УДК 517.911

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина (Южноукр. пед. ун-т, Одесса)

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ $\sum_{k=1}^{n}(a_{k1}t+a_{k2}x)(x')^k = b_1t+b_2x+f(t,x,x'), \quad x(0)=0$

We prove the existence of continuously differentiable solutions $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$ with required asymptotic properties for $t\to+0$ and determine the number of these solutions.

Доведено існування неперервно диференційовних розв'язків $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$ з потрібними асимптотичними властивостями при $t\to+0$ та визначено кількість цих розв'язків.

Введение. Сингулярная задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных, исследована достаточно подробно (см., например, работы [1 – 6]). В то же время поведение решений задачи Коши для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных, исследовано сравнительно мало даже в самых простых случаях. И это несмотря на то, что данная проблема была признана актуальной еще в XIX веке: в 1885 – 1888 гг. редакция журнала „Acta mathematica" организовала конкурс; в состав жюри вошли К. Вейерштрасс, Ш. Эрмит и Г. Миттаг-Леффлер. Были предложены четыре темы, разработка каждой из которых, по мнению жюри, имела большое значение для прогресса науки. Одной из тем была такая: со ссылкой на Ш. Брио и Ж. Буке, начавших подобные исследования, предлагалось изучить решения дифференциального уравнения $P\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0$, где P — многочлен относительно своих трех аргументов. В конкурсе победил А. Пуанкаре. (Отметим, что он выбрал не эту, а другую проблему.)

Фактически в сформулированном виде проблема не решена и сейчас. Хотя значительное внимание [3, 7 – 13] уделялось вопросам существования и числа решений задачи Коши для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных неизвестных, но асимптотическое поведение решений таких уравнений практически не исследовано. По мнению авторов, именно такое исследование представляет наибольший интерес как с теоретической, так и с прикладной точек зрения. Вот почему авторы поставили своей целью дать качественный анализ решений задачи Коши

$$\sum_{1\le i+j+k\le n} a_{ijk}t^i x^j (x')^k + f(t,x,x') = 0, \qquad x(0)=0, \tag{1}$$

в окрестности начальной точки. Ранее [14, 15] один из авторов рассматривал задачу (1) в предположении, что либо $a_{001}\ne 0$, либо $a_{001}=\ldots=a_{00,l-1}=0$, $a_{00l}=-1$, $2\le l\le n$, а также [16] в предположении, что все $a_{00k}=0$, $k\in\{1,\ldots,n\}$, и при этом уравнение

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_{10k}c^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_{01k}c^{k+1} = 0 \tag{2}$$

имеет действительный кратный корень $c=c_0$; в [16] получены условия существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения $x:(0,\rho]\to\mathbb{R}$ (здесь и далее $\rho>0$ — достаточно мало) вида

$$x(t) = (c_0 + \overline{\overline{o}}(1))t, \quad x'(t) = c_0 + \overline{\overline{o}}(1), \quad t \to +0. \tag{3}$$

В настоящей работе рассматривается задача Коши вида

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k1}t + a_{k2}x)(x')^k = b_1 t + b_2 x + f(t, x, x'), \quad x(0) = 0, \tag{4}$$

для которой (в обозначениях [16]) корень $c = c_0$ уравнения (2) не обязательно кратный. Получены достаточные условия существования непустого множества (в том числе и бесконечного множества) непрерывно дифференцируемых решений $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ вида (3). Выясняется вопрос о числе решений данного типа.

Отметим, что точно так же, как уравнение Ш. Брио и Ж. Буке

$$tx' = b_1 t + b_2 x + f(t, x) \tag{5}$$

с начальным условием $x(0) = 0$ является простейшей сингулярной задачей Коши в случае дифференциального уравнения, разрешенного относительно x', задача Коши

$$(a_1 t + a_2 x)x' = b_1 t + b_2 x + f(t, x, x'), \quad x(0) = 0 \tag{6}$$

(и в общем случае задача (4)) представляет собой простейшую сингулярную задачу Коши в случае дифференциального уравнения (1), не разрешенного относительно x' (последние слагаемые в правых частях дифференциальных уравнений (4) – (6) в определенном смысле малы). Поэтому естественно начать анализ сингулярных задач вида (1) именно с анализа задачи вида (4), по аналогии с анализом, проведенным Ш. Брио и Ж. Буке для уравнения (5). Одна из задач вида (6) (при $a_2 = 0$) рассматривалась в [17] (случай $\alpha(t) = t$).

