция $y \in U_p$ имеет свой прообраз в U_Φ^p, обладающий к тому же ψ-интегралом. Однако в случае $E(\Phi) = L_p(A)$ такого быть не может: для любого $y \in U_p$ существует свой прообраз и в силу ограниченности ψ произведение $\psi(t)y(t)$ принадлежит к $L_p(A, d\mu)$ и, следовательно, также имеет свой прообраз в S_Φ^p, а точнее, в ψU_Φ^p. Таким образом, в этом случае соотношение (39) на самом деле является равенством. Следовательно, для доказательства теоремы 2 остается установить теорему 3.

6. Доказательство теоремы 3. Сначала приведем несколько предварительных замечаний. Будем рассматривать интегралы Лебега от неотрицательных μ-измеримых функций $f(x)$, заданных на μ-измеримых множествах A в R^m, $m \geq 1$:

$$I_A(f) = \int_A f(x)\,d\mu,$$

и в случае, когда эта величина конечна, будем записывать $f(x) \in L(A)$. Дадим следующее определение.

Определение 1. *Пусть* $f \in L(A)$ *и* γ_σ — *любое измеримое подмножество из* A *такое, что*

$$\operatorname{mes}_\mu \gamma_\sigma = \sigma < a = \operatorname{mes}_\mu A,$$

т. е. $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma = \Gamma_\sigma(A)$. *Тогда величина*

$$\mathcal{J}_\sigma(f) = \sup_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \int_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu = \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu \tag{44}$$

называется главным значением ранга σ *интеграла* $I_A(f)$.

Справедливо следующее утверждение.

Утверждение 1. *Величина* $\mathcal{J}_\sigma(f)$ *существует для любой* $f \in L(A)$. *При этом выполняется равенство*

$$\mathcal{J}_\sigma(f) = \int_0^\sigma \bar{f}(t)\,dt, \tag{45}$$

где $\bar{f}(t)$ — *убывающая перестановка функции* $f(x)$.

Точная верхняя грань в (44) *реализуется на некотором множестве* $\gamma_\sigma^* \subset A$, $\operatorname{mes}_\mu \gamma_\sigma^* = \sigma$, *т. е.*

$$\mathcal{J}_\sigma(f) = \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu = \int_{\gamma_\sigma^*} f(x)\,d\mu = \int_0^\sigma \bar{f}(t)\,dt. \tag{46}$$

Доказательство. Пусть

$$f_{\gamma_\sigma}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \gamma_\sigma; \\ 0, & x \overline{\in} \gamma_\sigma. \end{cases}$$

Тогда для любого множества γ_σ, согласно (23), имеем

$$\int\limits_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu = \int\limits_{A} f_{\gamma_\sigma}(x)\,d\mu = \int\limits_0^a \bar{f}_{\gamma_\sigma}(t)\,dt = \int\limits_0^\sigma \bar{f}_{\gamma_\sigma}(t)\,dt.$$

Ясно, что при всех $t \in (0, \sigma)$ $\bar{f}_{\gamma_\sigma} \leq \bar{f}(t)$. Поэтому

$$\int\limits_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu \leq \int\limits_0^\sigma \bar{f}(t)\,dt \qquad \forall \gamma_\sigma \subset A.$$

Следовательно, всегда

$$\mathcal{J}_\sigma(f) \leq \int\limits_0^\sigma \bar{f}(t)\,dt,$$

и для доказательства равенств (45) и (46) остается убедиться в существовании множеств γ_σ^*.

Пусть величина y_σ определяется равенством $\bar{f}(\sigma) = y_\sigma$ и пусть сначала y_σ — точка непрерывности функции $m_f(y)$. Тогда положим $\gamma_\sigma^* = E(f(x) \geq y_\sigma)$.

В силу (22) $\operatorname{mes}_\mu \gamma_\sigma^* = \sigma$, и $\bar{f}(t) \geq y_\sigma$ при $t \in (0, \sigma)$. Поэтому согласно (23)

$$\int\limits_{\gamma_\sigma^*} f(x)\,d\mu = \int\limits_0^\sigma \bar{f}(t)\,dt, \tag{47}$$

т. е. в этом случае равенства (45) и (46) доказаны.

Если же y_σ — точка разрыва функции $m_f(y)$, то множество $E(f(x) \geq y)$ может иметь меру бóльшую, чем σ. В этом случае положим $\gamma_\sigma^* = e_1 + e_2'$, $e_1 = E(f(x) > y_\sigma)$, где e_2' — любая измеримая часть множества $e_2 = E(f(x) = y_\sigma)$, для которой выполняется равенство $\operatorname{mes}_\mu e_1 + \operatorname{mes}_\mu e_2' = \sigma$. Ясно, что для так определенного множества γ_σ^* будет выполняться соотношение (47) и в этом случае, что и доказывает требуемое утверждение. Заметим, что в последнем случае множество γ_σ^* не единственное.

Определение 2. *Пусть на* μ*-измеримом множестве* $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\operatorname{mes}_\mu A = a$, *где* a *— конечное, или* $a = \infty$, *задана суммируемая функция* $f(x)$:

$$\int\limits_A |f(x)|\,d\mu < \infty$$

и $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$. *Тогда величина*

$$e_\sigma(f) = \inf_{\gamma_\sigma \in A} \left| \int\limits_A f(x)\,d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu \right|$$

называется наилучшим приближением интеграла функции f *по множеству* A *посредством интегралов ранга* σ.

Если $f(x) \geq 0$ при всех $x \in A$, то $e_\sigma(f)$ может быть представлено в виде

$$e_\sigma(f) = \int\limits_A f(x)\,d\mu - \sup_{\gamma_\sigma} \int\limits_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu,$$

и тогда на основании утверждения 1 получаем следующее утверждение.

Утверждение 2. *Пусть на измеримом множестве $A \subset R^m$, $m \geq 1$, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, где a — конечно или бесконечно, задана неотрицательная суммируемая функция $f(x)$. Тогда*

$$e_\sigma(f) = \inf_{\gamma_\sigma \in A} \left(\int\limits_A f(x)\,d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu \right) = \int\limits_\sigma^a \bar{f}(t)\,dt. \tag{48}$$

При этом нижняя грань в (48) *реализуется множеством $\gamma^*_\sigma \in A$, $\mathrm{mes}_\mu \gamma^*_\sigma = \sigma$, определенным в утверждении* 1.

Если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество функций из $L(A)$, то полагаем

$$\mathscr{E}_\sigma(\mathfrak{N}) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} e_\sigma(f) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \inf_{\gamma_\sigma \in A} \left(\int\limits_A f(x)\,d\mu - \int\limits_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu \right).$$

Величина $\mathscr{E}_\sigma(\mathfrak{N})$, таким образом, является верхней гранью наилучших приближений интегралов функций из множества $\mathfrak{N}$ посредством интегралов ранга σ.

Рассмотрим в качестве $\mathfrak{N}$ множество H_φ, состоящее из функций $f(x)$, $x \in A$, которые представляются произведениями некоторой фиксированной неотрицательной функции $\varphi(x)$ и неотрицательных функций $h(x)$, принадлежащих единичному шару U_1^+ в $L(A)$:

$$H_\varphi = \{ f(x) = \varphi(x)h(x) :\ h \in U_1^+ \}.$$

Видим, что величина $\mathscr{E}_\sigma(\varphi)$ из (43) совпадает с величиной $\mathscr{E}_\sigma(H_\varphi)$ и, следовательно, является верхней гранью наилучших приближений интегралов функций $f \in H_\varphi$ по множеству A посредством интегралов ранга σ.

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Теорему достаточно доказать только в случае ограниченных множеств A. Действительно, предположим, что она доказана для любого ограниченного измеримого множества A из R^m, и покажем ее справедливость и в общем случае.

