УДК 517.5

Е. Ю. Леончик (Одес. нац. ун-т)

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ ИЗ ТЕОРИИ ПРИБЛИЖЕНИЯ*

We investigate one inequality of the theory of approximation. We obtain necessary and sufficient conditions for this inequality be true. We also present examples that demonstrate that the results obtained are final.

Досліджується одна нерівність з теорії наближення. Отримано необхідну та достатню умови, коли ця нерівність має місце, та наведено приклади, які свідчать про остаточність результатів.

1. Введение. Будем рассматривать функцию ψ, которая не убывает на интервале $(0; +\infty)$, и $\psi(0) = \psi(+0)$. В ряде работ (см., например, [1–4]) изучается вопрос о нахождении точной оценки сверху L_ψ-нормы разности непрерывной функции f и ее постоянной наилучшего приближения в пространстве L_{p+1}, $p \geq 0$. В частности, в [3, 4] рассматривается оценка вида

$$\|f - c_{p+1}(f)\|_\psi \leq \int_0^{t_2-t_1} \psi\left(\frac{1}{2}\omega(f,t)\right)dt, \quad t_1 < t_2, \tag{1}$$

где

$$\|f\|_\psi = \int_{t_1}^{t_2} \psi(|f(t)|)\,dt, \qquad \omega(f,t) = \sup_{t_1 \leq x', x'' \leq t_2, |x'-x''| \leq t} |f(x') - f(x'')|,$$

а постоянная c_{p+1} определяется равенством

$$\inf_{c\in\mathbb{R}} \int_{t_1}^{t_2} |f(t) - c|^{p+1} dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t) - c_{p+1}|^{p+1} dt.$$

Существование такой постоянной доказано в [1, с. 51].

В [4] (также см. [5, с. 74]) показано, что для произвольной непрерывной функции f оценку (1) при $p \geq 0$ гарантирует неравенство

$$x^p\psi(y) + y^p\psi(x) \leq (x^p + y^p)\psi\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y > 0. \tag{2}$$

С другой стороны, найдется такая непрерывная f, для которой (1) обращается в равенство.

Известно, что неравенство (2) выполняется, если $\psi(t) = t^r$, $t \geq 0$, при $r \in [0; 2p+1]$, т. е.

$$x^p y^r + y^p x^r \leq (x^p + y^p)\left(\frac{x+y}{2}\right)^r, \quad x, y > 0, \tag{3}$$

а для $r > 2p+1$ найдутся такие x, $y > 0$, для которых (3) неверно (см. теорему 1.1 из [5, с. 27], а также [3]). В частном случае $p = 1$ неравенство (2) принимает вид

$$x\psi(y) + y\psi(x) \leq (x+y)\psi\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y > 0. \tag{4}$$

Как показано в [4] (см. также [5, с. 90, 91]), достаточным условием для выпол-

* Частично поддержана Государственным фондом фундаментальных исследований Украины (проект Ф7/329-2001).

нения (4) является выпуклость вверх на $(0; +\infty)$ функции $\alpha_q(t) = t^{-q}\psi(t)$, $t > 0$, при $q \in \{0, 1, 2\}$. Если же $\alpha_3 \neq \text{const}$ не убывает и имеет непрерывную вторую производную, то неравенство (4), вообще говоря, не имеет места (см. теорему 2.5 из [5, с. 94], а также [4]).

Перепишем неравенство (2) в виде

$$x^p y^q \alpha_q(y) + y^p x^q \alpha_q(x) \le (x^p + y^p)\left(\frac{x+y}{2}\right)^q \alpha_q\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x, y > 0. \qquad (2')$$

В п. 2 данной работы доказано такое достаточное условие для выполнения $(2')$.

Теорема 1. *Пусть $p \ge 0$. Если при некотором $q \in [0; 2p]$ функция α_q выпукла вверх на $(0; +\infty)$, то выполняется неравенство $(2')$. В случае $q > 2p$ найдется такая неубывающая функция ψ^*, для которой $\alpha_q^*(t) = t^{-q}\psi^*(t)$ выпукла вверх на $(0; +\infty)$, но $(2')$, вообще говоря, не имеет места.*

Кроме того, получена следующая интегральная оценка функции ψ, вытекающая из (2).

