УДК 917.926

К. А. Касымов, Д. Н. Нургабыл (Казах. нац. ун-т, Алматы, Казахстан)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ОБЩИХ РАЗДЕЛЕННЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ, ИМЕЮЩИХ НАЧАЛЬНЫЙ СКАЧОК

We obtain asymptotic estimates of solutions of singularly perturbed boundary-value problems with initial jumps.

Встановлено асимптотичні оцінки розв'язків сингулярно збурених крайових задач з початковими стрибками.

1. Введение. Рассмотрим краевую задачу

$$L_\varepsilon y_\varepsilon \equiv \varepsilon y^{(n)} + A_1(t)y^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y = h(t), \quad 0 < t < 1, \tag{1}$$

$$H_i y \equiv \sum_{j=0}^{m_i} \alpha_{ij} y^{(j)}(0,\varepsilon) = a_i, \;\; i = \overline{1,l}, \quad H_{l+i} y \equiv \sum_{j=0}^{n_i} \beta_{ij} y^{(j)}(1,\varepsilon) = a_{l+i}, \;\; i = \overline{1,p}, \tag{2}$$

где $\varepsilon > 0$ — малый параметр, α_{ij}, β_{ij}, a_i — константы, $l + p = n$, линейные формы $H_i y$ от $y^{(j)}(0, \varepsilon)$, $j = \overline{0, m_i}$, и $H_{l+i} y$ от $y^{(j)}(1, \varepsilon)$, $j = \overline{0, n_i}$, линейно независимы, краевые условия (2) упорядочены относительно параметров n_i и m_i так, что $m_1 \geq m_2 \geq \ldots \geq m_l$, $n_1 \geq n_2 \geq \ldots \geq n_p$.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим невозмущенное уравнение

$$L_0 \overline{y} \equiv A_1(t)\overline{y}^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)\overline{y} = h(t). \tag{3}$$

Впервые вопрос о структуре фундаментальной системы решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (1), при малых ε был рассмотрен Шлезингером [1], Биркгофом [2] и Нуайоном [3]. Возникает вопрос: можно ли, используя результаты работ [1–3], доказать предельный переход от решения сингулярно возмущенного уравнения к решению невозмущенного (вырожденного) уравнения ? Наиболее общие результаты в этом направлении получены в работах [4–9]. Однако для построения асимптотических решений некоторых сингулярно возмущенных краевых задач возникает вопрос об определении характера роста производных искомого решения в граничной точке при $\varepsilon \to 0$.

В настоящей работе на основе аналитического представления решения задачи (1), (2) устанавливается характер роста производных решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$, выделяется класс краевых задач, имеющих начальные скачки, определены начальные скачки, получены асимптотические оценки решения задачи (1), (2) и разности между решениями вырожденной и исходной задач.

Пусть выполняются следующие условия:

1) функции $A_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, $h(t)$ достаточное число раз дифференцируемы на отрезке $0 \leq t \leq 1$;

2) $A_1(t) \geq \gamma > 0$, $0 \leq t \leq 1$, где γ не зависящая от t и ε постоянная;

3) $\alpha_{1_{m_1}} \neq 0$, $n-1 > m_1 > m_2 > \ldots m_l$, $n-1 > n_1 > n_2 > \ldots > n_p$.

Для удобства остальные условия будут приведены в ходе рассмотрения.

2. Фундаментальная система решений. Построение функции Коши. Рассмотрим однородное возмущенное уравнение

$$L_\varepsilon y = 0. \tag{4}$$

Фундаментальную систему решений уравнения (4) ищем в виде

$$y_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_{ik}, \quad i=\overline{1,n-1}, \qquad y_n(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)\,dx\right)\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k y_{nk}, \tag{5}$$

где $y_{ij}(t)$ — функции, подлежащие определению, $\mu(t) = -A_1(t)$.

Формально подставляя (5) в (4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε в обеих частях равенства, получаем последовательность уравнений для определения всех членов разложения (5). Однако для нашей цели достаточно взять нулевое приближение. Итак, для $y_{i0}(t)$, $i=\overline{1,n}$, имеем следующие задачи:

$$\begin{gathered} L_0 y_{i0} = A_1(t)y_{i0}^{(n-1)} + \ldots + A_n(t)y_{i0} = 0, \quad i=\overline{1,n-1}, \\ y_{i0}^{(j)}(0) = 1, \quad j=i-1, \quad y_{i0}^{(j)}(0) = 0, \quad j\neq i-1, \quad j=\overline{0,n-2}, \quad i=\overline{1,n-1}, \\ A_1(t)y_{n0}'(t) + [(n-1)A_1'(t) - A_2(t)]y_{n0}(t) = 0,. \quad y_{n0}(0) = 1. \end{gathered} \tag{6}$$

Решения задач (6) существуют и единственны на отрезке $0 \le t \le 1$, причем $y_{i0}(t)$, $i=\overline{1,n-1}$, образуют фундаментальную систему решений однородного уравнения $L_0\overline{y} = 0$, а $y_{n0}(t)$ представимо в виде

$$y_{n0}(t) = (A_1(0)/A_1(t))^{n-1}\exp\left(\int_0^t (A_2(x)/A_1(x))\,dx\right). \tag{7}$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 1 *и* 2. *Тогда для фундаментальной системы решений* $y_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, *сингулярно возмущенного однородного уравнения* (4) *справедливы следующие асимптотические при* $\varepsilon\to 0$ *представления*:

$$\begin{gathered} y_i^{(q)}(t,\varepsilon) = y_{i0}^{(q)}(t) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{1,n-1}, \quad q=\overline{0,n-1}, \\ y_n^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)\,dx\right)y_{n0}(t)\mu^q(t)(1+O(\varepsilon)), \quad q=\overline{0,n-1}. \end{gathered} \tag{8}$$

Доказательство непосредственно следует из известной теоремы Нуайона [3] (см., например, [5, 10]).