Зафиксировав произвольно малое число $\varepsilon > 0$, выберем такое число N_ε, чтобы при всех $N \geq N_\varepsilon$ и $h \in U_1^+$ выполнялось соотношение

$$\int\limits_A f(x)\,d\mu = \int\limits_{A_N} f(x)\,d\mu + \rho, \quad f(x) = \varphi(x)h(x), \quad A_N = A \cap K_N, \tag{49}$$

$$K_N = \{ x :\ x \in R^m,\ |x| \leq N \}, \quad \rho \leq \varepsilon.$$

Заметим, что вследствие того, что $h \in U_1^+$, в качестве N_ε можно взять число, для которого при $|x| > N_\varepsilon$ выполняется соотношение $\varphi(x) < \varepsilon$ (см. условие (42)).

Одновременно для любых $\gamma_\sigma \in A$ и $h \in U_1^+$ будем иметь

$$\int\limits_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu = \int\limits_{\gamma_\sigma \cap A_N} f(x)\,d\mu + \rho', \quad \rho' \leq \varepsilon,$$

и, значит,

$$\sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu = \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma \cap A_N} f(x)\,d\mu + \rho'', \qquad \rho'' \le \varepsilon. \tag{50}$$

Пусть δ_σ — любое измеримое подмножество из A_N, $\mathrm{mes}_\mu \delta_\sigma = \sigma$. Тогда

$$\sup_{\delta_\sigma \in A_N} \int_{\delta_\sigma} f(x)\,d\mu \le \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu \tag{51}$$

и

$$\sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma \cap A_N} f(x)\,d\mu \le \sup_{\delta_\sigma \in A_N} \int_{\delta_\sigma} f(x)\,d\mu. \tag{52}$$

Объединяя соотношения (49) – (52), имеем

$$\sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma} f(x)\,d\mu = \sup_{\delta_\sigma \in A_N} \int_{\delta_\sigma} f(x)\,d\mu + \rho^{(3)}, \qquad \rho^{(3)} \le \varepsilon,$$

и с учетом (43) и (49) получаем

$$\mathscr{E}_\sigma(H_\varphi) = \sup_{h \in U_1^+} \left(\int_A \varphi(x)h(x)\,d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int_{\gamma_\sigma} \varphi(x)h(x)\,d\mu \right) =$$

$$= \sup_{h \in U_1^+} \left(\int_{A_N} \varphi(x)h(x)\,d\mu - \sup_{\delta_\sigma \in A_N} \int_{\delta_\sigma} \varphi(x)h(x)\,d\mu \right) + \rho^{(4)} =$$

$$= \sup_{h \in \overline{H}} \left(\int_{A_N} \varphi(x)h(x)\,d\mu - \sup_{\delta_\sigma \in A_N} \int_{\delta_\sigma} \varphi(x)h(x)\,d\mu \right) + \rho^{(5)} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \mathscr{E}_\sigma(\overline{H}_\varphi) + \rho^{(5)}, \tag{53}$$

где $\rho^{(4)}$ и $\rho^{(5)}$ — величины, удовлетворяющие неравенствам

$$|\rho^{(4)}| \le \varepsilon, \qquad \rho^{(5)} \le \varepsilon,$$

$\overline{H}_\varphi = \{ f(x) = \varphi(x)h(x) : \ h \in \overline{H} \}$, а $\overline{H}$ — подмножество функций из U_1^+, для которых

$$\int_{A_N} h(x)\,d\mu \le 1.$$

При любом N множества A_N ограничены и их меры конечны (пусть они равны a_N). Поэтому согласно предположению и равенству (43) имеем

$$\mathscr{E}_\sigma(\overline{H}_\varphi) = \sup_{\sigma < q < a_N} \frac{q - \sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}_N(t)}}, \tag{54}$$

где $\overline{\varphi}_N(t)$ — перестановка в убывающем порядке сужения функции $\varphi(x)$ на множестве A_N,

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \in A_N; \\ 0, & x \overline{\in} A_N. \end{cases} \tag{55}$$

Объединяя соотношения (53) и (54), находим

$$\mathscr{E}_\sigma(H_\varphi) = \sup_{\sigma<q<a_N} \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}_N(t)}} + \rho^{(5)}. \tag{56}$$

Покажем теперь, что

$$\lim_{N\to\infty} \mathscr{E}_\sigma(\overline{H}_\varphi) = \sup_{\sigma<q<a} \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}. \tag{57}$$

С этой целью сначала заметим, что если $a=\infty$, то при любом фиксированном значении σ функция

$$f_\sigma(q) = \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}} \tag{58}$$

стремится к нулю, когда $q\to\infty$. Поэтому существует точка q^*, для которой выполняется равенство

$$\sup_{\sigma<q<a} f_\sigma(q) = f_\sigma(q^*). \tag{59}$$

Ясно, что такая точка q^* найдется и при $a<\infty$.

Докажем теперь следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пусть $\varphi_N(x)$ определяется соотношением* (55). *Тогда на некотором промежутке $[0, b_N]$ выполняется равенство*

$$\overline{\varphi}_N(t) = \overline{\varphi}(t), \qquad t\in[0, b_N], \tag{60}$$

причем

$$\lim_{N\to\infty} b_N = a. \tag{61}$$

Доказательство. Пусть для данного натурального N_0

$$y_0 = y_{N_0} = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A\setminus A_{N_0}} \varphi(x), \tag{62}$$

$$E_{y_0} = \{x:\ x\in A,\ \varphi(x)\ge y_0\}. \tag{63}$$

Если $y_0=0$, то существует такое N_1, что при всех $N>N_1$ почти всюду $\varphi(x)=0$, если $x \,\overline{\in}\, A_N$. Следовательно, при всех $N>N_1$ $\varphi_N(x)\equiv\varphi(x)$, $x\in A_N$, и тогда $\overline{\varphi}_N(t) = \overline{\varphi}(t)$ для всех $t \,\overline{\in}\, [0, a_N]$. Поэтому достаточно считать, что $y_0>0$. В силу условия (42), если $y_0>0$, то множество E_{y_0} ограниченное. Поэтому найдется число N_{y_0} такое, что $E_{y_0}\subset A_N$ $\forall N>N_{y_0}$. Следовательно, при $N>N_{y_0}$ будет $\varphi(x)<y_0$, $x \,\overline{\in}\, A_N$. Поэтому для функций распределения $m_\varphi(y)$ и $m_{\varphi_N}(y)$ будем иметь $m_\varphi(y)=m_{\varphi_N}(y)$, $y\in[y_0, \mathscr{M}_\varphi = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A}\varphi(x)]$. Следовательно, на промежутке $[0, m_\varphi(y_0)]$ функции $\overline{\varphi}(t)$ и $\overline{\varphi}_N(t)$ совпадают: $\overline{\varphi}_N(t) = \overline{\varphi}(t)$, $t\in[0, m_\varphi(y_0)]$. Согласно (42) и (62) $\lim_{N_0\to\infty} y_{N_0}=0$. Поэтому, полагая $b_{N_0}=m_\varphi(y_{N_0})$, приходим к соотношениям (60) и (61).

Возвращаясь к доказательству равенства (57), видим, что если число N_{q^*} таково, что при $N>N_{q^*}$ будет $b_N\ge q^*$, то

$$\sup_{\sigma<q<a_N} \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\overline{\varphi}}_N(t)}} = \frac{q^*-\sigma}{\int_0^{q^*} \frac{dt}{\overline{\overline{\varphi}}(t)}},$$

что и доказывает равенство (57).

Объединяя равенства (56) и (57) и учитывая произвольность задания числа ε, приходим к необходимому утверждению. Итак, теорему остается доказать только в случае ограниченных множеств A.