Теорема 2. *Пусть $p \ge 0$ и для некоторой ψ выполнено неравенство* (2). *Тогда ψ абсолютно непрерывна на любом отрезке $[a; b] \subset [0; +\infty)$ и выполняется неравенство*

$$\psi(b) - \psi(a) \le 2(p+1)\left(\frac{1}{b}\int_0^b \psi(t)dt - \frac{1}{a}\int_0^a \psi(t)dt\right), \quad 0 < a < b, \qquad (5)$$

причем постоянную $2(p+1)$ справа, вообще говоря, уменьшить нельзя.

В п. 2 приведено следствие 1, которое в частном случае $p = 1$ показывает, что теорема 2.5 из [5, с. 94] справедлива без ограничения на дифференциальные свойства функции α_3.

2. Доказательства теорем. Доказательство теоремы 1 представляет собой естественное обобщение доказательств лемм 2.3 и 2.4 из работы [5, с. 90, 91]. Нам также понадобится следующее утверждение, которое доказывается аналогично теореме 5 из [6, с. 286].

Лемма 1. *Пусть функция θ неотрицательна и выпукла вверх на интервале $(0; +\infty)$. Тогда θ не убывает на $(0; +\infty)$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть найдутся такие $0 < x < y$, для которых $\theta(y) < \theta(x)$. В силу выпуклости вверх функции θ выполняется неравенство

$$\frac{t-y}{t-x}\theta(x) + \frac{y-x}{t-x}\theta(t) \le \theta(y), \quad t \ge y,$$

или, что то же самое,

$$\theta(t) \le t\frac{\theta(y) - \theta(x)}{y-x} + \frac{y\theta(x) - x\theta(y)}{y-x}, \quad t \ge y.$$

Поскольку $\theta(y) < \theta(x)$, найдется такое $t_0 \ge y$, для которого $\theta(t_0) < 0$. Это противоречит тому, что функция θ неотрицательна.

Лемма доказана.

***Доказательство теоремы* 1.** Пусть $y \ge x > 0$. С учетом выпуклости вверх функции α_q и неравенства (3) достаточно показать, что

$$x^p y^q \alpha_q(y) + y^p x^q \alpha_q(x) \le (x^p y^q + y^p x^q)\frac{\alpha_q(x) + \alpha_q(y)}{2}, \quad 0 < x \le y.$$

Нетрудно убедиться в том, что это неравенство эквивалентно следующему:

$$x^p y^q(\alpha_q(y) - \alpha_q(x)) \le y^p x^q(\alpha_q(y) - \alpha_q(x)), \quad 0 < x \le y. \tag{6}$$

Поскольку $(y/x)^q \le (y/x)^p$ при $q \le p$ и в силу леммы 1 $\alpha_q(y) \ge \alpha_q(x)$, неравенство (6) выполняется. Значит, при $q \in [0; p]$ неравенство (2) доказано.

Рассмотрим случай $q \in [p; 2p]$. Заметим, что если функция α_q неотрицательна и выпукла вверх, то $t^{-1}\alpha_q(t)$ не возрастает на $(0; +\infty)$ (этот факт доказывается аналогично лемме из [6, с. 476]). Используя монотонность функции $t^{-1}\alpha_q(t)$, нетрудно получить, что при $q \ge p$ выполняется неравенство

$$x^{q-p}\alpha_q(x) + y^{q-p}\alpha_q(y) \le \frac{x^{q-p+1} + y^{q-p+1}}{x+y}(\alpha_q(x) + \alpha_q(y)), \quad x,\ y \ge 0.$$

Отсюда, учитывая выпуклость вверх функции α_q, находим

$$x^p y^q \alpha_q(y) + y^p x^q \alpha_q(x) \le (xy)^p \frac{x^{q-p+1} + y^{q-p+1}}{x+y}(\alpha_q(x) + \alpha_q(y)) \le$$

$$\le 2\frac{x^p y^{q+1} + y^p x^{q+1}}{x+y}\alpha_q\left(\frac{x+y}{2}\right), \quad x,\ y \ge 0. \tag{7}$$

В силу (3) имеем

$$x^p y^{q+1} + x^{q+1} y^p \le (x^p + y^p)\left(\frac{x+y}{2}\right)^{q+1}, \quad x,\ y \ge 0.$$

Используя это неравенство, из (7) непосредственно получаем (2). Таким образом, доказано первое утверждение теоремы 1.