Составим вронскиан $W(t,\varepsilon)$ для фундаментальной системы решений $y_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, уравнения (4). Разложим его по элементам n-го столбца:

$$W(t,\varepsilon) = (-1)^{1+n}y_n(t,\varepsilon)W_{1n}(t,\varepsilon) + \ldots + (-1)^{2n}y_n^{(n-1)}(t,\varepsilon)W_{nn}(t,\varepsilon), \tag{9}$$

где $W_{in}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, — миноры $(n-1)$-го порядка. Тогда, учитывая (8), при достаточно малых ε для $W_{in}(t,\varepsilon)$ получаем

$$W_{in}(t,\varepsilon) = \overline{W}_{i0}(t) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{1,n}, \tag{10}$$

где $\overline{W}_{i0}(t)$ — определитель, получаемый вычеркиванием i-й строки прямоугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} y_{10}(t) & \ldots & y_{n-1,0}(t) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{10}^{(n-1)}(t) & \ldots & y_{n-1,0}^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

В частности, $\overline{W}_{n0}(t) \equiv \overline{W}(t)$ является вронскианом фундаментальной системы решений $y_{i0}(t)$, $i = \overline{1, n-1}$, уравнения $L_0\overline{y} = 0$. Если принять во внимание (8) и (10), то (9) примет вид

$$W(t, \varepsilon) = y_{n0}(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)\,dx\right)\sum_{j=1}^{n-1}(-1)^{j+n}\frac{1}{\varepsilon^{j-1}}\mu^{j-1}(t)\big(W_{j0}(t) + O(\varepsilon)\big) +$$

$$+ (-1)^{2n}\frac{1}{\varepsilon^{n-1}}y_{n0}(t)\mu^{n-1}(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)\,dx\right)\big(\overline{W}(t) + O(\varepsilon)\big).$$

Отсюда для $W(t, \varepsilon)$ получим асимптотическое представление

$$W(t, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}\overline{W}(t)\,y_{n0}(t)\mu^{n-1}(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)\,dx\right)(1 + O(\varepsilon)) \neq 0, \quad 0 \le t \le 1, \tag{11}$$

где $y_{n0}(t)$ выражается формулой (7).

Введем в рассмотрение функцию

$$\overline{K}(t, s) = \overline{W}(t, s)/\overline{W}(s), \qquad 0 \le s \le t \le 1, \tag{12}$$

где $\overline{W}(t, s)$ — определитель $(n-1)$-го порядка, который получается из $\overline{W}(s) \equiv \equiv \overline{W}_{n0}(s)$ заменой $(n-1)$-й строки строкой $y_{10}(t), \ldots, y_{n-1,0}(t)$.

Очевидно, что функция $\overline{K}(t, s)$ по переменной t удовлетворяет однородному уравнению $L_0\overline{y} = 0$ и начальным условиям

$$\overline{K}(s, s) = 0, \quad \overline{K}_t'(s, s) = 0, \ldots, \quad \overline{K}_t^{(n-3)}(s, s) = 0, \quad \overline{K}_t^{(n-2)}(s, s) = 1.$$

Назовем ее функцией Коши уравнения (3).

Аналогично введем функцию

$$K(t, s, \varepsilon) = W(t, s, \varepsilon)/W(s, \varepsilon), \qquad 0 \le s \le t \le 1, \tag{13}$$

где $W(s, \varepsilon)$ — вронскиан фундаментальной системы решений $y_i(s, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$, уравнения (4), $W(t, s, \varepsilon)$ — определитель n-го порядка, который получается из $W(s, \varepsilon)$ заменой n-й строки строкой $y_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$.

Нетрудно убедиться, что функция $K(t, s, \varepsilon)$, определяемая по формуле (13), удовлетворяет уравнению (4) и начальным условиям

$$K(s, s, \varepsilon) = 0, \quad K_t'(s, s, \varepsilon) = 0, \ldots, \quad K_t^{(n-2)}(s, s, \varepsilon) = 0, \quad K_t^{(n-1)}(s, s, \varepsilon) = 1.$$

Функцию $K(t, s, \varepsilon)$ назовем функцией Коши уравнения (1). Заметим, что функции $K(t, s, \varepsilon)$, $\overline{K}(t, s)$ не зависят от выбора фундаментальной системы решений.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* 1, 2. *Тогда при достаточно малых* ε *для функции* $K(t, s, \varepsilon)$ *и ее производных справедливы следующие оценки*:

$$\left|K_t^{(q)}(t, s, \varepsilon)\right| \le C\varepsilon, \qquad q = \overline{0, n-2},$$
$$\left|K_t^{(n-1)}(t, s, \varepsilon)\right| \le C\left(\varepsilon + \exp\left(-\frac{\gamma(t-s)}{\varepsilon}\right)\right), \qquad 0 \le s \le t \le 1, \tag{14}$$

где $C > 0$ — *не зависящая от* t *и* ε *постоянная,* $\gamma \equiv \mathrm{const} > 0$ *взято из условия* 2.

Доказательство. Разложим определитель $W_t^{(q)}(t, s, \varepsilon)$, $q = \overline{0, n-1}$, по элементам последнего столбца:

$$W_t^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+n} y_n^{(k-1)}(s, \varepsilon) W_{kn}^{(q)}(t, s, \varepsilon) + (-1)^{2n} y_n^{(q)}(t, \varepsilon) W_{nn}(s, \varepsilon). \tag{15}$$

Здесь миноры W_{nn}, $W_{kn}^{(q)}$ при достаточно малых ε представимы в виде

$$W_{kn}^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \overline{W}_{k0}^{(q)}(t, s) + O(\varepsilon), \quad k = \overline{1, n-1}, \quad W_{nn}(s, \varepsilon) = \overline{W}_{n0}(s) + O(\varepsilon), \tag{16}$$

где $\overline{W}_{n0}(s) \equiv \overline{W}(s)$ и $\overline{W}_{k0}^{(q)}(t, s)$ — определители $(n-1)$-го порядка, получаемые вычеркиванием k-й строки прямоугольной матрицы

$$\begin{pmatrix} y_{10}(s) & y_{20}(s) & \ldots & y_{n-1,0}(s) \\ y'_{10}(s) & y'_{20}(s) & \ldots & y'_{n-1,0}(s) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_{10}^{(n-2)}(s) & y_{20}^{(n-2)}(s) & \ldots & y_{n-1,0}^{(n-2)}(s) \\ y_{10}^{(q)}(t) & y_{20}^{(q)}(t) & \ldots & y_{n-1,0}^{(q)}(t) \end{pmatrix}.$$

В частности, $\overline{W}_{n-1,0}^{(q)}(t, s) = \overline{W}_t^{(q)}(t, s)$, где $\overline{W}(t, s)$ — определитель из (12). Тогда, используя (8) и (16), из (15) получаем

$$W_t^{(q)}(t, s, \varepsilon) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+n} \frac{1}{\varepsilon^{k-1}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu(x)\,dx\right) y_{n0}(s)\mu^{k-1}(s)\left(\overline{W}_{k0}^{(q)}(t, s) + O(\varepsilon)\right) +$$

$$+ (-1)^{2n} \frac{1}{\varepsilon^{q}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \mu(x)\,dx\right) y_{n0}(t)\mu^{q}(t)\left(\overline{W}(s) + O(\varepsilon)\right), \quad q = \overline{0, n-1}. \tag{17}$$