При исследовании задачи вида (4) используются идеи и методы качественной теории дифференциальных уравнений (см. [2, 18, 19], а также [14 – 17]). Оказалось, что при изучении этой задачи применима методика исследования, предложенная ранее одним из авторов; она подробно описана в [17]. Основная схема рассуждений из [17] остается прежней. При изложении доказательств теорем настоящей работы авторы отсылают читателя к статье [17] за подробностями; в связи с этим здесь используются те же обозначения и терминология, что и в [17].

Основные результаты. Будем рассматривать задачу Коши (4), где $t \in \in (0, \tau)$ — действительная переменная $x\colon (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — неизвестная действительная функция, n — натуральное, a_{k1}, a_{k2}, $k \in \{1, \ldots, n\}$, b_1, b_2 — постоянные, $f\colon \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y)\colon t \in (0, \tau),\ |x| < r_1 t,\ |y| < r_2\}.$$

Определение. *Пусть* ρ *— постоянная,* $\rho \in (0, \tau)$. *Будем называть* ρ*-решением задачи* (4) *непрерывно дифференцируемую функцию* $x\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ *со свойствами*:

1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}$, $t \in (0, \rho]$;

2) x *тождественно удовлетворяет дифференциальному уравнению* (4) *при* $t \in (0, \rho]$.

Пусть $c = c_0$ — действительный корень уравнения

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{k1} + a_{k2}c)c^k = b_1 + b_2 c,$$

удовлетворяющий условиям $c_0 \neq 0$, $|c_0| < \min\{r_1, r_2\}$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1) $|f(t, c_0t, c_0)| \leq t\xi(t)$, $t \in (0, \tau)$, где $\xi\colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ — непрерывно дифференцируемая функция,

$$\lim_{t\to+0} \xi(t) = 0, \qquad \lim_{t\to+0} t\frac{\xi'(t)}{\xi(t)} = \xi_0, \qquad 0 \leq \xi_0 < +\infty;$$

2) $e_1 \neq 0$, $e_2 \neq (1+\xi_0)e_1$, где

$$e_1 := \sum_{k=1}^{n}(a_{k1} + a_{k2}c_0)kc_0^{k-1}, \qquad e_2 = b_2 - \sum_{k=1}^{n} a_{k2}c_0^k;$$

3) $|f(t, x, y_1) - f(t, x, y_2)| \leq l_3t|y_1 - y_2|$, $(t, x, y_i) \in \mathcal{D}$, $i \in \{1, 2\}$, где l_3 — постоянная, $l_3(|e_2| + |e_2 - (1+\xi_0)e_1|) < |e_1||e_2 - (1+\xi_0)e_1|$.

Обозначим через $\mathcal{U}(\rho, M, q)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u\colon (0, \rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t) - c_0t| \leq Mt\xi(t), \qquad |u'(t) - c_0| \leq qM\xi(t), \qquad t \in (0, \rho]; \tag{7}$$

здесь ρ, M, q — положительные постоянные, $\rho < \tau$.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия:*

$$|f(t_1, x, y) - f(t_2, x, y)| \leq l_1|t_1 - t_2|, \qquad (t_i, x, y) \in \mathcal{D},$$

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \leq l_2(t)|x_1 - x_2|, \qquad (t, x_i, y) \in \mathcal{D},$$

$$i \in \{1, 2\},$$

где l_1 *— постоянная,* $l_2\colon (0, \tau) \to (0, +\infty)$ *— непрерывная неубывающая функция,* $\lim_{t\to+0} l_2(t) = 0$.

Тогда:

1) *если* $\frac{e_2}{e_1} > 1 + \xi_0$, *то существуют* ρ, M, q *такие, что задача* (4) *имеет бесконечное множество* ρ*-решений, принадлежащих множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$. *При этом если постоянная* α *удовлетворяет условию*

$$|\alpha - c_0\rho| < M\rho\xi(\rho), \tag{8}$$

то существует хотя бы одно ρ*-решение* $x_\alpha \in \mathcal{U}(\rho, M, q)$ *задачи* (4) *такое, что* $x_\alpha(\rho) = \alpha$;

2) *если* $\frac{e_2}{e_1} < 1 + \xi_0$, *то существуют* ρ, M, q *такие, что задача* (4) *имеет хотя бы одно* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M, q)$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

1) *если* $\frac{e_2}{e_1} < 1$, *или* $\frac{e_2}{e_1} > 1 + \xi_0$, *то*

$$|f(t, x_1, y) - f(t, x_2, y)| \leq l_2't|x_1 - x_2|, \qquad (t, x_i, y) \in \mathcal{D}, \qquad i \in \{1, 2\},$$

где l_2 *— постоянная,* $l_2 + l_3 < |e_1||e_1 - e_2|(|e_1 - e_2| + |e_2|)^{-1}$;

2) *если* $1 \leq \frac{e_2}{e_1} < 1 + \xi_0$, *то*

$$|f(t,x_1,y)-f(t,x_2,y)| \le l_2 t(\xi(t))^{\sigma}|x_1-x_2|, \quad (t,x_i,y)\in\mathcal{D},$$

$$|f(t,x,y_1)-f(t,x,y_2)| \le l_3 t(\xi(t))^{\sigma}|y_1-y_2|, \quad (t,x,y_i)\in\mathcal{D},$$

$$i\in\{1,2\},$$

где l_2, l_3, σ *— постоянные,* $\dfrac{1}{\xi_0}\left(\dfrac{e_2}{e_1}-1\right)<\sigma<1$.