Пусть теперь $q > 2p$. Положим $\psi^*(t) = t^{q+1-\varepsilon}$, $t \ge 0$, где $0 < \varepsilon < \min(q - 2p; 1)$. Тогда функция $\alpha_q^* = t^{-q}\psi^*(t)$ выпукла вверх. С другой стороны, так как $q + 1 - \varepsilon > 2p + 1$, то (2) не выполнено при некоторых x, $y > 0$ (см. теорему 1.1 из [5, с. 27], а также [3]). Следовательно, для α_q^* неравенство $(2')$, вообще говоря, не верно.

Теорема 1 доказана.

Для доказательства теоремы 2 нам понадобятся две вспомогательные леммы. Следующее утверждение без доказательства приведено в [6, с. 256].

Лемма 2. *Пусть непрерывная функция ψ строго возрастает на отрезке $[a; b]$. Если образ $\psi(E)$ множества $E = \{x \in [a; b]: \psi'(x) = +\infty\}$ имеет лебегову меру 0, то ψ абсолютно непрерывна на $[a; b]$.*

Доказательство. Согласно теореме Банаха–Зарецкого [6, с. 232], для доказательства леммы достаточно показать, что для произвольного множества $e \subset [a; b]$, имеющего лебегову меру $|e| = 0$, справедливо равенство $|\psi(e)| = 0$.

Пусть $e \subset [a; b]$, $|e| = 0$. Обозначим через e_k подмножество таких точек $x \in e$, для которых существует производное число, не превышающее k. Ясно, что $e \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} e_k \cup E$ и $|\psi(e)| \le \bigcup_{k=1}^{\infty}|\psi(e_k)| + |\psi(E)|$. Как следует из леммы 2 в [6, с. 196], $|\psi(e_k)| \le k|e_k| = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Значит, $|\psi(e)| = 0$.

Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $p \ge 0$ и для непрерывной $\psi \not\equiv \mathrm{const}$ выполнено (2). Тогда либо ψ строго возрастает на $[0; \infty)$, либо найдется такое $c \ge 0$, что ψ строго возрастает на $[0; c]$ и $\psi(t) \equiv \psi(c)$ для всех $t \ge c$.*

Доказательство. Предположим, что существует такой отрезок $[c; c+\Delta]$, c, $\Delta > 0$, на котором $\psi(t) \equiv \psi(c)$, $t \in [c; c+\Delta]$. В неравенстве (2) полагаем $x = c$ и $y = c+2\Delta > d$. Тогда

$$c^p(\psi(c+2\Delta) - \psi(c+\Delta)) \le (c+2\Delta)^p(\psi(c+\Delta) - \psi(c)), \quad c,\ \Delta > 0.$$

Отсюда $\psi(c+2\Delta) - \psi(c+\Delta) \le 0$. Значит, $\psi(c+2\Delta) = \psi(c+\Delta) = \psi(c)$.

Аналогичным образом, рассматривая отрезок $[c+\Delta; c+2\Delta]$, находим $\psi(c+3\Delta) = \psi(c+2\Delta) = \psi(c)$. Используя индукцию, имеем $\psi(c+k\Delta) = \psi(c)$, $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, если функция ψ имеет отрезок постоянства, то в силу монотонности только один вида $[c; +\infty)$, $c \ge 0$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. Сначала докажем, что ψ непрерывна в произвольной точке $t \in (0; +\infty)$. Для этого в неравенстве (2) положим $x = t - 2h$ и $y = t + h$, где $0 < 2h < t$. Имеем

$$(t-2h)^p\psi(t+h) + (t+h)^p\psi(t-2h) \le ((t-2h)^p + (t+h)^p)\psi\left(t - \frac{h}{2}\right), \quad 0 < 2h < t.$$

Отсюда при $h \to +0$ получаем

$$t^p\psi(t+0) + t^p\psi(t-0) \le 2t^p\psi(t-0), \quad t > 0.$$

Следовательно, $\psi(t+0) \le \psi(t-0)$. С другой стороны, из монотонности ψ имеем $\psi(t-0) \le \psi(t) \le \psi(t+0)$. Таким образом, функция ψ непрерывна в точке $t \in (0; +\infty)$.

