УДК 517.515

Ю. М. Березанський, В. А. Теско (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРОСТОРИ ОСНОВНИХ І УЗАГАЛЬНЕНИХ ФУНКЦІЙ, ПОВ'ЯЗАНІ З УЗАГАЛЬНЕНИМ ЗСУВОМ*

We present principal results on the generalization of white noise analysis that are obtained during recent years and is related to a family of generalized translation operators.

Наведено основні результати останніх років щодо узагальнення аналізу білого шуму, пов'язаного з сім'єю операторів узагальненого зсуву.

0. Вступ. Витоками сучасної теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних, в основному, були дві роботи: Ю. М. Березанського і Ю. С. Самойленка 1973 р. [1] та Т. Хіди 1975 р. [2]. У першій із них простори основних і узагальнених функцій будувалися як нескінченні тензорні добутки одновимірних просторів. У другій роботі фактично застосовувався класичний підхід до побудови теорії узагальнених функцій, але всі функції, що розглядались, були функціями точки нескінченновимірного простору, на якому було задано гауссівську міру, що відігравала таку ж роль, як і лебегова міра в класичній теорії узагальнених функцій.

Ми не будемо детально зупинятися на початковому етапі розвитку теорії цих узагальнених функцій, його детально висвітлено в книгах [3 – 7] та статті [1]. Зазначимо лише, що підхід Т. Хіди можна інтерпретувати як вихідне оснащення фоківського простору і застосування до цього оснащення ізоморфізму (ізометрії) Вінера – Іто – Сігала, що переводить це оснащення в необхідне нам оснащення простору L^2 за гауссівською мірою.

Зауважимо, що в 1975 р. Ю. Г. Кондратьєв [8] на основі підходу з [1] започаткував детальну побудову теорії узагальнених функцій на нескінченновимірному просторі з гауссівською мірою. Розвинуту теорію таких функцій, яка включала і встановлення зв'язків між підходами з [1] і [2], побудували Ю. Г. Кондратьєв і Ю. С. Самойленко в 1975 – 1980 рр. у роботах [8 – 15] (значна частина цих результатів потім перевідкривалась на основі підходу Т. Хіди [2]). Але разом з тим підхід Т. Хіди, як початкове оснащення фоківського простору, виявився більш зручним і подальші дослідження в теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних часто проводились за такою схемою: спочатку будувалось те чи інше оснащення фоківського простору, а потім до нього застосовувався ізоморфізм Вінера – Іто – Сігала (або інший — див. нижче) і отримувалось відповідне оснащення простору L^2.

Подальший розвиток загальної теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних найпростіше пояснити на модельному прикладі, коли роль простору Фока $\mathcal{F}(H)$, побудованого за дійсним гільбертовим простором H, відіграє звичайний простір l^2 послідовностей $f = (f_j)_{j=0}^{\infty}$, $f_j \in \mathbb{C}^1$, $\sum_{j=0}^{\infty} |f_j|^2 < \infty$, тобто коли $H = \mathbb{R}^1$, $\mathcal{F}(H) = l^2$. Тепер замість теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних будемо отримувати теорію таких функцій від однієї змінної

* Виконано при частковій підтримці INTAS (проект 00-257) і DFG (проект 436 UKR 113/61).

© Ю. М. БЕРЕЗАНСЬКИЙ, В. А. ТЕСКО, 2003

$x \in \mathbb{R}^1$, але пов'язаної зі спаренням, що задається інтегруванням не за лебеговою мірою dx, а за гауссівською мірою на осі $\mathbb{R}^1$:

$$dg(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} dx, \quad x \in \mathbb{R}^1. \tag{0.1}$$

Роль ізоморфізму I Вінера–Іто–Сігала відіграє відображення

$$l^2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (If)(x) = \widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n H_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^1, dg(x)), \tag{0.2}$$

де H_n — ортонормовані поліноми Ерміта (тобто f_n є коефіцієнтом Фур'є функції $\widehat{f}(x)$ при розкладі за поліномами Ерміта). Зауважимо, що у випадку нескінченного числа змінних узагальнення міри типу (0.1) є гауссівською мірою на гільбертовому просторі H, а (0.2) — вказаний ізоморфізм.