Следовательно, из (17) будем иметь

$$W_t^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{n-2}} y_{n0}(s)\mu^{n-1}(s) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^s \mu(x)\,dx\right)\left[-\frac{\overline{W}_{n-1,0}^{(q)}(t, s)}{\mu(s)} +\right.$$

$$\left. + \frac{\varepsilon^{n-2}}{\varepsilon^{q}} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx\right) \frac{y_{n0}(t)\mu^{q}(t)\overline{W}(s)}{y_{n0}(s)\mu^{n-1}(s)} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{n-1-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx\right)\right)\right]. \tag{18}$$

Используя (11), (12), (18) и соотношение $\overline{W}_{n-1,0}^{(q)}(t, s) = \overline{W}_t^{(q)}(t, s)$, из (13) имеем

$$K_t^{(q)}(t, s, \varepsilon) = \varepsilon\left[\frac{\overline{K}_t^{(q)}(t, s)}{A_1(s)} + \frac{\varepsilon^{n-2}}{\varepsilon^{q}} \frac{y_{n0}(t)\mu^{q}(t)}{y_{n0}(s)\mu^{n-1}(s)} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx\right) +\right.$$

$$\left. + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{n-1-q} \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_s^t \mu(x)dx\right)\right)\right], \quad 0 \le s \le t \le 1, \quad q = 1, \ldots, n-1. \tag{19}$$

Отсюда в силу условий 1, 2 получаем оценки (14). Лемма доказана.

3. Построение граничных функций. Введем определитель n-го порядка

$$J(\varepsilon)=\begin{vmatrix} H_1y_1 & \ldots & H_1y_{n-1} & H_1y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_ly_1 & \ldots & H_ly_{n-1} & H_ly_n \\ H_{l+1}y_1 & \ldots & H_{l+1}y_{n-1} & H_{l+1}y_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{l+p}y_1 & \ldots & H_{l+p}y_{n-1} & H_{l+p}y_n \end{vmatrix},$$

элементы которого составлены на основе фундаментальной системы решений уравнения (4) и краевых условий (2).

Разложим $J(\varepsilon)$ по элементам n-го столбца. Тогда

$$J(\varepsilon)=(-1)^{n+1}H_1y_nJ_{1n}(\varepsilon)+\ldots+(-1)^{n+l}H_ly_nJ_{ln}(\varepsilon)+$$

$$+(-1)^{n+l+1}H_{l+1}y_nJ_{l+1,n}(\varepsilon)+\ldots+(-1)^{n+n}H_{l+p}y_nJ_{nn}(\varepsilon),\quad l+p=n. \tag{20}$$

В первом приближении, используя представления (8), получаем

$$H_iy_k=H_iy_{k0}+O(\varepsilon),\ i=\overline{1,l},\qquad H_{l+i}y_k=H_{l+i}y_{k0}+O(\varepsilon),\ \ i=\overline{1,p},\ k=\overline{1,n-1},$$

$$H_iy_n=\frac{\mu^{m_i}(0)}{\varepsilon^{m_i}}y_{n0}(0)\big(\alpha_{im_i}+O(\varepsilon)\big),\quad i=\overline{1,l},\qquad H_{l+i}y_n=o\big(\varepsilon^N\big),\quad i=\overline{1,p}, \tag{21}$$

где N — любое натуральное число, а для $J_{in}(\varepsilon)$ имеем

$$J_{in}(\varepsilon)=\overline{J}_{i0}+O(\varepsilon). \tag{22}$$

Здесь определитель $\overline{J}_{i0}$ имеет вид

$$\overline{J}_{i0}=\begin{vmatrix} H_1y_{10} & \ldots & H_1y_{n-1,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{i-1}y_{10} & \ldots & H_{i-1}y_{n-1,0} \\ H_{i+1}y_{10} & \ldots & H_{i+1}y_{n-1,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H_ny_{10} & \ldots & H_ny_{n-1,0} \end{vmatrix},\qquad i=1,\ldots,l,l+1,\ldots,l+p. \tag{23}$$

Принимая во внимание (21), (22) и условие 3, из (20) получаем

$$J(\varepsilon)=(-1)^{n+1}\frac{1}{\varepsilon^{m_1}}y_{n0}(0)\mu^{m_1}(0)\big(\alpha_{1m_1}\overline{J}_{10}+O(\varepsilon)\big).$$

Сформулируем теперь следующие требования:

4) пусть $\overline{J}_{10}\neq 0$;

5) пусть

$$\Delta_0=\sum_{k=1}^{l}a_k(-1)^{k-1}\overline{J}_{k0}+\sum_{k=1}^{p}(-1)^{l+k-1}\left(a_{l+k}-\sum_{j=0}^{n_k}\beta_{kj}\int_0^1\overline{K}_t^{(j)}(1,s)\frac{h(s)}{A_1(s)}ds\right)\overline{J}_{l+k,0}\neq 0,$$

где $\overline{J}_{i0}$, $i=\overline{1,n}$, — определитель (23), $\overline{K}(t,s)$ — функция Коши из (12).

Тогда с учетом (7) для $J(\varepsilon)$ имеем асимптотическое представление

$$J(\varepsilon)=(-1)^{n+1}\frac{1}{\varepsilon^{m_1}}\alpha_{1m_1}\overline{J}_{10}\mu^{m_1}(0)(1+O(\varepsilon))\neq 0. \tag{24}$$

Введем в рассмотрение функции

$$\Phi_k(t,\varepsilon) = J_k(t,\varepsilon)/J(\varepsilon), \quad k=\overline{1,n}, \tag{25}$$

где $J_k(t,\varepsilon)$ — определитель, полученный из определителя $J(\varepsilon)$ заменой k-й строки строкой $y_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$:

$$J_k(t,\varepsilon)=\begin{vmatrix} H_1y_1 & \dots & H_1y_{n-1} & H_1y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{k-1}y_1 & \dots & H_{k-1}y_{n-1} & H_{k-1}y_n \\ y_1(t,\varepsilon) & \dots & y_{n-1}(t,\varepsilon) & y_n(t,\varepsilon) \\ H_{k+1}y_1 & \dots & H_{k+1}y_{n-1} & H_{k+1}y_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{l+p}y_1 & \dots & H_{l+p}y_{n-1} & H_{l+p}y_n \end{vmatrix}, \; k=1,\dots,l,l+1,\dots,l+p, \; l+p=n. \tag{26}$$

Непосредственно из (25) можно установить, что функция $\Phi_k(t,\varepsilon)$ является решением уравнения (4) с краевыми условиями

$$H_i\Phi_k = \begin{cases} 1, & k=i, \; i=\overline{1,l}; \\ 0, & k\neq i, \; i=\overline{1,l}, \; k=\overline{1,n}, \end{cases} \qquad H_{l+i}\Phi_k = \begin{cases} 1, & k=l+i, \; i=\overline{1,p}; \\ 0, & k\neq l+i, \; i=\overline{1,p}, \; k=\overline{1,n}, \end{cases} \tag{27}$$

и не зависит от выбора фундаментальной системы решений уравнения (4). Решения $\Phi_k(t,\varepsilon)$, $k=1,\dots,n$, задач (4), (27), определенные при $0\le t\le 1$, назовем граничными функциями возмущенной задачи (1), (2).