Предположим теперь, что теорема доказана для всех ограниченных множеств A в случае, когда функция $\varphi(x)$ принимает только любое конечное число значений. Т. е. предположим, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 4. *Пусть A — любое ограниченное измеримое множество из R^m, $\operatorname{mes} A = a$ и $\varphi(x)$ — неотрицательная функция, принимающая на A конечное число значений. Тогда при любом $\sigma < a$ выполняется равенство* (43).

Докажем следующее утверждение.

Утверждение 5. *Пусть A — любое ограниченное измеримое множество из R^m, $\operatorname{mes} A = a$ и $\varphi(x)$ — любая неотрицательная ограниченная измеримая функция. Тогда при любом $\sigma < a$ справедливо равенство* (43).

Доказательство. Пусть

$$c = \operatorname*{ess\,sup}_{x\in A} \varphi(x)$$

и n — некоторое натуральное число. Промежуток $[0, c]$ разобьем на n равных частей ρ_k, $k = 1, \ldots, n$, точками $y_i^{(n)}$:

$$c = y_1^{(n)} > y_2^{(n)} > \ldots > y_n^{(n)} > y_{n+1}^{(n)} = 0.$$

Если E — любое измеримое подмножество из A, то полагаем

$$e_k = \{x \in E:\ y_k^{(n)} < \varphi(x) \le y_{k+1}^{(n)}\}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда для любой функции $h \in U_1^+$ будем иметь

$$\sum\nolimits_n^{(1)} (\varphi, h) \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=1}^{n} y_{k+1}^{(n)} \int_{e_k} h(x)\,d\mu \le \int_E \varphi(x) h(x)\,d\mu \le$$

$$\le \sum_{k=1}^{n} y_k^{(n)} \int_{e_k} h(x)\,d\mu \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum\nolimits_n^{(2)} (\varphi, h).$$

При этом

$$\sum\nolimits_n^{(2)} (\varphi, h) - \sum\nolimits_n^{(1)} (\varphi, h) = \frac{c}{n} \int_E h(x)\,d\mu \le \frac{c}{n}.$$

Отсюда заключаем, что

$$\int_E \varphi(x) h(x)\,d\mu = \sum\nolimits_n^{(1)} (\varphi, h) + \varepsilon_n^{(1)} = \sum\nolimits_n^{(2)} (\varphi, h) - \varepsilon_n^{(2)},$$

причем

$$0 \le \varepsilon_n^{(1)} \le \frac{c}{n} \quad \text{и} \quad 0 \le \varepsilon_n^{(2)} \le \frac{c}{n}.$$

Поэтому для любого $h \in U_1^+$ и $n \in N$ справедливо равенство

$$\int\limits_A \varphi(x)h(x)\,d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int\limits_{\gamma_\sigma} \varphi(x)h(x)\,d\mu =$$

$$= \int\limits_A \varphi_n(x)h(x)\,d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int\limits_{\gamma_\sigma} \varphi_n(x)h(x)\,d\mu + \varepsilon_n^{(3)}, \qquad (64)$$

в котором

$$\varphi_n(x) = y_k^{(n)}, \qquad x \in \{\, y_k^{(n)} < \varphi(x) \le y_{k+1}^{(n)} \}$$

и

$$\left|\varepsilon_n^{(3)}\right| \le \frac{2c}{n}.$$

Рассматривая верхние грани обеих частей равенства (64) по множеству U_1^+ и учитывая равномерную ограниченность величин $\varepsilon_n^{(3)}$ числами $2c/n$, получаем

$$\mathscr{E}_\sigma(H_\varphi) = \sup_{h \in U_1^+} \left(\int\limits_A \varphi_n(x)h(x)\,d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \in A} \int\limits_{\gamma_\sigma} \varphi_n(x)h(x)\,d\mu \right) + \varepsilon_n^{(4)},$$

где

$$\left|\varepsilon_n^{(4)}\right| \le \frac{2c}{n}.$$

Функция $\varphi_n(x)$ принимает только n значений, поэтому согласно утверждению 4 имеем

$$\mathscr{E}_\sigma(H_\varphi) = \sup_{\sigma < q \le a} \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}_n(t)}} + \varepsilon_n^{(4)},$$

где $\overline{\varphi}_n(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi_n(x)$, и для доказательства утверждения 5 остается заметить, что при любом $q < a$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}_n(t)} = \int\limits_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}.$$

Итак, для завершения доказательства теоремы остается доказать утверждение 4, т. е. фактически доказать теорему 3 в случае ограниченных множеств A для функций $\varphi(x)$, принимающих на A только конечное число значений φ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, $n \in N$.

Пусть $\varphi(x)$ принимает n различных значений φ_k, которые перенумеруем в убывающем порядке:

$$\varphi_1 > \varphi_2 > \ldots > \varphi_n. \qquad (65)$$

Положим

$$e_k = \{x \in A : \varphi(x) = \varphi_k\}, \qquad k = 1, \ldots, n, \qquad \operatorname{mes}_\mu e_k = |e_k|.$$

Ясно, что множества e_k и e_j при $k \ne j$ не пересекаются и

$$\bigcup_k e_k = A. \qquad (66)$$

Пусть $h(x)$ — неотрицательная на A функция,

$$h_k(x) = \begin{cases} h(x), & x \in e_k; \\ 0, & x \overline{\in} e_k, \end{cases} \tag{67}$$

и $\overline{h}_k(x)$ — убывающая перестановка функции $h_k(x)$ (определенная на $[0, |e_k|]$). Пусть еще

$$t_i = \sum_{k=1}^{i} |e_k|, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad t_0 \overset{\mathrm{df}}{=} 0. \tag{68}$$

Определим функцию $h^*(t)$, положив

$$h^*(t) = \overline{h}(t - t_{k-1}), \quad t \in [t_{k-1}, t_k) \overset{\mathrm{df}}{=} \Delta_k, \quad k = 1, \dots, n, \tag{69}$$

и докажем следующее утверждение.

Утверждение 6. *Пусть A — любое ограниченное измеримое множество из R^m, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, $\varphi(x)$ — неотрицательная функция, принимающая на A конечное число значений, и $h(x)$ — неотрицательная функция, для которой*

$$\int_A h(x)\,d\mu = b < \infty.$$

Пусть, далее, γ_σ — любое подмножество из A, $\mathrm{mes}_\mu \gamma_\sigma = \sigma \le a$. Тогда для функции $h^*(t)$, определенной соотношением (69), справедливы равенства

$$\int_0^a h^*(t)\,dt = b$$

и

$$\mathcal{E}_\sigma(\varphi; h) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_A \varphi(x)h(x)\,d\mu - \sup_{\gamma_\sigma \subset A} \int_{\gamma_\sigma} \varphi(x)h(x)\,d\mu =$$

$$= \int_0^a \overline{\varphi}(t)h^*(t)\,dt - \sup_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \int_{\delta_\sigma} \overline{\varphi}(t)h^*(t)\,dt, \tag{70}$$

где $\overline{\varphi}(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(x)$, а δ_σ — подмножества из $(0, a)$, для которых $\mathrm{mes}_\mu \delta_\sigma = \sigma$.