Перший цикл робіт у цьому напрямку був пов'язаний з вибором того чи іншого оснащення фоківського простору $\mathcal{F}(H)$. Оснащення для розглядуваного модельного випадку $\mathcal{F}(H) = l^2$ означає побудову ланцюжків типу

$$l^2(\gamma^{-1}) \supset l^2 \supset l^2(\gamma), \tag{0.3}$$

де $\gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, $\gamma_n \geq 1$, — деяка вага; тобто $l^2(\gamma)$ — простір l^2 з вагою γ:

$$\|f\|_{l^2(\gamma)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \gamma_n, \qquad \|f\|_{l^2(\gamma^{-1})}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |f_n|^2 \gamma_n^{-1}, \quad l^2(1) = l^2. \tag{0.4}$$

У цьому циклі важливу роль відіграли роботи Ю. Г. Кондратьєва, П. Локерта і Л. Штрайта [13, 16], після яких стало зрозуміло, що для властивостей просторів основних і узагальнених функцій важливе значення має вага типу

$$\gamma_n = n!, \qquad n \in \mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}. \tag{0.5}$$

У цьому випадку простори основних функцій складаються з аналітичних функцій, мають низку важливих властивостей і досить вузькі. Тим самим спряжені простори широкі і співвідношення в них мають загальний характер. Згодом простори основних і узагальнених функцій нескінченного числа змінних, побудовані за вагою типу (0.5) (в іншій інтерпретації — за вагою типу $(n!)^2$), отримали назву просторів Кондратьєва.

Другий цикл робіт полягає (з огляду на вказаний модельний випадок) в заміні в ізоморфізмі (0.2) поліномів Ерміта $H_n(x)$ на ортонормовані поліноми $P_n(x)$ за довільною мірою $d\rho(x)$ на $\mathbb{R}^1$. Інакше кажучи, ізоморфізм (0.2) є перетворенням Фур'є за власними узагальненими векторами самоспряженої якобієвої матриці J (напівнескінченної), для якої $d\rho(x)$ є її спектральною мірою, а $P(x) = (P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ — її узагальнений власний вектор з власним числом $x \in \mathbb{R}^1$. В результаті ми отримуємо теорію узагальнених функцій від $x \in \mathbb{R}^1$ зі спаренням, яке задається мірою $d\rho(x)$ замість лебегової міри dx, а ізоморфізм (0.2) має вигляд

$$l^2 \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (If)(x) = \widehat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n P_n(x) \in L^2(\mathbb{R}^1, d\rho(x)). \tag{0.6}$$

У випадку нескінченного числа змінних потрібно розглядати замість J сім'ю $J = (J(\varphi))_{\varphi \in H}$ комутуючих самоспряжених операторів $J(\varphi)$ у фоківському просторі $\mathcal{F}(H)$, які мають якобієву структуру — так зване якобієве поле. Тоді роль відображення типу (0.2), тобто відповідного ізоморфізму Вінера – Іто – Сігала, відіграє перетворення Фур'є за узагальненими спільними власними векторами поля J, а роль міри на H, яка задає спарення, — спектральна міра поля J (в дійсності замість H потрібно брати спряжений простір Φ' до деякого дійсного ядерного простору Φ).

У класичному випадку простору Т. Хіди полем J буде вільне поле, спектральною мірою $d\rho(x)$, $x \in H$, — гауссівська міра на H, а відповідне перетворення Фур'є і є ізоморфізмом Вінера – Іто – Сігала.

Вказаний напрямок — це так званий спектральний (або ортогональний) підхід до побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Він був запропонований Ю. М. Березанським в 1991 р. [17] і розвивався, зокрема, в роботах Ю. М. Березанського, В. О. Лівінського, Є. В. Литвинова, Ю. Г. Кондратьєва, Л. Штрайта, Г. Ф. Уса, Ж. Да-Сільви, Т. Куни, М. Ж. Олівейри як в загальній ситуації, так і для конкретних прикладів якобієвих полів: класичного гауссівського (тобто вільного), пуассонівського, гамма (див., наприклад, [18 – 24]). Тут потрібно відмітити, що по суті такий підхід для пуассонівського поля був детально розвинутий Й. Іто та І. Кубо ще в 1988 р. [25].

Третій цикл робіт — це так званий біортогональний підхід, який бере початок з роботи Ю. Л. Далецького 1991 р. [26]. У розглядуваному модельному випадку функцій на $\mathbb{R}^1$ він полягає в тому, що за заданою ймовірнісною мірою $d\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^1$, яка претендує на міру, що задає спарення (точніше, дія узагальненої функції на основну задається спарюванням, побудованим через інтегрування за даною мірою), ми шукаємо не ортонормовану систему поліномів $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ (що, як правило, дуже складно), а біортогональну систему $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$, $(Q_n(x))_{n=0}^{\infty}$, де

$$\int_{\mathbb{R}^1} P_n(x)\overline{Q_m(x)}d\rho(x) = \delta_{n,m}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{0.7}$$

Така система задає два відображення типу (0.6): з $P_n(x)$ і $Q_n(x)$ замість $P_n(x)$. Завдяки біортогональності (0.7) ці відображення спряжені в певному сенсі і образами першого будуть основні функції, що входять в $L^2(\mathbb{R}^1, d\rho(x))$, а другого — узагальнені функції з більш широкого, ніж $L^2(\mathbb{R}^1, d\rho(x))$, простору.