Докажем (5). Для $0 < h < t$, полагая в (2) $x = t - h$ и $y = t + h$, получаем

$$(t-h)^p\psi(t+h) + (t+h)^p\psi(t-h) \le ((t+h)^p + (t-h)^p)\psi(t).$$

Разделив это неравенство на t^p, будем иметь

$$\left(1 - p\frac{h}{t} + S_1(t,h)\right)\psi(t+h) + \left(1 + p\frac{h}{t} + S_2(t,h)\right)\psi(t-h) \le$$

$$\le (2 + S_1(t,h) + S_2(t,h))\psi(t), \quad 0 < h < t,$$

где

$$S_i(t,h) = \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^{ik}\frac{p(p-1)\ldots(p-k+1)}{k!}\left(\frac{h}{t}\right)^k, \quad i = 1, 2.$$

Отсюда

$$t(\psi(t+h) - 2\psi(t) + \psi(t-h)) + tS_1(t,h)(\psi(t+h) - \psi(t)) \le$$

$$\le ph(\psi(t+h) - \psi(t-h)) + tS_2(t,h)(\psi(t) - \psi(t-h)), \quad 0 < h < t. \tag{8}$$

Обозначим

$$A_1(y,z,h) = \int_y^z tS_1(t,h)(\psi(t+h) - \psi(t))\,dt,$$

$$A_2(y,z,h) = \int_y^z tS_2(t,h)(\psi(t) - \psi(t-h))\,dt.$$

Заметим, что для любых фиксированных $0 < y < z$ при $h \to +0$

$$\frac{1}{h^2}|A_i(y,z,h)| \le \sum_{k=2}^{\infty}\frac{|p(p-1)\dots(p-k+1)|}{k!}\frac{h^{k-2}}{y^{k-1}}\int_y^z|\psi(t\pm h)-\psi(t)|dt \le$$

$$\le \frac{1}{y}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|p(p-1)\dots(p-k+1)|}{2^{k-2}k!}\int_y^z|\psi(t\pm h)-\psi(t)|dt \to 0, \quad i=1,2. \tag{9}$$

Интегрируя (8) по t от y до z, получаем

$$\int_{y+h}^{z+h}t\psi(t)dt - 2\int_y^z t\psi(t)dt + \int_{y-h}^{z-h}t\psi(t)dt + A_1(y,z,h) \le$$

$$\le (p+1)\left(\int_{z-h}^{z+h}\psi(t)dt - \int_{y-h}^{y+h}\psi(t)dt\right) + A_2(y,z,h), \quad 0<y<z. \tag{10}$$

Пусть $\varphi(x)=x\psi(x)$, $\Phi(x)=\int_0^x\varphi(t)dt$ и $\Delta_2\Phi(x,h)=\Phi(x+h)-2\Phi(x)+\Phi(x-h)$, $0<h<x$. Здесь для любого $x>0$ [6, с. 280]

$$\frac{\Delta_2\Phi(x,h)}{h^2} = \frac{\Phi'(x+\theta h)-\Phi'(x-\theta h)}{2\theta h} = \frac{f(x+\theta h)-f(x-\theta h)}{2\theta h}, \tag{11}$$

где $\theta=\theta(x,h)\in(0;1)$.

Обозначим $E_1=\{x>0:\psi'(x)=+\infty\}$, а E_2 — множество точек дифференцируемости функции ψ. Докажем, что $E_1=\varnothing$. Предположим противное. Пусть существует точка $x_1\in E_1$. Тогда найдется $x_2\in E_2\cap(0;x_1)$, так как почти каждая точка из $(0;+\infty)$ принадлежит E_2 [6, с. 199]. Как следует из (11), если $x_1\in E_1$, и $x_2\in E_2$, то

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_2\Phi(x_1,h)}{h^2} = +\infty, \qquad \lim_{h\to+0}\frac{\Delta_2\Phi(x_2,h)}{h^2} = x_2\psi'(x_2)+\psi(x_2). \tag{12}$$

Для любых y, $z\in E_1\cup E_2$ с учетом (9) и непрерывности ψ (10) принимает вид

$$\lim_{h\to+0}\frac{\Delta_2\Phi(z,h)}{h^2} - \lim_{h\to+0}\frac{\Delta_2\Phi(y,h)}{h^2} \le 2(p+1)(\psi(z)-\psi(y)), \quad 0<y<z. \tag{13}$$

Полагая в (13) $z=x_1$ и $y=x_2$, в силу равенств (12) получаем противоречие, поскольку левая часть (13) бесконечна, а правая конечна.