Доказательство. Принимая во внимание (23), имеем

$$b = \int_A h(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} h(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \int_{e_k} h_k(x)\,d\mu =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \int_0^{|e_k|} \overline{h}_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \int_{\Delta_k} \overline{h}_k(t - t_{k-1})\,dt = \int_0^a h^*(t)\,dt.$$

Покажем, что для функции $h^*(t)$ выполняется и равенство (70). Сначала заметим, что в силу (23) в принятых обозначениях справедливы равенства

$$\int_A \varphi(x)h(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_{e_k} h_k(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_0^{|e_k|} \overline{h}_k(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\Delta_k} \overline{h}_k(t-t_{k-1})\,dt = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\Delta_k} h^*(t)\,dt = \int\limits_0^a \overline{\varphi}(t) h^*(t)\,dt.$$

Поэтому остается проверить соотношение

$$\mathcal{J}(\varphi h) \overset{\text{df}}{=} \sup_{\gamma_\sigma \subset A} \int\limits_{\gamma_\sigma} \varphi(x) h(x)\,d\mu = \sup_{\delta_\sigma \subset (0,a)} \int\limits_{\delta_\sigma} \overline{\varphi}(t) h^*(t)\,dt = \mathcal{J}_\sigma(\overline{\varphi} h^*). \qquad (71)$$

Пусть γ_σ — любое множество из A, $\operatorname{mes}_\mu \gamma_\sigma = |\gamma_\sigma| = \sigma$ и

$$\eta_k = \gamma_\sigma \cap e_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \quad \operatorname{mes}_\mu \eta_k = |\eta_k|. \qquad (72)$$

Тогда

$$\int\limits_{\gamma_\sigma} \varphi(x) h(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\eta_k} h(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_0^{|\eta_k|} \overline{h}_k(t)\,dt =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\beta_k} \overline{h}_k(t-t_{k-1})\,dt = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\beta_k} h^*(t)\,dt = \int\limits_{\bigcup_{k=1}^n \beta_k} \overline{\varphi}(t) h^*(t)\,dt, \qquad (73)$$

где $\beta_k = \{ t\colon\ t \in \Delta_k,\ t - t_{k-1} \in (0, |\eta_k|) \}$. Поскольку

$$\operatorname{mes}_\mu \bigcup_{k=1}^{n} \beta_k = \sum_{k=1}^{n} |\eta_k| = \sigma,$$

то вследствие (73) заключаем, что

$$\mathcal{J}(\varphi h) = \sup_{\gamma_\sigma \subset A} \int\limits_{\gamma_\sigma} \varphi(x) h(x)\,d\mu \le \sup_{\delta_\sigma \in (0,a)} \int\limits_{\delta_\sigma} \overline{\varphi}(t) h^*(t)\,dt = \mathcal{J}_\sigma(\overline{\varphi} h^*), \qquad (74)$$

и для доказательства (70) остается показать, что в последнем соотношении строгого равенства быть не может. С этой целью, учитывая утверждение 1, рассмотрим множество δ_σ^* меры σ на $[0, a)$, для которого выполняется равенство

$$\mathcal{J}_\sigma(\overline{\varphi} h^*) = \int\limits_{\delta_\sigma^*} \overline{\varphi}(t) h^*(t)\,dt, \qquad (75)$$

и положим

$$\nu_k = \delta_\sigma^* \cap \Delta_k, \quad \operatorname{mes}_\mu \nu_k = |\nu_k|, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Согласно (69) и (75) находим

$$\mathcal{J}_\sigma(\overline{\varphi} h^*) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\nu_k} h^*(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\nu_k} \overline{h}_k(t-t_{k-1})\,dt = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int\limits_{\alpha_k} \overline{h}_k(t)\,dt, \qquad (76)$$

где $\alpha_k = \{ t\colon\ t \in [0, |\nu_k|),\ t + t_{k-1} \in \nu_k \}$, $k = 1, 2, \ldots, n$. На промежутках $[0, |\nu_k|)$ функции $\overline{h}_k(t)$ не убывают. Следовательно, функции $\overline{h}_k(t-t_{k-1})$ не убывают и при $t \in \Delta_k$. Поэтому из (75) и (76) заключаем, что

$$\nu_k = [t_{k-1}, t_{k-1} + |\nu_k|], \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

или же

$$\nu_k = \{t:\ t \in \Delta_k,\ \overline{h}_k(t - t_{k-1}) \ge \overline{h}_k(|\nu_k|)\}. \tag{77}$$

Следовательно, согласно (76)

$$\mathcal{J}_\sigma(\overline{\varphi}, h^*) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_0^{|\nu_k|} \overline{h}_k(t)\,dt. \tag{78}$$

Построим теперь множество $\gamma_\sigma^* \subset A$, соответствующее множеству $\delta_\sigma^* \subset [0, a)$. С этой целью положим

$$\eta_k^* = \{x:\ x \in e_k,\ h(x) \ge \overline{h}_k(|\nu_k|)\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{79}$$

и

$$\gamma_\sigma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \eta_k^*. \tag{80}$$

Поскольку при $x \in e_k$ выполняется равенство $h(x) = h_k(x)$, то в силу (22), (77) и (79) имеем $\mathrm{mes}_\mu\, \eta_k^* = \mathrm{mes}_\mu\, \nu_k = |\nu_k|$ и, следовательно, согласно (80) $\mathrm{mes}_\mu\, \gamma_\sigma^* = \sigma$. Для такого γ_σ^* будем иметь (см. соотношения (72), (73) и (78))

$$\int_{\gamma_\sigma^*} \varphi(x) h(x)\,d\mu = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_0^{|\eta_k^*|} h_k(t)\,dt = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k \int_0^{|\nu_k|} h_k(t)\,dt = \mathcal{J}_\sigma(\overline{\varphi}, h).$$

Таким образом, соотношение (74) на самом деле является равенством, т. е. справедливость соотношения (71), а следовательно, и утверждения 6 установлена.

Пусть, как и ранее,

$$U_1^+ = \left\{ h(x) \colon h(x) \ge 0,\ \int_A h(x)\,d\mu \le 1 \right\},$$

функция $\varphi(x)$ принимает на A только конечное число значений φ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, и $H^*(\varphi)$ — множество функций, заданных на $[0, a)$, построенных для каждой $h \in U_1^+$ по формуле (69). Тогда из утверждения 6 получаем следующее утверждение.

Утверждение 7. *Пусть A — любое ограниченное измеримое множество из R^m, $\mathrm{mes}_\mu A = a$, $\varphi(x)$ — неотрицательная функция, принимающая на A конечное число n значений φ_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда для любого $\sigma \le a$ выполняется равенство*

$$\mathcal{E}_\sigma(H_\varphi) = \sup_{h \in U_1^+} \mathcal{E}_\sigma(\varphi; h) = \sup_{h^* \in H^*(\varphi)} \left(\int_0^a \overline{\varphi}(t) h^*(t)\,dt - \sup_{\delta_\sigma \in (0, a)} \int_{\delta_\sigma} \overline{\varphi}(t) h^*(t)\,dt \right), \tag{81}$$

где $\overline{\varphi}(t)$ — убывающая перестановка функции $\varphi(x)$, а δ_σ — подмножества из $(0, a)$, для которых $\mathrm{mes}_\mu\, \delta_\sigma = \sigma$.

Наконец, установим еще одно вспомогательное утверждение.

Лемма 1. *Пусть на промежутке $(0, a)$ действительной оси R^1, где a — конечное или же $a = \infty$, заданы ограниченная невозрастающая функция $\alpha(t)$, для которой в случае $a = \infty$ предполагается, что*

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = 0$$

(в таком случае будем записывать $\alpha \in \mathcal{A}$), и множество $\mathcal{M}$ неотрицательных функций $m(t)$, для которых

$$\int_0^a m(t)\,dt \le 1.$$

Тогда

$$\mathcal{E}_\sigma(\alpha, \mathcal{M}) = \sup_{m\in\mathcal{M}} \left(\int_0^a \alpha(t)m(t)\,dt - \sup_{\delta_\sigma \in (0,a)} \int_{\delta_\sigma} \alpha(t)m(t)\,dt \right) =$$

$$= \sup_{q\in(\sigma,a)} \frac{q-\sigma}{\int_0^a \frac{dt}{\alpha(t)}}, \tag{82}$$