Лемма 3. *Если выполнены условия* $1-4$, *то при достаточно малых* ε *для граничных функций* $\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon)$ *на* $[0,1]$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \left|\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon)\right| &\le C\left(\varepsilon^{m_1-m_2}+\varepsilon^{m_1-q}\exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon}\right)\right), \\ \left|\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon)\right| &\le C\left(1+\varepsilon^{m_1-q}\exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon}\right)\right), \quad i=\overline{2,n}, \quad q=\overline{0,n-1}, \end{aligned} \tag{28}$$

где $C>0$ *и* $\gamma>0$ *— постоянные, не зависящие от* t *и* ε.

Доказательство. Определим из (26) определитель $J_1^{(q)}(t,\varepsilon)$ и разложим его по элементам последнего столбца:

$$\begin{aligned} J_1^{(q)}(t,\varepsilon) &= (-1)^{1+n}y_n^{(q)}(t,\varepsilon)J_{1n0}(\varepsilon)+(-1)^{2+n}H_2y_nJ_{2n1}^{(q)}(t,\varepsilon)+\dots \\ &\dots+(-1)^{l+n}H_ly_nJ_{ln1}^{(q)}(t,\varepsilon)+(-1)^{l+1+n}H_{l+1}y_nJ_{l+1,n1}^{(q)}(t,\varepsilon)+\dots \\ &\dots+(-1)^{2n}H_{l+p}y_nJ_{l+p,n1}^{(q)}(t,\varepsilon), \quad l+n=p, \end{aligned} \tag{29}$$

где миноры J_{1n0}, $J_{in1}^{(q)}$, $i=\overline{2,n}$, получаются вычеркиванием соответственно первой и i-й строки следующей прямоугольной матрицы:

$$\begin{pmatrix} y_1^{(q)}(t,\varepsilon) & \dots & y_{n-2}^{(q)}(t,\varepsilon) & y_{n-1}^{(q)}(t,\varepsilon) \\ H_2y_1 & \dots & H_2y_{n-2} & H_2y_{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ H_{l+p}y_1 & \dots & H_{l+p}y_{n-2} & H_{l+p}y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad l+p=n.$$

Используя представления (8), получаем

$$\bar{J}^{(q)}_{ln1}(t,\varepsilon) = \bar{J}^{(q)}_{i1}(t) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{2,n}, \qquad J_{1n0}(\varepsilon) = \bar{J}_{10} + O(\varepsilon), \tag{30}$$

где $\bar{J}_{10}$ — определитель из (23), $\bar{J}^{(q)}_{i1}(t)$, $i=\overline{2,n}$, получаются из (23) заменой первой строки строкой $y^{(q)}_{k0}(t)$, $k=\overline{1,n-1}$. Тогда, учитывая (8), (21), (30) и условие 3, из (29) имеем

$$J^{(q)}_{1}(t,\varepsilon) = (-1)^{1+n}\frac{1}{\varepsilon^{m_2}}\Bigg[-\mu^{m_2}(0)\alpha_{2m_2}\bar{J}^{(q)}_{21}(t) + \frac{\varepsilon^{m_2}}{\varepsilon^{q}}y_{n0}(t)\mu^{q}(t)\bar{J}_{10}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)\,dx\right) +$$

$$+ O\left(\varepsilon + \varepsilon^{m_2+1-q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx\right)\right)\Bigg], \qquad q=\overline{0,n-1}. \tag{31}$$

Разложим теперь $J^{(q)}_{k}(t,\varepsilon)$ по элементам последнего столбца:

$$J^{(q)}_{k}(t,\varepsilon) = (-1)^{1+n}H_1y_nJ^{(q)}_{1,k-1}(t,\varepsilon) + \ldots + (-1)^{k-1+n}H_{k-1}y_nJ^{(q)}_{k-1,k-1}(t,\varepsilon) +$$

$$+ (-1)^{k+n}y^{(q)}_{n}(t,\varepsilon)J_{k0}(\varepsilon) + (-1)^{k+1+n}H_{k+1}y_nJ^{(q)}_{k+1,k}(t,\varepsilon) + \ldots$$

$$\ldots + (-1)^{2n}H_{l+p}y_nJ^{(q)}_{l+p,k}(t,\varepsilon), \quad k=2,\ldots,l,\ldots,l+p,\ l+p=n,\ q=\overline{0,n-1}. \tag{32}$$

Здесь в определителях $J^{(q)}_{i,k-1}(t,\varepsilon)$, $J^{(q)}_{ik}(t,\varepsilon)$ $(J_{k0}(\varepsilon))$ нижний второй индекс указывает в какой строке содержится система функций $y^{(q)}_{i}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, а первый индекс означает, что они являются минорами элемента определителя $J^{(q)}_{k}(t,\varepsilon)$ на пересечении i-й строки (k-й строки) и n-го столбца.

Далее, с учетом представлений (8) имеем

$$J_{k0}(\varepsilon) = \bar{J}_{k0} + O(\varepsilon), \quad J^{(q)}_{i,k-1}(t,\varepsilon) = \bar{J}^{(q)}_{i,k-1}(t) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{1,k-1},\ k=\overline{2,n},$$

$$J^{(q)}_{ik}(t,\varepsilon) = \bar{J}^{(q)}_{ik}(t) + O(\varepsilon), \quad i=\overline{k+1,n},\ k=\overline{2,n}, \tag{33}$$

где $\bar{J}_{k0}$, $k=\overline{2,n}$, — определитель из (23), $\bar{J}^{(q)}_{i,k-1}(t)$, $i=\overline{1,k-1}$, $\bar{J}^{(q)}_{ik}(t)$, $i = \overline{k+1,n}$, — определители, получаемые вычеркиванием i-й строки прямоуголь-

$$\begin{pmatrix} H_1y_{10} & \ldots & H_1y_{n-1,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{k-1}y_{10} & \ldots & H_{k-1}y_{n-1,0} \\ y^{(q)}_{10}(t) & \ldots & y^{(q)}_{n-1,0}(t) \\ H_{k+1}y_{10} & \ldots & H_{k+1}y_{n-1,0} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ H_{l+p}y_{10} & \ldots & H_{l+p}y_{n-1,0} \end{pmatrix}, \quad k=2,\ldots,l,\ldots,l+p.$$