Тогда:

1) *если* $\dfrac{e_2}{e_1}>1+\xi_0$, *то существуют* ρ, M, q *такие, что задача* (4) *имеет бесконечное множество* ρ*-решений, принадлежащих множеству* $\mathcal{U}(\rho,M,q)$. *При этом если постоянная* α *удовлетворяет условию* (8), *то существует единственное* ρ*-решение* $x_\alpha\in\mathcal{U}(\rho,M,q)$ *задачи* (4) *такое, что* $x_\alpha(\rho)=$ $=\alpha$;

2) *если* $\dfrac{e_2}{e_1}<1+\xi_0$, *то существуют* ρ, M, q *такие, что задача* (4) *имеет единственное* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho,M,q)$.

***Доказательство теоремы* 1.** Вначале выберем постоянные ρ, M, q. Пусть

$$(|e_2|+|e_2-(1+\xi_0)e_1|)|e_1|^{-1} < q < |e_2-(1+\xi_0)e_1|\, l_3^{-1},$$
$$M > (|e_2-(1+\xi_0)e_1|-l_3q)^{-1}. \tag{9}$$

Неравенства, определяющие выбор ρ, здесь не приводятся ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x\colon[0,\rho]\to\mathbb{R}$ с нормой

$$\|x\|_{\mathcal{B}} = \max_{t\in[0,\rho]}(|x(t)|+|x'(t)|). \tag{10}$$

Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u\colon[0,\rho]\to\mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (7), причем $u(0)=0$, $u'(0)=c_0$ и, кроме того,

$$\forall\mu\in(0,\rho] \quad \forall t_i\in[\mu,\rho], \quad i\in\{1,2\}: |u'(t_1)-u'(t_2)| \le K(\mu)|t_1-t_2|,$$

где

$$K(\mu) = 2|e_1|(|e_1|-l_3)^{-1}\mu^{-2}.$$

Множество $\mathcal{U}$ замкнуто, ограничено, выпукло и (на основании теоремы Арцела) компактно. Преобразуем дифференциальное уравнение (4) к виду

$$e_1t(x'-c_0) = e_2(x-c_0t)-e_3(x-c_0t)(x'-c_0)-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}(a_{k1}t+a_{k2}x)\sum_{r=2}^{k}C_k^r c_0^{k-r}(x'-c_0)^r+f(t,x,x'),$$

где $e_3=\sum_{k=1}^{n}ka_{k2}c_0^{k-1}$. Далее будем рассматривать задачу Коши

$$x' = c_0t+(e_1t)^{-1}\Big(e_2(x-c_0t)-e_3(u(t)-c_0t)(u'(t)-c_0)-$$

$$- \sum_{k=1}^{n} (a_{k1}t + a_{k2}u(t)) \sum_{r=2}^{k} C_k^r c_0^{k-r}(u'(t) - c_0)^r + f(t, u(t), u'(t))\Big), \tag{11}$$

$$x(0) = 0,$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Рассуждения проводим по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 2 из [17, с. 305 – 310]; при этом обозначаем

$$\Phi_1 = \{(t, x): t \in (0, \rho],\ |x - c_0 t| = Mt\xi(t)\},$$

$$\Phi_2 = \{(t, x): t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = h^{\nu}(t\xi(t))^{1-\nu}\}$$

$\Big($ ν — постоянная, удовлетворяющая следующим условиям: если $\frac{e_2}{e_1} > 1 + \xi_0$, то $0 < \nu < 1$; если $\frac{e_2}{e_1} < 1 + \xi_0$, то $0 < \nu < \min\left\{1, \frac{1 + \xi_0 - e_2/e_1}{1 + \xi_0}\right\}\Big)$,

$$\Phi_3(\nu) = \{(t, x): t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t\xi(t)(-\ln t)\}$$

(ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$). Затем устанавливаем, что либо каждая из интегральных кривых дифференциального уравнения (11), пересекших множество

$$\mathrm{H} = \{(t, x): t = \rho,\ |x - c_0\rho| \le M\rho\xi(\rho)\},$$

остается во множестве $\{(t, x): t \in (0, \rho],\ |x - c_0 t| \le Mt\xi(t)\}$ при всех $t \in \in (0, \rho]$, либо у этого уравнения есть одна и только одна такая интегральная кривая. После этого доказываем, что задача (11) имеет единственное решение $x_u \in \mathcal{U}$, либо выбираем одно такое решение вполне определенным образом (так же, как и в [17]). Затем определяем оператор $\mathrm{T}: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $\mathrm{T}u = x_u$, и доказываем, что этот оператор непрерывен. Для завершения доказательства теоремы 1 остается применить теорему Шаудера о неподвижной точке.