Далее, пусть произвольный отрезок $[a;b]\subset[0;+\infty)$. Согласно лемме 3 функция ψ либо строго возрастает на $[a;b]$, либо найдется такое $c\ge a$, что ψ строго возрастает на $[a;c]$ и $\psi(t)\equiv\psi(c)$, $t\ge c$. В обоих случаях, так как $E_1=\varnothing$, из леммы 2 следует, что ψ абсолютно непрерывна на $[a;b]$.

Для y, $z\in E_2$, используя (12), запишем (13) в виде

$$z\psi'(z) - y\psi'(y) \le (2p+1)(\psi(z)-\psi(y)), \quad 0<y<z.$$

Интегрируя это неравенство по y от 0 до a, имеем

$$az\psi'(z) - \int_0^a y\psi'(y)dy \le (2p+1)\left(a\psi(z)-\int_0^a\psi(y)dy\right), \quad z>a.$$

Снова интегрируем полученное неравенство по z от a до b:

$$a\int_a^b z\psi'(z)dz - (b-a)\int_0^a y\psi'(y)dy \le$$

$$\le (2p+1)\left(a\int_a^b \psi(z)dz - (b-a)\int_0^a \psi(y)dy\right), \quad 0<a<b.$$

Интегрируя это неравенство по частям, непосредственно получаем (5).

Осталось показать, что постоянную $2(p+1)$ справа в (5), вообще говоря, уменьшить нельзя. Для этого заметим, что для непрерывной функции ψ при $a \to +0$ неравенство (5) принимает вид

$$b\psi(b) \le 2(p+1)\int_0^b \psi(t)dt, \quad b>0. \tag{14}$$

Обозначим $\psi_0(t) = t^{2p+1}$, $t>0$. Для функции ψ_0 неравенство (14) обращается в равенство и согласно (3) справедливо (2).

Теорема 2 доказана.

***Следствие* 1.** *Пусть* $p \ge 0$ *и функция* $\alpha_{2p+1}(t) = t^{-(2p+1)}\psi(t) \not\equiv \text{const}$ *неотрицательна и не убывает. Тогда* (2), *вообще говоря, не имеет места.*

Доказательство. Выберем такое $t_0>0$, что $\alpha_{2p+1}(t_0/2) < \alpha_{2p+1}(t_0)$. Тогда

$$2(p+1)\int_0^{t_0}\psi(s)ds \le 2(p+1)\left(\alpha_{2p+1}(t_0/2)\int_0^{t_0/2} s^{2p+1}ds + \alpha_{2p+1}(t_0)\int_{t_0/2}^{t_0} s^{2p+1}ds\right) <$$

$$< 2(p+1)\alpha_{2p+1}(t_0)\int_0^{t_0} s^{2p+1}ds = \alpha_{2p+1}(t_0)t_0^{2(p+1)} = t_0\psi(t_0).$$

Значит, для функции ψ не выполнено (14), и, следовательно, неравенство (2), вообще говоря, не имеет места.

Автор глубоко благодарен А. А. Кореновскому за то, что он обратил его внимание на рассматриваемую задачу, а также за ценные советы и замечания.

1. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. – М.: Наука, 1987. – 424 с.
2. *Сторчай В. Ф.* Точные оценки для норм дифференцируемых периодических функций в метрике L_2 // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 6. – С. 835–840.
3. *Tchernitskaya O. V.* Approximation of continuous functions by step functions in integral metrics // East J. Approxim. – 1999. – **5**, № 4. – P. 403–418.
4. *Черницкая О.В.* Об аппроксимации непрерывных функций кусочно-постоянными в интегральных метриках // Вісн. Дніпропетров. ун-ту. Математика. – 1998. – Вип. 4. – С. 128–138.
5. *Черницька О. В.* Апроксимація функцій класів H^ω у просторах з інтегральною метрикою: Дис. … канд. фіз.-мат. наук. – Дніпропетровськ, 2001. – 119 с.
6. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Получено 12.03.2002