Используя (33), (21) и условие 3, из (32) находим

$$J^{(q)}_{k}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon^{m_1}}(-1)^{n+1}\alpha_{1m_1}\mu^{m_1}(0)\Bigg[\bar{J}^{(q)}_{1,k-1}(t) + (-1)^{k-1}\frac{\varepsilon^{m_1}}{\varepsilon^{q}}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)\,dx\right)\times$$

$$\times\frac{y_{n0}(t)\mu^{q}(t)}{\alpha_{1m_1}\mu^{m_1}(0)}\bar{J}_{k0} + O\left(\varepsilon + \varepsilon^{m_1+1-q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx\right)\right)\Bigg], \quad q=\overline{0,n-1},\ k=\overline{2,n}. \tag{34}$$

Подставим теперь (24), (31), (34) в формулу (25). Тогда для функций $\Phi_i^{(q)}(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, получим следующие асимптотические выражения:

$$\Phi_1^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{\varepsilon^{m_1-m_2}}{\alpha_{1m_1}\mu^{m_1}(0)\bar{J}_{10}}\left[-\alpha_{2m_2}\mu^{m_2}(0)\bar{J}_{21}^{(q)}(t)+\varepsilon^{m_2-q}y_{n0}(t)\mu^q(t)\bar{J}_{10}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx\right)+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{m_2+1-q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx\right)\right)\right],$$
$$(35)$$
$$\Phi_k^{(q)}(t,\varepsilon) = \frac{1}{\alpha_{1m_1}\mu^{m_1}(0)\bar{J}_{10}}\left[\alpha_{1m_1}\mu^{m_1}(0)\bar{J}_{1,k-1}^{(q)}(t)+(-1)^{k-1}\varepsilon^{m_1-q}y_{n0}(t)\mu^q(t)\bar{J}_{k0}\times\right.$$
$$\left.\times\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx\right)+O\left(\varepsilon+\varepsilon^{m_1+1-q}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t\mu(x)dx\right)\right)\right],\quad k=\overline{2,n},\quad q=\overline{0,n-1}.$$

Из формул (35) согласно условиям 1 и 2 следует справедливость оценок (28). Лемма доказана.

4. Аналитическое представление и оценка решения краевой задачи.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* 1–4. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon>0$ *решение* $y(t,\varepsilon)$ *краевой задачи* (1), (2) *существует, единственно и имеет вид*

$$y(t,\varepsilon) = \sum_{i=1}^{l}a_i\Phi_i(t,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{p}a_{l+i}\Phi_{l+i}(t,\varepsilon)-\sum_{k=1}^{p}\Phi_{l+k}(t,\varepsilon)\times$$
$$\times\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{n_k}\beta_{kj}\int_0^1K_t^{(j)}(1,s,\varepsilon)h(s)ds+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^tK(t,s,\varepsilon)h(s)ds. \tag{36}$$

Доказательство. Решение $y(t,\varepsilon)$ краевой задачи (1), (2) будем искать в виде

$$y(t,\varepsilon) = c_1\Phi_1(t,\varepsilon)+\ldots+c_n\Phi_n(t,\varepsilon)+\frac{1}{\varepsilon}\int_0^tK(t,s,\varepsilon)h(s)ds, \tag{37}$$

где c_i — неизвестные постоянные. Непосредственной проверкой можно убедиться, что функция $y(t,\varepsilon)$, определяемая формулой (37), является решением уравнения (1). Для определения c_i подставим (37) в краевые условия (2). Тогда с учетом краевых условий (27) однозначно получим

$$c_i=a_i,\quad i=\overline{1,l},\qquad c_{l+k} = a_{l+k}-\sum_{j=0}^{n_k}\beta_{kj}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1K_t^{(j)}(1,s,\varepsilon)h(s)ds,\quad k=\overline{1,p}. \tag{38}$$

Подставляя (38) в (37), получаем (36). Таким образом, решение задачи (1), (2) существует и представимо в виде (36). Единственность решения задачи (1), (2) доказывается от противного. Теорема доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* 1–4. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon>0$ *для решения* $y(t,\varepsilon)$ *краевой задачи* (1), (2) *и его производных на отрезке* $0\le t\le 1$ *справедливы следующие оценки*:

$$\left|y^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left[\varepsilon^{m_1-m_2}|a_1|+\sum_{i=2}^{l}|a_i|+\sum_{i=1}^{p}|a_{l+i}|+\max_{0\le t\le 1}|h(t)|+\right.$$
$$\left.+\varepsilon^{m_1-q}\exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon}\right)\left(\sum_{i=1}^{l}|a_i|+\sum_{i=1}^{p}|a_{l+i}|+\max_{0\le t\le 1}|h(t)|\right)\right],\quad q=\overline{0,n-1}. \tag{39}$$

Доказательство. Справедливость оценок (39) непосредственно следует из теоремы 1 и лемм 2, 3.

В правой части (39) при $q=0$ коэффициенты при $|a_i|$, $i=\overline{2,l}$, и $|a_{l+i}|$, $i=\overline{1,p}$, имеют порядок $O(1)$, а при $|a_1|$ — порядок $O(\varepsilon^{m_1-m_2})$. Следовательно, краевые условия для решения $\bar{y}(t)$ вырожденного уравнения (3) можно получить из (2) исключением $H_1\bar{y}$, т. е.

$$H_i\bar{y} \equiv \sum_{j=0}^{m_i}\alpha_{ij}\bar{y}^{(j)}(0) = a_i, \quad i=\overline{2,l}, \qquad H_{l+i}\bar{y} \equiv \sum_{j=0}^{n_i}\beta_{ij}\bar{y}^{(j)}(1) = a_{l+i}, \quad i=\overline{1,p}. \tag{40}$$

Ниже покажем, что уравнение (3) и краевые условия (40) действительно определяют вырожденную задачу, к решению $\bar{y}(t)$ которой стремится решение $y(t,\varepsilon)$ возмущенной краевой задачи (1), (2) при $\varepsilon\to 0$.