***Доказательство теоремы* 2.** Вначале выберем постоянные ρ, M, q. Пусть M и q удовлетворяют условиям (9). Неравенства, определяющие выбор ρ, здесь не приводятся ввиду ограниченности объема статьи; отметим лишь, что ρ достаточно мало. Пусть $\mathcal{B}$ — пространство непрерывно дифференцируемых функций $x: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой (10). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u: [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет условиям (7), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = c_0$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто и ограничено. Выполнив, как и при доказательстве теоремы 1, преобразование дифференциального уравнения (4), далее будем рассматривать задачу Коши (11), где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Затем проводим рассуждения, полностью аналогичные таковым при доказательстве теоремы 1 из [17, с. 302 – 305]; при этом следует взять те же Φ_1 и $\Phi_3(\nu)$, что и при доказательстве теоремы 1 настоящей работы, а также обозначить

$$\Phi_2 = \{(t, x): t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = \gamma h t(\xi(t))^{\lambda}\}$$

$\Big($ λ, γ — постоянные, удовлетворяющие условиям: если $\frac{e_2}{e_1} < 1$, или $\frac{e_2}{e_1} > 1 + \xi_0$, то $\lambda = 0$, $(l_2 + l_3)|e_1 - e_2|^{-1} < \gamma < (|e_1| - l_2 - l_3)|e_2|^{-1}$; если же $1 \le \frac{e_2}{e_1} <$

$< 1 + \xi_0$, то $\lambda = \sigma, \gamma > (l_2 + l_3)|e_1|^{-1}\left(1 + \sigma\xi_0 - \frac{e_2}{e_1}\right)^{-1}\Bigg)$. Как и при доказательстве теоремы 1, строим оператор $T: \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, выбирая соответствующим образом решение x_u задачи (11). Затем доказываем, что этот оператор является сжимающим. Для завершения доказательства теоремы 2 остается применить принцип Банаха сжатых отображений.

1. *Андреев А. Ф.* Усиление теоремы единственности O-кривой в N_2 // Докл. АН СССР. – 1962. – **146**, №1. – С. 9 – 10.
2. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
3. *Еругин Н. П., Штокало И. З., Бондаренко П. С. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. – Киев: Выща шк., 1974. – 472 с.
4. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 10. – С. 1271 – 1291.
5. *Кигурадзе И. Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во Тбил. ун-та, 1975. – 352 с.
6. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1959. – № 8. – С. 155 – 198.
7. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения. – 1971. – **7**, № 9. – С. 1575 – 1580.
8. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 9. – С. 79 – 84.
9. *Anichini G., Conti G.* Boundary value problems for implicit ODE's in a singular case // Different. Equat. and Dynam. Systems. – 1999. – **7**, № 4. – P. 437 – 459.
10. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. – 1959. – № 48. – P. 97 – 102.
11. *Frigon M., Kaczynski T.* Boundary value problems for systems of implicit differential equations // J. Math. Anal. and Appl. – 1993. – **179**, № 2. – P. 317 – 326.
12. *Kowalski Z.* The polygonal method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. pol. math. – 1963. – **13**, № 2. – P. 173 – 204.
13. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ibid. – 1965. – **15**, № 2. – P. 121 – 148.
14. *Зернов А. Е.* О разрешимости и асимптотических свойствах решений одной сингулярной задачи Коши // Дифференц. уравнения. – 1992. – **28**, № 5. – С. 756 – 760.
15. *Зернов А. Е.* Асимптотика решений одной задачи Коши, не разрешенной относительно производной // Там же. – 1995. – **31**, № 1. – С. 37 – 43.
16. *Зернов А. Е.* Решение сингулярной задачи Коши для дифференциального уравнения первого порядка, не разрешенного относительно производной неизвестной функции // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 2. – С. 258 – 262.
17. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Там же. – № 3. – С. 302 – 310.
18. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
19. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М; Л.: Гостехтеориздат, 1949. – 550 с.

Получено 28.08.2001,
после доработки — 21.10.2002