где δ_σ — любое измеримое множество из $(0, a)$, $\operatorname{mes} \delta_\sigma = |\mu| = \sigma$. Верхняя грань в правой части (82) *всегда достигается в некоторой точке $q^* \in (\sigma, a)$. Верхняя грань в левой части реализуется функцией $m^* \in \mathcal{M}$,*

$$m^*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha(t)} \displaystyle\int_0^{q^*} \dfrac{dx}{\alpha(x)}, & t \in [0, q^*]; \\ 0, & t \in (q^*, a). \end{cases}$$

Доказательство. Пусть для данных $\alpha \in \mathcal{A}$ и $m \in \mathcal{M}$

$$F_\sigma(\alpha, m) = \int_0^a \alpha(t)m(t)\,dt - \sup_{\delta_\sigma} \int_{\delta_\sigma} \alpha(t)m(t)\,dt \tag{83}$$

и $\delta_\sigma^* = \delta_\sigma^*(m)$ — множество из $(0, a)$, для которого

$$F_\sigma(\alpha, m) = \int_0^a \alpha(t)m(t)\,dt - \int_{\delta_\sigma^*} \alpha(t)m(t)\,dt.$$

Заметим, что существование такого множества δ_σ^* обеспечивается утверждением 1 и суммируемостью произведения $\alpha(t)m(t)$. Пусть, кроме того,

$$y_\sigma = y_\sigma(m) = \inf_{t\in\delta_\sigma^*} \alpha(t)m(t).$$

Ясно, что в таком случае

$$\delta_\sigma^* = \{t:\ \alpha(t)m(t) \ge y_\sigma\} \tag{84}$$

и при $t \in e_\sigma = (0, a) \setminus \delta_\sigma^*$ выполняется неравенство $\alpha(t)m(t) \le y_\sigma$. Поэтому для функции $\overline{m}(t)$,

$$\overline{m}(t) = \begin{cases} m(t), & t \in e_\sigma; \\ \dfrac{y_\sigma}{\alpha(t)}, & t \in \delta_\sigma^*, \end{cases} \tag{85}$$

будут выполняться равенства

$$\int_{\delta_\sigma^*} \alpha(t)\overline{m}(t)\,dt = \sigma y_\sigma$$

и

$$F_\sigma(\alpha, \overline{m}) = F_\sigma(\alpha, m). \tag{86}$$

Выберем точку $c > \sigma$ из условия

$$\int_0^c \left(\frac{y_\sigma}{\alpha(t)} - \overline{m}(t) \right) dt = \int_c^a \overline{m}(t)\, dt. \tag{87}$$

В силу монотонного невозрастания функции $\alpha(t)$ такая точка всегда существует и единственна. Положим

$$m'(t) = \begin{cases} \dfrac{y_\sigma}{\alpha(t)}, & t \in (0, c); \\ 0, & t \in [c, a). \end{cases} \tag{88}$$

Тогда с учетом (87) будем иметь

$$\int_0^a \alpha(t) m'(t)\, dt - \int_0^a \alpha(t)\overline{m}(t)\, dt = \int_0^c \alpha(t) \left(\frac{y_\sigma}{\alpha(t)} - \overline{m}(t) \right) dt - \int_c^a \alpha(t)\overline{m}(t)\, dt \ge$$

$$\ge \alpha(c+0) \left(\int_0^c \left(\frac{y_\sigma}{\alpha(t)} - \overline{m}(t) \right) dt - \int_c^a \overline{m}(t)\, dt \right) = 0.$$

Отсюда в силу (86) заключаем, что

$$F_\sigma(\alpha, m') \ge F_\sigma(\alpha, m). \tag{89}$$

Из соотношений (85) и (84) следует, что

$$\int_0^a \overline{m}(t)\, dt \le \int_0^a m(t)\, dt,$$

а из (88) и (87) —

$$\int_0^a m'(t)\, dt = \int_0^c \frac{y_\sigma}{\alpha(t)}\, dt = \int_0^a \overline{m}(t)\, dt.$$

Следовательно, $m' \in \mathcal{M}$.

Обозначим через $\mathcal{M}'$ подмножество функций m из $\mathcal{M}$, для которых существует некоторое число $q = q(m)$, $\sigma < q \le a$, такое, что для всех $t \in (q, a)$ $m(t) = 0$, а на промежутке $[0, q)$ произведение $\alpha(t)m(t)$ — постоянно:

$$m(t) = \begin{cases} \lambda, & t \in [0, q]; \\ 0, & t \in (q, a), \end{cases} \tag{90}$$

где λ — некоторое положительное число. Функция m из (88) принадлежит $\mathcal{M}'$ и для нее выполняется соотношение (89). Поэтому справедливо равенство

$$\mathcal{E}_\sigma(\alpha, \mathcal{M}) = \sup_{m \in \mathcal{M}} F_\sigma(\alpha, m) = \sup_{m \in \mathcal{M}'} F_\sigma(\alpha, m) = \mathcal{E}_\sigma(\alpha, \mathcal{M}').$$

Таким образом, задача о нахождении величины $\mathcal{E}_\sigma(\alpha, \mathcal{M})$ сводится к нахождению значения $\mathcal{E}_\sigma(\alpha, \mathcal{M}')$.

Если $m \in \mathcal{M}'$, то согласно (90)

$$F_\sigma(\alpha, m) = \lambda(q - \sigma)$$

и

$$\| m \|_1 \overset{\text{df}}{=} \int\limits_0^q m(t)\,dt = \lambda \int\limits_0^q \frac{dt}{\alpha(t)}.$$

Следовательно, поскольку $\| m \|_1 \le 1$, то

$$F_\sigma(\alpha, m) = \frac{(q-\sigma)\| m \|_1}{\int_0^q \frac{dt}{\alpha(t)}} \le \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\alpha(t)}}.$$

Поэтому и

$$\sup_{m \in \mathcal{M}'} F_\sigma(\alpha, m) \le \sup_{\sigma < q \le a} \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\alpha(t)}}. \tag{91}$$

Существование числа q^*, указанного в лемме, было фактически установлено (см. соотношения (58) и (59)). Следовательно, согласно (91)

$$\sup_{m \in \mathcal{M}'} F_\sigma(\alpha, m) \le \frac{q^*-\sigma}{\int_0^{q^*} \frac{dt}{\alpha(t)}}. \tag{92}$$

Функция

$$m^*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha(t)} \displaystyle\int\limits_0^{q^*} \frac{dx}{\alpha(x)}, & t \in [0, q^*]; \\ 0, & t \in (q^*, a), \end{cases}$$

принадлежит $\mathcal{M}'$, поэтому соотношение (92) на самом деле является равенством, что и завершает доказательство леммы.

Продолжим доказательство утверждения 4. Множество $H^*(\varphi)$, фигурирующее в равенстве (81), содержится в $\mathcal{M}$. Поэтому, обозначая через $\mathcal{E}_\sigma(\overline{\varphi}; H^*)$ правую часть этого равенства, с учетом (83) будем иметь

$$\mathcal{E}_\sigma(\overline{\varphi}; H^*) = \sup_{h \in H^*(\varphi)} F_\sigma(\overline{\varphi}; h^*) \le \sup_{m \in \mathcal{M}} F_\sigma(\overline{\varphi}; m). \tag{93}$$

Функция $\overline{\varphi}(t)$ на промежутке $(0, a)$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к функции $\alpha(t)$ в лемме 1 (при конечных значениях a). Поэтому согласно лемме 1

$$\sup_{m \in \mathcal{M}} F_\sigma(\overline{\varphi}; m) = \sup_{q \in (\sigma, a)} \frac{q-\sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}} = \frac{q^*-\sigma}{\int_0^{q^*} \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}, \tag{94}$$

где q^* — некоторая точка из (σ, a) и верхняя грань в левой части реализуется функцией

$$m^*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\overline{\varphi}(t)} \displaystyle\int\limits_0^{q^*} \frac{dx}{\overline{\varphi}(x)}, & t \in [0, q^*]; \\ 0, & t \in (q^*, a), \end{cases} \tag{95}$$