Введем по аналогии с (25) граничные функции по формуле

$$\overline{\Phi}_i(t) = \overline{J}_i(t)/\overline{J}_{10}, \qquad i=\overline{1,n-1},$$

где $\overline{J}_{10}$ — определитель из (23), $\overline{J}_i(t)$ получается из $\overline{J}_{10}$ заменой i-й строки фундаментальной системой решений $y_{j0}(t)$, $j=\overline{1,n-1}$. Тогда при $i=k-1$ определитель $\overline{J}_{k-1}(t)$ будет равен определителю $\overline{J}_{1,k-1}(t)$, полученному в (33), т. е. $\overline{J}_{k-1}^{\cdot}(t)=\overline{J}_{1,k-1}(t)$, $k=\overline{2,n}$. Следовательно,

$$\overline{\Phi}_{k-1}(t) = \overline{J}_{1,k-1}(t)/\overline{J}_{10}, \qquad k=\overline{2,n}. \tag{41}$$

Ясно, что функции $\overline{\Phi}_k(t)$, $k=\overline{1,n-1}$, определяемые по формуле (41), удовлетворяют однородному уравнению $L_0\bar{y}=0$ и краевым условиям

$$H_i\overline{\Phi}_k = \begin{cases} 1, & k=i-1,\ i=\overline{2,l}; \\ 0, & k\neq i-1,\ i=\overline{2,l}, \end{cases} \qquad H_{l+i}\overline{\Phi}_k = \begin{cases} 1, & k=l+i-1,\ i=\overline{1,p}; \\ 0, & k\neq l+i-1,\ i=\overline{1,p}. \end{cases} \tag{42}$$

Следовательно, в соответствии с изложенным выше функции $\overline{\Phi}_k(t)$, определяемые по формуле (41), будут граничными функциями невозмущенной задачи (3), (40). Здесь функции $\overline{\Phi}_k(t)$ также не зависят от выбора фундаментальной системы решений.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* $1-4$. *Тогда невозмущенная краевая задача* (3), (40) *на отрезке* $[0,1]$ *имеет единственное решение* $\bar{y}(t)$, *представимое в виде*

$$\bar{y}(t) = \sum_{i=2}^{l} a_i\overline{\Phi}_{i-1}(t) + \sum_{i=1}^{p} a_{l+i}\overline{\Phi}_{l+i-1}(t) -$$
$$- \sum_{k=1}^{p}\overline{\Phi}_{l+k-1}(t)\sum_{j=0}^{n_k}\beta_{kj}\int_0^1 \overline{K}_t^{(j)}(1,s)\frac{h(s)}{A_1(s)}ds + \int_0^t \overline{K}(t,s)\frac{h(s)}{A_1(s)}ds. \tag{43}$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* $1-3$. *Тогда при достаточно малых* $\varepsilon>0$ *для разности между решениями* $y(t,\varepsilon)$ *задачи* (1), (2) *и* $\bar{y}(t)$ *задачи* (3), (40) *на отрезке* $0\le t\le 1$ *справедлива оценка*

$$\left|y^{(q)}(t,\varepsilon)-\bar{y}^{(q)}(t)\right| \le C\left(\varepsilon+\varepsilon^{m_1-q}\exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon}\right)\right), \qquad q=\overline{0,n-1}. \tag{44}$$

Доказательство. Введем функцию $u(t,\varepsilon)=y(t,\varepsilon)-\bar{y}(t)$, где $y(t,\varepsilon)$ — решение задачи (1), (2), $\bar{y}(t)$ — решение задачи (3), (40). Подставляя функцию $y(t,\varepsilon)$ в задачу (1), (2), получаем задачу

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon\bar{y}^{(n)}(t), \quad H_1 u = a_1 - H_1\bar{y}(0), \quad H_i u = 0, \quad i = \overline{2, l}, \quad H_{l+i}u = 0, \quad i = \overline{1, p}. \quad (45)$$

Применяя теперь теорему 2 к краевой задаче (45), имеем

$$\left|u^{(q)}(t,\varepsilon)\right| \le C\left(\varepsilon + \varepsilon^{m_1 - q}\exp\left(-\frac{\gamma t}{\varepsilon}\right)\right), \quad q = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Отсюда следуют искомые оценки (44). Теорема доказана.

Таким образом, из теоремы 4 следует, что решение $y(t,\varepsilon)$ задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$ стремится к решению $\bar{y}(t)$ задачи (3), (40):

$$\begin{gathered}\lim_{\varepsilon\to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(t), \quad 0 \le t \le 1, \quad q = \overline{0, m_1 - 1}, \\ \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(q)}(t,\varepsilon) = \bar{y}^{(q)}(t), \quad 0 < t \le 1, \quad q = \overline{m_1, n-1}.\end{gathered} \quad (46)$$

5. Определение начального скачка. Из теоремы 2 и (46) имеем

$$y^{(q)}(0,\varepsilon) = O(1), \quad q = \overline{0, m_1}, \qquad y^{(m_1+j)}(0,\varepsilon) = O\left(\frac{1}{\varepsilon^j}\right), \quad j = \overline{1, n-1-m_1}.$$

В этом случае будем говорить, что задача (1), (2) имеет начальный скачок m_1-го порядка в точке $t = 0$. Это означает, что $y^{(m_1)}(t,\varepsilon)$ в пределе при $\varepsilon \to 0$ имеет скачок

$$\Delta = \lim_{\varepsilon\to 0} y^{(m_1)}(0,\varepsilon) - \bar{y}^{(m_1)}(0), \quad (47)$$

где $y(t,\varepsilon)$ — решение задачи (1), (2), $\bar{y}(t)$ — решение вырожденной краевой задачи (3), (40).

Определим величину скачка Δ и уточним в точке $t = 0$ характер роста производных решения задачи (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Обратимся к представлениям (35), где согласно формуле (41)

$$\bar{J}^{(q)}_{1,k-1}(t)/\bar{J}_{1n} = \bar{\Phi}^{(q)}_{k-1}(t), \quad k = \overline{2, n}, \quad q = \overline{0, n-1}.$$

Тогда с учетом неравенства $m_1 > m_2$ в точке $t = 0$ при $q = m_1$ и $q = m_1 + j$, $j = \overline{1, n-1-m_1}$, представления (35) можно записать в виде

$$\Phi_1^{(m_1)}(0,\varepsilon) = \frac{1}{\alpha_{1m_1}} + O(\varepsilon), \quad \Phi_i^{(m_1)}(0,\varepsilon) = \bar{\Phi}^{(m_1)}_{i-1}(0) + \frac{(-1)^{i+1}\bar{J}_{i0}}{\alpha_{1m_1}\bar{J}_{10}} + O(\varepsilon), \quad i = \overline{2, n}, \quad (48)$$

$$\Phi_k^{(m_1+j)}(0,\varepsilon) = (-1)^{k-1}\frac{\mu^j(0)}{\varepsilon^j}\left(\frac{\bar{J}_{k0}}{\alpha_{1m_1}\bar{J}_{10}} + O(\varepsilon)\right), \quad k = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n-1-m_1}. \quad (49)$$

Рассмотрим интеграл $\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^1 K_l^{(j)}(1,s,\varepsilon)h(s)\,ds$ из (36). Подставим сюда представление (19) и проинтегрируем каждое слагаемое, кроме первого, по частям. После интегрирования множителя $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_s^t \mu(x)\,dx\right)$ получим добавочный порядок по ε. Поэтому

$$\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 K_l^{(j)}(1,s,\varepsilon)h(s)\,ds = \int_0^1 \frac{\bar{K}_l^{(j)}(1,s)}{A_1(s)}h(s)\,ds - \varepsilon^{n-1-j}\frac{h(1)}{\mu^{n-j}(1)} + O(\varepsilon).$$

Отсюда, учитывая неравенство $n - 1 > n_k$, $k = \overline{1, p}$, окончательно получаем

$$\frac{1}{\varepsilon}\sum_{j=0}^{n_k}\beta_{kj}\int_0^1 K_t^{(j)}(1,s,\varepsilon)h(s)\,ds = \sum_{j=0}^{n_k}\beta_{kj}\int_0^1 \frac{\overline{K}_t^{(j)}(1,s)}{A_1(s)}h(s)\,ds + O(\varepsilon). \tag{50}$$

Теперь из (36) в силу (48), (50) для решения задачи (1), (2) в точке $t=0$ получим представление

$$y^{(m_1)}(0,\varepsilon) = \sum_{i=2}^{l} a_i\,\overline{\Phi}_{i-1}^{(m_1)}(0) + \sum_{i=1}^{p} a_{l+i}\,\overline{\Phi}_{l+i-1}^{(m_1)}(0) - \sum_{k=1}^{p}\overline{\Phi}_{l+k-1}^{(m_1)}(0)\sum_{j=0}^{n_k}\beta_{kj}\times$$

$$\times\int_0^1 \overline{K}_t^{(j)}(1,s)\frac{h(s)}{A_1(s)}\,ds + \frac{\Delta_0}{\alpha_{1m_1}\overline{J}_{1n}} + O(\varepsilon), \tag{51}$$

где Δ_0 в силу условия 5 отличен от нуля.

Сравнивая теперь $\overline{y}^{(m_1)}(0)$ из (43) и (51), согласно (47) устанавливаем, что величина скачка определяется по формуле

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{\alpha_{1m_1}\overline{J}_{10}}. \tag{52}$$

Аналогично из (36) с учетом (49), (50) получим более точную оценку

$$y^{(m_1+j)}(0,\varepsilon) = \frac{\mu^j(0)}{\varepsilon^j}(\Delta + O(\varepsilon)). \tag{53}$$

Таким образом, если выполняются условия 1 – 5, то задача (1), (2) имеет начальный скачок m_1-го порядка в точке $t=0$.

6. Пример. Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$L_\varepsilon y \equiv \varepsilon y'''' + y''' = 6,$$
$$H_1 y \equiv y'(0,\varepsilon) + y''(0,\varepsilon) = a_1, \qquad H_2 y \equiv y(0,\varepsilon) = a_2, \tag{54}$$
$$H_3 y \equiv y(1,\varepsilon) + y''(1,\varepsilon) = a_3, \qquad H_4 y \equiv y'(1,\varepsilon) = a_4.$$

В данном случае имеем

$$\mu(t) = -A_1(t) = -1,\ \ \alpha_{10}=0,\ \ \alpha_{11}=1,\ \ \alpha_{1m_1}=\alpha_{12}=1,\ \ \alpha_{20}=1,\ \ \beta_{10}=\beta_{12}=1,$$

$$\beta_{11}=0,\ \ \beta_{20}=0,\ \ \beta_{21}=1,\ \ m_1=2,\ \ m_2=0,\ \ n_1=2,\ \ n_2=1,\ \ l=p=2.$$

Очевидно, рассматриваемая задача (54) удовлетворяет условиям 1 – 3.

Согласно (40) сформулируем вырожденную задачу в виде

$$L_0\overline{y} \equiv \overline{y}'''(t) = 6,\ \ H_2 y \equiv \overline{y}(0) = a_2,\ \ H_3 y \equiv \overline{y}''(1) + \overline{y}(1) = a_3,\ \ H_4 y \equiv \overline{y}'(1) = a_4. \tag{55}$$

Однородное уравнение $\overline{y}''' = 0$ имеет фундаментальную систему решений $y_{10}(t)=1$, $y_{20}(t)=t$, $y_{30}(t)=t^2/2$, причем соответствующий вронскиан $\overline{W}(t) = 1$. Тогда $\overline{K}(t,s)$ из формулы (12) будет иметь вид

$$\overline{K}(t,s) = t^2/2 - ts + s^2/2, \qquad \overline{K}'(t,s) = t-s, \qquad \overline{K}''(t,s) = 1. \tag{56}$$

Вычислим определители $\overline{J}_{i0}$ из (23):

$$\overline{J}_{10} = -1/2 \neq 0, \qquad \overline{J}_{20} = 0, \qquad \overline{J}_{30} = 0, \qquad \overline{J}_{40} = -1/2,$$

т. е. условие 4 выполнено. Построим теперь граничные функции $\overline{\Phi}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, с помощью формулы (41). Тогда

$$\overline{\Phi}_1(t) = -t^2 + 2t + 1, \qquad \overline{\Phi}_2(t) = t^2 - 2t, \qquad \overline{\Phi}_3(t) = 3t - t^2. \tag{57}$$

Легко убедиться, что функция Коши $\overline{K}(t, s)$ и граничные функции $\overline{\Phi}_i(t)$, $i = 1, 2, 3$, имеют перечисленные в пп. 2, 3 свойства. Тогда в силу теоремы 3 для решения задачи (55) получим

$$\overline{y}(t) = a_2\overline{\Phi}_1(t) + a_3\overline{\Phi}_2(t) + a_4\overline{\Phi}_3(t) - 6\overline{\Phi}_2(t)\int_0^1 \left(\overline{K}_t''(1, s) + \overline{K}(1, s)\right)ds -$$

$$- 6\overline{\Phi}_3(t)\int_0^1 \overline{K}_t'(1, s)\,ds + 6\int_0^t \overline{K}(t, s)\,ds. \tag{58}$$

Теперь, используя (56), (57), из (58) получаем решение задачи (55) в окончательном виде

$$\overline{y}(t) = a_2(1 + 2t - t^2) + a_3(t^2 - 2t) + a_4(3t - t^2) + t^3 - 4t^2 + 5t. \tag{59}$$

Величина начального скачка определяется из (52):

$$\Delta_0 = \left[a_1\overline{J}_{10} + a_2\overline{J}_{20} - \left(a_3 - 6\int_0^1 (\overline{K}_t''(1,s) + \overline{K}(1,s))\,ds\right) + \left(a_4 - 6\int_0^1 \overline{K}_t'(1,s)\,ds\right)\right] =$$

$$= 1/2(a_1 - a_4 + 3) \neq 0, \qquad \Delta = 1/\alpha_{12}\overline{J}_{10} = a_1 - a_4 + 3.$$

Таким образом, условие 5 выполнено.