т. е.

$$F_\sigma(\overline{\varphi}; m^*) = \frac{q^* - \sigma}{\int_0^{q^*} \frac{dt}{\overline{\varphi}(t)}}.$$

В утверждении 4 функция $\varphi(x)$ принимает только конечное число значений φ_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Если эти значения перенумерованы в убывающем порядке, то на промежутках Δ_k (см. соотношения (65) – (69)) ее перестановка постоянна:

$$\overline{\varphi}(t) = \varphi_k, \qquad t \in \Delta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, в таком случае и функция $m^*(t)$ из (95) будет кусочно-постоянной на $[0, q^*]$:

$$m^*(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varphi_k} \displaystyle\int_0^{q^*} \frac{dx}{\overline{\varphi}(x)} \overset{\text{df}}{=} m_k, & t \in [t_{k-1}, t_k], \quad k = 1, 2, \ldots, t \leq q^*; \\ 0, & t \in (q^*, a). \end{cases}$$

Отсюда ясно, что во множестве U_1^+ существует функция h, для которой функция h^*, построенная по формуле (69), будет в точности совпадать с m^*. А это означает, что $m^* \in H^*(\varphi)$. Таким образом, соотношение (93) на самом деле есть равенство. Объединяя равенства (93) и (94), завершаем доказательство утверждения 4, а с ним и всех утверждений теоремы.

7. Примеры. Рассмотрим несколько простейших реализаций рассматриваемых построений.

1. Будем говорить, что некоторое пространство $\mathfrak{N}$ является частным случаем пространства S^p_Φ, если его можно получить путем надлежащего выбора пространства $\mathfrak{X}$, меры $d\mu$ и оператора Φ.

В этом смысле пространства S^p_φ, рассматриваемые в [1 – 5], а также пространства $S^{p,\mu}_\varphi$, введенные в [6], являются частным случаем пространства S^p_Φ. Продемонстрируем это в простом, но важном случае.

Пусть R^m — m-мерное, $m \geq 1$, евклидово пространство, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ — его элементы, Z^m — целочисленная решетка в R^m — множество всех векторов $k = (k_1, \ldots, k_m)$ с целочисленными координатами, $xy = (x_1 y_1 + \ldots + x_m y_m)$, $|x| = \sqrt{x, x}$ и, в частности, $kx = k_1 x_1 + \ldots + k_m x_m)$, $|k| = \sqrt{k_1^2 + \ldots + k_m^2}$.

Пусть, далее, $L = L(R^m, 2\pi)$ — множество всех 2π-периодических по каждой из переменных функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$, суммируемых относительно обычной меры Лебега на кубе периодов Q^m,

$$Q^m = \{x : x \in R^m, -\pi \leq x_k \leq \pi, \ k = 1, 2, \ldots, m\}.$$

В пространстве $L(R^m, 2\pi)$ определим оператор $\mathcal{F}$, положив

$$\mathcal{F}(f; k) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(x) e^{-ikx}\, dx = \hat{f}(k). \tag{96}$$

Оператор $\mathcal{F}$ отображает пространство $L(R^m, 2\pi)$ во множество Y функций $y(t)$, заданных на целочисленной решетке Z^m в R^m. Пусть теперь $d\mu$ — мера в пространстве R^m, носителем которой является множество Z^m, где она равна единице: $\mu(k) \equiv 1$, $k \in Z^m$. В этом случае функционал, определенный равенством (4), имеет вид

$$\|y\|_{L_p(R^m, d\mu)} = \left(\int_{R^m} |y(t)|^p \, d\mu\right)^{1/p} = \left(\sum_{k \in Z^m} \left|\hat{f}(k)\right|^p\right)^{1/p}, \quad p \in (0, \infty).$$

Выбирая в качестве $\mathfrak{X}$ пространство L, а в качестве Φ — оператор $\mathcal{F}$,
чаем пространство $S^p_{\mathcal{F}}(L; Y)$,

$$S^p_{\mathcal{F}}(L; Y) = \left\{ f \in L: \sum_{k \in Z^m} \left|\hat{f}(x)\right|^p < \infty \right\}.$$

Заметим, что эти пространства совпадают с рассматриваемыми пространс
S^p_φ, порождаемыми пространством L, системой $\varphi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$, где

$$\varphi_k = (2\pi)^{-m/2} e^{ikx}, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

и скалярным произведением $(f, \varphi_k) = \hat{f}(k)$, определяемым формулой (96).

Если $f = f(x)$ и $g = g(x)$ — любые функции из $L(R^m, 2\pi)$, то их свертк

$$h(x) = (f * g)(x) = (2\pi)^{-m/2} \int_{Q^m} f(t) g(x - t) \, dt$$

также принадлежит $L(R^m, 2\pi)$ и

$$\mathcal{F}(h; x) = \hat{h}(k) = (2\pi)^{m/2} \int_{Q^m} h(x) e^{-ikx} \, dx = \hat{f}(k) \hat{g}(k).$$

Поэтому в качестве мультипликатора M^ω_Φ здесь выступает оператор св
(97) и множеству Ω^p_Φ принадлежат все функции $\omega(t)$, удовлетворяющ
венству

$$\omega(k) = \hat{g}(k), \quad g \in L,$$

для которых при всех $f \in S^p_\Phi$

$$\sum \left|\hat{f}(k)\right|^p |\omega(k)|^p < \infty.$$

В рассматриваемом случае мера любого ограниченного множества γ_σ ес
туральное число, либо нуль. Поэтому, какова бы ни была функция $\lambda(t)$ н
функция

$$g_{\gamma_\sigma}(x) = \sum_{k \in \gamma_\sigma} \lambda(k) e^{ikx}$$

является полиномом порядка $\leq \sigma$ и, следовательно, принадлежит S^p_Φ пр
бом $p \in (0, \infty)$. Полагая

$$U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)(x) = (f * g_{\gamma_\sigma})(x),$$

в силу (98) имеем

$$\mathcal{F}(U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)) = \begin{cases} \lambda(k) \hat{f}(k), & k \in \gamma_\sigma; \\ 0, & k \,\overline{\in}\, \gamma_\sigma, \end{cases}$$

т. е функция $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda)$, которая также является полиномом порядка σ,
летворяет условию (9). В частности, если $\lambda_k = 1$ при $k \in \gamma_\sigma$, то $U_{\gamma_\sigma}(f)$ -

лином, номера гармоник которого находятся в γ_σ, а его коэффициенты — соответствующие коэффициенты Фурье функции f. Такие полиномы принято называть суммами Фурье функции f, построенными по множествам γ_σ.

ψ-Интегралы в этом случае определяются следующим образом. Пусть $\psi = \{\psi(k)\}_{k\in Z^m}$ — произвольная система комплексных чисел и $f \in L$. Тогда ψ-интегралом функции f называется любая функция $u = \mathcal{J}^\psi f$ из L, для которой выполняется равенство

$$\mathcal{F}(u;k) = \psi(k)\hat{f}(k).$$

В частности, если $\psi \in \Omega^p_\Phi$, то $\mathcal{J}^\psi f$ задается формулой

$$\mathcal{J}^\psi f = f * \Psi,$$

в которой $\psi = \psi(x)$ — суммируема на R^m функция, ряд Фурье которой имеет вид

$$S[\psi] = \sum_{k\in Z^m} \psi(k) e^{ikx},$$

при этом будет выполняться включение

$$\psi S^p_{\mathcal{F}} \subset S^p_{\mathcal{F}}, \quad p \in (0,\infty).$$

Результаты, соответствующие полученным в теоремах 1 и 2, для данного случая изложены в [1 – 5].

Приведем примеры пространств S^p_Φ, которые не вкладываются в схему построения пространств S^p_φ из п. 1.