Однородное уравнение $L_\varepsilon y = 0$ имеет фундаментальную систему решений $y_1(t, \varepsilon) = 1$, $y_2(t, \varepsilon) = t$, $y_3(t, \varepsilon) = t^2/2$, $y_4(t, \varepsilon) = \exp(-t/\varepsilon)$, причем соответствующий вронскиан $W(t, \varepsilon) = -\varepsilon^{-3}\exp(-t/\varepsilon) \neq 0$. Определим функцию Коши $K(t, s, \varepsilon)$ по формуле (13):

$$K(t, s, \varepsilon) = \varepsilon\left(t^2/2 - ts + s^2/2 - \varepsilon(t - s) + \varepsilon^2 - \varepsilon^2\exp\left(-(t - s)/\varepsilon\right)\right). \tag{60}$$

Составим определитель $J(\varepsilon)$. Тогда при достаточно малых ε имеем

$$J(\varepsilon) = 1/2\varepsilon^{-2}(1 - \varepsilon + \varepsilon\exp(-1/\varepsilon)) \neq 0.$$

Построим функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = \overline{1, 4}$, с помощью формулы (25). Тогда

$$\Phi_1(t, \varepsilon) = \frac{1}{r(\varepsilon)}\left[\varepsilon^2(t^2 - 2t - 1) - e^{-1/\varepsilon}\left((1 + \varepsilon^2)(t^2 - 2t) + \varepsilon(t^2 - 3t)\right) + \varepsilon^2 e^{-t/\varepsilon}\right],$$

$$\Phi_2(t, \varepsilon) = -t^2 + 2t + 1, \qquad \Phi_3(t, \varepsilon) = t^2 - 2t, \tag{61}$$

$$\Phi_4(t, \varepsilon) = \frac{1}{r(\varepsilon)}\left[(3t - t^2)(1 - \varepsilon) + \varepsilon^2\left(1 + 2t - t^2 - e^{-t/\varepsilon}\right) + e^{-1/\varepsilon}(1 + \varepsilon^2)(t^2 - 2t)\right],$$

где $r(\varepsilon) = 1 - \varepsilon + \varepsilon\exp(-1/\varepsilon) \neq 0$. Легко убедиться, что функция Коши $K(t, s, \varepsilon)$ и граничные функции $\Phi_i(t, \varepsilon)$, $i = 1, 2, 3, 4$, также имеют перечисленные в пп. 3 – 4 свойства. Тогда в силу теоремы 1 для решения задачи (54) получим представление

$$y(t, \varepsilon) = a_1\Phi_1(t, \varepsilon) + a_2\Phi_2(t, \varepsilon) + a_3\Phi_3(t, \varepsilon) + a_4\Phi_4(t, \varepsilon) + \frac{6}{\varepsilon}\int_0^t K(t, s, \varepsilon)\,ds -$$

$$- \frac{6}{\varepsilon}\int_0^1 \left[\Phi_3(t, \varepsilon)\left(K_t''(1, s, \varepsilon) + K(1, s, \varepsilon)\right) + K_t'(1, s, \varepsilon)\Phi_4(t, \varepsilon)\right]ds. \tag{62}$$

Подставим (60), (61) в (62). Тогда решение задачи (54) примет вид

$$y(t,\varepsilon) = \frac{a_1}{r(\varepsilon)}\Big[\varepsilon^2(t^2-2t-1) - e^{-1/\varepsilon}\Big((1+\varepsilon^2)(t^2-2t) + \varepsilon(t^2-3t)\Big) + \varepsilon^2 e^{-t/\varepsilon}\Big] +$$

$$+ a_2(-t^2+2t+1) + a_3(t^2-2t) +$$

$$+ \frac{a_4}{r(\varepsilon)}\Big[(3t-t^2)(1-\varepsilon) + \varepsilon^2\Big(1+2t-t^2-e^{-t/\varepsilon}\Big) + e^{-1/\varepsilon}(1+\varepsilon^2)(t^2-2t)\Big] -$$

$$-(t^2-2t)\Big[7-9\varepsilon+6\varepsilon^2-6\varepsilon^3+6\varepsilon(1+\varepsilon^2)e^{-1/\varepsilon}\Big] - \Big(3-6\varepsilon+6\varepsilon^2\Big(1-e^{-1/\varepsilon}\Big)\Big)\times$$

$$\times\frac{1}{r(\varepsilon)}\Big[(3t-t^2)(1-\varepsilon) + \varepsilon^2\Big(1+2t-t^2-e^{-t/\varepsilon}\Big) + e^{-1/\varepsilon}(1+\varepsilon^2)(t^2-2t)\Big] +$$

$$+ t^3 + 6\varepsilon^3 e^{-t/\varepsilon} - 6\varepsilon^3 + 6\varepsilon^2 t - 3\varepsilon t^2. \qquad (63)$$

Из (53) будем иметь $y'''(0,\varepsilon) = O(1/\varepsilon)$.

Сравнивая (59) и (63), получаем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y(t,\varepsilon) = \bar{y}(t)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y'(t,\varepsilon) = \bar{y}'(t)$, $0 \le t \le 1$; $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y''(t,\varepsilon) = \bar{y}''(t)$, $0 < t \le 1$, причем $\Delta = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} y''(0,\varepsilon) - \bar{y}''(0) = a_1 - a_4 + 3$. Следовательно, задача (54) имеет начальный скачок второго порядка.

1. *Schlesinger L.* Uber asymptotische Darstellungen der Losungen linearer Differential systemeabe Funktionen eines Parametere // Math. Ann. – 1907. – **63**. – S. 207–300.
2. *Birkhoff G. D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – **9**. – P. 219–2311.
3. *Noaillon P.* Developpements asymptotiques dans les equations differentialles linears a parametre variable // Mém. Soc. roy. sci. Liège. – 1912. – **3**, № 11. – P. 197.
4. *Вишик М. И., Люстерник Л. А.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. – 1957. – **12**, № 5. – С. 3–122.
5. *Шабат А. Б.* Краевые задачи с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Там же. – 1962. – **17**, № 1. – С. 235–241.
6. *Вахромеев Ю. М., Корнев В. Ф.* О краевых задачах с малым параметром для обыкновенных линейных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1977. – **13**, № 7. – С. 1163–1170.
7. *Разумейко Б. Г.* О фундаментальной системе решений обыкновенного линейного дифференциального уравнения с малым параметром // Там же. – 1970. – **6**, № 8. – С. 1366–1377.
8. *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. – М.: Наука, 1973. – 272 с.
9. *Касымов К. А.* О задаче с начальным скачком для нелинейных систем дифференциальных уравнений, содержащих малый параметр // Докл. АН СССР. – 1968. – **179**, № 2. – С. 275–278.
10. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. – М.: Наука, 1981. – 400 с.

Получено 26.04.2002