2. Рассмотрим пример, в котором пространства S^p_Φ заведомо являются не сепарабельными. Пусть $L_2(R^m)$ — пространство всех измеримых на R^m, $m \geq 1$, по Лебегу функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_m)$ таких, что

$$\|f\|_{L_2(R^m)} = \left(\int_{R^m} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2} < \infty.$$

Выберем в качестве $\mathfrak{X}$ и Y пространства $L_2(R^m)$ и зададим оператор Φ преобразованием Фурье:

$$\Phi(f) = \hat{f}(t) = \mathcal{F}(f;t) = (2\pi)^{-m/2} \int_{R^m} f(x) e^{-itx}\, dx.$$

Известно (см., например, [11], гл. I), что оператор $\mathcal{F}$ является унитарным на $L_2(R^m)$. Следовательно, Φ-норма $\|f\|_{2,\Phi}$ элемента f совпадает с его нормой в пространстве $L_2(R^m)$:

$$\|f\|_{2,\mathcal{F}} = \|f\|_{L_2(R^m)}, \tag{99}$$

и в этом случае пространство $S^2_\Phi = S^2_\Phi(L_2(R^m), L_2(R^m), dx)$ в силу формулы (5) имеет вид $S^2_\Phi = \{f : f \in L_2(R^m)\}$, т. е. $S^2_\Phi = \mathfrak{X} = L_2(R^m) = Y$.

Множество $\Omega^2_\Phi = \Omega^2_\Phi(L_2(R^m))$ совпадает с множеством всех функций ω, для которых произведение $\omega(t)\hat{f}(t)$ находится в $L_2(R^m)$ для любой $f \in L_2(R^m)$ и функция $f_\omega(t) = M^\omega_\Phi f(t)$, удовлетворяющая равенству (7), задается формулой

$$f_\omega(t) = \mathscr{F}^{-1}(\omega \hat{f}; t) = (2\pi)^{m/2} \int\limits_{R^m} \omega(x)\hat{f}(x)e^{itx}\,dx. \tag{100}$$

Ясно, что множеству $\Omega_\Phi^2(L_2(R^m))$ принадлежат все функции, существенно ограниченные на R^m. В частности, $\Omega_\Phi^2(R^m)$ принадлежат существенно ограниченные функции $\lambda_\sigma = \lambda_\sigma(t)$, носителями которых являются ограниченные множества γ_σ, для которых выполняется условие (8) и, следовательно, оператор $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию (A_2). В этом случае согласно (100) функции $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; x)$ имеют вид

$$U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} \lambda_\sigma(t)\hat{f}(t)e^{ixt}\,dt = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} f(z)\check{\lambda}_\sigma(x-z)\,dz, \tag{101}$$

где

$$\check{\lambda}_\sigma(v) = \mathscr{F}^{-1}(\lambda_\sigma; v) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} \lambda_\sigma(t)e^{ivt}\,dt.$$

Обоснование равенства (101) следует из известной теории Планшереля. Также известно, что в этом случае функции $U_{\gamma_\sigma}(f; \lambda; x)$ являются целыми функциями экспоненциального типа (см., например, [10], гл. V).

В рассматриваемом случае ψ-интегралы функций $f \in L_2(R^m)$ определяются следующим образом. Пусть $\psi = \psi(t)$ — некоторая функция из $\Omega_{\mathscr{F}}^2$ и $f \in L_2(R^m)$. Тогда ψ-интегралом f является функция $f_\psi = \mathscr{J}^\psi f$ из $L_2(R^m)$, для которой

$$\mathscr{J}(f_\psi; t) = \psi(t)\hat{f}(t).$$

Заметим, что если $\psi \in L_2(R^m)$, то функция f_ψ представима в виде

$$f_\psi(x) = \mathscr{J}^\psi f(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} f(z)\check{\psi}(x-z)\,dz, \qquad \check{\psi}(v) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{R^m} \psi(t)e^{ivt}\,dt.$$

В этом случае из теоремы 1 следует такое утверждение.

Теорема 1′. *Пусть* $\psi = \psi(t) = \psi(t_1; \ldots, t_m)$ — *произвольная функция, существенно ограниченная на* R^m, $m \geq 1$:

$$\operatorname*{ess\,sup}_{t \in R^m} |\psi(t)| < \infty$$

и такая, что

$$\lim_{|t| \to \infty} |\psi(t)| = 0;$$

ψU_2 — *множество* ψ-*интегралов всех функций из* $U_2(R^m) = \{ \varphi : \|\varphi\|_{L_2(R^m)} \leq 1 \}$. *Пусть, далее,* Γ_σ — *множество всех измеримых по Лебегу подмножеств* $\gamma_\sigma \subset R^m$, *меры которых равны* σ, $\sigma \in (0, \infty)$. *Тогда для любого* $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$ *выполняются равенства*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma}^2(\psi U_2) = \sup_{f \in \psi U_2} \left\| f(\cdot) - U_{\gamma_\sigma}(f; \cdot) \right\|_{L_2(R^m)}^2 = \overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(0+0),$$

где $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — *перестановка в убывающем порядке функции*

$$\varphi_{\gamma_\sigma}(t) = \begin{cases} |\psi(t)|^2, & t \in R^m \setminus \gamma_\sigma; \\ 0, & t \in \gamma_\sigma, \end{cases}$$

и

$$D_\sigma(\psi U_2) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \mathscr{E}_{\gamma_\sigma}(\psi U_2) = \overline{\psi}(\sigma + 0),$$

где $\overline{\psi}(v)$ *— перестановка в убывающем порядке функции* $|\psi(t)|$.

В Γ_σ *имеется множество* γ_σ^*, *для которого*

$$\mathscr{E}_{\gamma_\sigma^*}(\psi U_2) = D_\sigma(\psi U_2) = \overline{\psi}(\sigma + 0).$$

Это множество определяется соотношением

$$\gamma_\sigma^* = \{ t \in R^m : |\psi(t)| \geq \overline{\psi}(\sigma + 0) \}, \quad \operatorname{mes} \gamma_\sigma^* = \sigma.$$

Аналогично, на основании теоремы 2 получаем следующее утверждение.

Теорема 2′. *В условиях и обозначениях, принятых в теореме* 1′, *выполняется равенство*

$$e_\sigma^p(\psi U_2) = \sup_{f \in \psi U_2} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma} \left\| f(\cdot) - U_{\gamma_\sigma}(f; \cdot) \right\|_{L_2(R^m)}^p = \sup_{q > \sigma} \frac{q - \sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\psi}^p(t)}}, \tag{102}$$

в котором $\overline{\psi}(v)$ *— перестановка в убывающем порядке функции* $|\psi(t)|$. *Точная верхняя грань в правой части* (102) *достигается при некотором конечном значении* $q = q^*$.

3. По схеме, изложенной во втором примере, можно получать аналоги теорем 1′ и 2′, когда вместо преобразования Фурье берется любой оператор Φ, унитарный на множестве $L_2(A, d\mu)$, где A — некоторое многообразие в R^m, а μ — некоторая σ-аддитивная мера в R^m. Изложим соответствующие рассуждения, когда $L_2(A, d\mu)$ является множеством $L_2(R_+^1)$ функций $f(t)$, суммируемых по Лебегу с квадратами на полуоси $(0, \infty)$, а Φ — преобразование Ганкеля

$$H_\nu f = H_\nu(f; x) = \hat{f}(x) = \hat{f}_\nu(x) = x^{-(\nu+1/2)} \frac{d}{dx} \int_0^\infty x^{\nu+1} \mathcal{J}_{\nu+1}(xt) \frac{f(t)}{\sqrt{t}} \, dt,$$

где ν — некоторое число, $\nu > -1$, а $\mathcal{J}_\alpha(z)$ — функция Бесселя I рода порядка α.

Известно, что преобразование Ганкеля порождает оператор H_ν, унитарный на $L_2(R^1)$ и совпадающий со своим обратным (см. например, [10], гл. III). Поэтому выполняется аналог равенства (99):

$$\|f\|_{2, H_\nu} = \|f\|_{L_2(R_+^1)}.$$

Следовательно, $S_{H_\nu}^2 = \{ f : L_2(R_+^1) \}$, т. е. и в этом случае $S_{H_\nu}^2 = X = L_2(R_+^1) = Y$.

Как и в предыдущем примере, множество $\Omega_{H_\nu}^2 = \Omega_{H_\nu}^2(L_2(R_+^1))$ есть множество функций ω таких, что произведение $\omega(t)\hat{f}(t)$ содержится в $L_2(R_+^1)$, если $f \in L_2(R_+^1)$ и функция $f_\omega(t) = M_{H_\nu}^\omega f(t)$, удовлетворяющая равенству (7), определяется равенством

$$f_\omega(t) = H_\nu(\omega\hat{f}; t) = t^{-(\nu+1/2)}\frac{d}{dt}\int\limits_0^\infty t^{\nu+1}\mathcal{J}_{\nu+1}(xt)\omega(x)\frac{\hat{f}(x)}{\sqrt{x}}\,dx. \tag{103}$$

В частности, если Γ_σ — множество всех измеримых по Лебегу подмножеств γ_σ из R^1_+, меры которых равны σ, $\sigma \in (0,\infty)$ и $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma$, то

$$U_{\gamma_\sigma}(f; x) = H_\nu(\chi_{\gamma_\sigma}\hat{f}; t) = t^{-(\nu+1/2)}\frac{d}{dt}\int\limits_{\gamma_\sigma} t^{\nu+1}\mathcal{J}_{\nu+1}(xt)\frac{\hat{f}(x)}{\sqrt{x}}\,dx. \tag{104}$$

Если $\psi \in \Omega^2_{H_\nu}$ и $f \in L_2(R^1_+)$, то ψ-интеграл функции f задается формулой (103) при $\omega(t) = \psi(t)$. Если теперь через ψU_2 обозначить множество ψ-интегралов всех функций из $U_2(R^1_+) = \{\varphi : \|\varphi\|_{L_2(R^1_+)} \le 1\}$, то для функций $U_{\gamma_\sigma}(f;\cdot)$, определяемых формулой (104), будет справедливо утверждение, которое совпадает с теоремами 1′ и 2′ после замены в них R^m на R^1_+.

4. Рассмотрим еще частный случай пространств S^p_Φ, которые порождаются тождественным оператором, т. е когда $\Phi = I$. Ясно, что в таком случае $\mathfrak{X} = Y(A, d\mu)$, $\hat{x} = x$ и согласно (5)

$$S^p_I = \{x \in \mathfrak{X} : \|x\|_{L_p(A, d\mu)} < \infty\} = L_p(A, d\mu), \quad p \in (0, \infty].$$

Множеству Ω^Φ_I принадлежат все μ-измеримые функции ω, для которых произведение $\omega(t)x(t)$ находится в $L_p(A, d\mu)$ при всех $x \in L_p(A, d\mu)$. В частности, если $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma(A)$, то при любом $\sigma \in (0, \infty)$ выполняется включение $\lambda_{\gamma_\sigma} \in \Omega^p_I$ для любой существенно ограниченной функции $\lambda = \lambda(t)$ с носителем γ_σ. Мультипликатор M^ω_I умножает элемент $x(t)$ на $\omega(t)$, поэтому

$$U_{\gamma_\sigma}(x, \lambda; t) = \begin{cases} \lambda(t)x(t), & t \in \gamma_\sigma; \\ 0, & t \in A \setminus \gamma_\sigma, \ \lambda \in \Omega^p_I, \end{cases}$$

и, соответственно,

$$U_{\gamma_\sigma}(x; t) = \begin{cases} x(t), & t \in \gamma_\sigma; \\ 0, & t \in A \setminus \gamma_\sigma. \end{cases}$$

Единичный шар U^p_I в данном случае совпадает с единичным шаром U_p в $U_p(A, d\mu)$;

$$U^p_I = \{x : x \in S^p_I = L_p(A, d\mu), \ \|x\|_{L_p(A, d\mu)} \le 1\}$$

и для заданной функции $\psi = \psi(t)$ ψU^p_I — множество произведений $\psi(t)x(t)$, $x \in U^p_I$.

На основании теорем 1 и 2 в рассматриваемом случае справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть* $\psi = \psi(t)$ — *произвольная функция из* $Y(A, d\mu)$, *существенно ограниченная на* A *и в случае, когда множество* $A \subset R^m$, $m \ge 1$, *не ограничено, выполняется условие* (25). *Тогда если* $\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma(A)$, $\sigma < a = \operatorname{mes}_\mu A$, *то выполняются равенства*

$$\mathcal{E}^p_{\gamma_\sigma}(\psi U^p_I)_p = \sup_{x \in \psi U_p} \inf_{\lambda \in \Omega^p_I} \|x(t) - U_{\gamma_\sigma}(x; \lambda; t)\|^p_{L_p(A, d\mu)} =$$

$$= \sup_{x \in \psi U_p} \left\| x(t) - U_{\gamma_\sigma}(x; t) \right\|^p_{L_p(A,\, d\mu)} = \overline{\varphi}_\sigma(0+0), \qquad p \in (0, \infty),$$

где $\overline{\varphi}_{\gamma_\sigma}(v)$ — *перестановка в убывающем порядке функции*

$$\varphi_\sigma(t) = \begin{cases} |\psi(t)|^p, & t \in A \setminus \gamma_\sigma; \\ 0, & t \in \gamma_\sigma, \end{cases}$$

и

$$D_\sigma(\psi U_1^p) = \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma(A)} \sup_{x \in \psi U_p} \left\| x(t) - U_{\gamma_\sigma}(x; t) \right\|_{L_p(A,\, d\mu)} = \overline{\psi}(\sigma + 0),$$

где $\overline{\psi}(v)$ — *перестановка в убывающем порядке функции* $|\psi(t)|$.

Для величин

$$e_\sigma(\psi U_1^p) = \sup_{x \in \psi U_p} \inf_{\gamma_\sigma \in \Gamma_\sigma(A)} \left\| x(t) - U_{\gamma_\sigma}(x; t) \right\|_{L_p(A,\, d\mu)}$$

выполняется равенство

$$e_\sigma^p(\psi U_1^p) = \sup_{\sigma < q \le a} \frac{q - \sigma}{\int_0^q \frac{dt}{\overline{\psi}^p(t)}}. \qquad (105)$$

Величина точной верхней грани в правой части (105) *достигается при некотором конечном значении* $q = q^*$.

1. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ. – Киев, 2001. – 85 с. – (Препринт / НАН Украины. Ин-т математики; 2001.2).
2. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 392 – 416.
3. *Степанец А. И.* Аппроксимационные характеристики пространств S^p_φ в разных метриках // Там же. – № 8. – С. 1121 – 1146.
4. *Степанец А. И.* Методы теории приближений: В 2 т. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Т. 1. – 468 с.
5. *Степанец А. И., Сердюк А. С.* Прямые и обратные теоремы приближения функций в пространстве S^p // Укр. мат. журн. – 2002. – **54**, № 1. – С. 106 – 124.
6. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Пространства S^p_φ с несимметричной метрикой // Там же. – 2003. – **55**, № 2. – С. 264 – 277.
7. *Степанец А. И., Рукасов В. И.* Наилучшие „сплошные" n-членные приближения в пространстве S^p_φ // Там же. – № 5. – С. 663 – 671.
8. *Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
9. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
10. *Ахиезер Н. И.* Лекции по теории аппроксимации. – М.: Наука, 1970. – 303 с.
11. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. – 333 с.

Получено 10.06.2003