Як правило, біортогональна система (0.7) не довільна, а будується певним чином. Так, у випадку, пов'язаному з узагальненням класичної ситуації (0.1), (0.2), поліноми $P_n(x)$ вводяться як коефіцієнти розкладу за комплексним параметром λ породжуючої функції

$$\frac{e^{\lambda x}}{\widehat{\rho}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} P_n(x), \tag{0.8}$$

де $\widehat{\rho}(\lambda)$ — перетворення Лапласа міри $d\rho(x)$:

$$\widehat{\rho}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^1} e^{\lambda x} d\rho(x). \tag{0.9}$$

При цьому припускається, що міра $d\rho(x)$ така, що для неї перетворення (0.9) існує і аналітичне для $\lambda \in \mathbb{C}^1$ з деякого околу 0. Оскільки $\widehat{\rho}(0) = 1$, то $1/\widehat{\rho}(\lambda)$

знову є аналітичною функцією в деякому (можливо, меншому) околі 0, і тому в цьому околі існує розклад (0.8), причому коефіцієнти $P_n(x)$, як неважко зрозуміти, будуть поліномами від $x \in \mathbb{R}^1$.

Описана процедура вводить послідовність поліномів $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$. Біортогональну до неї послідовність $(Q_n(x))_{n=0}^{\infty}$ отримаємо за допомогою формули

$$Q_n(x) = ((L^+)^n 1)(x), \qquad x \in \mathbb{R}^1, \quad n \in \mathbb{N}_0, \tag{0.10}$$

де L^+ — оператор, спряжений у сенсі простору $L^2(\mathbb{R}^1, d\rho(x))$ до оператора $f(x) \mapsto (Lf)(x) = f'(x)$.

Зазначимо, що формула (0.10) вводить $Q_n(x)$ як звичайні функції лише у випадку міри $d\rho(x)$, абсолютно неперервної відносно міри Лебега з нескінченно диференційовною похідною. У загальному випадку $Q_n(x)$ потрібно розуміти як узагальнену функцію; ці функції і складають базис у відповідному просторі узагальнених функцій.

Відмітимо, що у випадку, коли $d\rho(x)$ є гауссівською мірою (0.1), розклад (0.8) визначає поліноми Ерміта $H_n(x) = P_n(x)$, а поліноми $Q_n(x)$ (0.10) з точністю до сталого множника збігаються з $P_n(x)$. Це — добре відомі формули аналізу. Таким чином, у цьому випадку ми приходимо до класичної ортогональної побудови просторів основних і узагальнених функцій за гауссівською мірою і поліномами Ерміта.

Побудова за цією схемою теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних належить С. Альбеверіо, Ю. Л. Далецькому, Ю. Г. Кондратьєву, Л. Штрайту, В. Вестеркампу, Ж. Яну і Ж. Да-Сільві [27–30]. При цьому відповідні нескінченновимірні „поліноми" $P_n(x)$ визначаються з розкладу типу (0.8):

$$\frac{e^{\langle \lambda, x \rangle}}{\widehat{\rho}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, P_n(x) \rangle, \tag{0.11}$$

в якому λ, x — вектори відповідно з позитивного та негативного нескінченновимірних фіксованих просторів з дійсним спаренням $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Вага, що визначала характер простору основних функцій (натягнутого на $P_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$), вибиралась типу (0.5), тобто будувались відповідні простори Кондратьєва. При цьому, оскільки оператору знищення в l^2, тобто зсуву $(f_0, f_1, f_2, \ldots) \mapsto$ $\mapsto (f_1, f_2, \ldots)$, має відповідати знищення в термінах змінної $x \in \mathbb{R}^1$, тобто похідна d/dx, коефіцієнти перераховуються і завдяки факторіалу $n!$ у розкладі (0.8) мають порядок $(n!)^2$.

Зауважимо, що коли $P_n(x)$ з (0.8) або (0.11) утворюють ортогональну систему, то відповідна ортогональна теорія є частинним випадком цієї „біортогональної" теорії.

Відмітимо дві обставини. Так, при розгляді прикладів цієї теорії (зокрема, просторів, пов'язаних з пуассонівською мірою) стало зрозуміло, що потрібно розглядати більш загальні розклади, ніж (0.8), (0.11), в яких $e^{\lambda x}$ замінено на $e^{\alpha(\lambda) x}$, де $\alpha(\lambda)$ — фіксована аналітична функція змінної $\lambda \in \mathbb{C}^1$. Відповідна теорія була систематично побудована М. О. Качановським і Г. Ф. Усом в 1996–1998 рр. [31–35]. Більш того, при цій побудові виявилось, що замість вихідної функції e^z, що фігурує в побудовах, основаних на (0.8), (0.11), можна використовувати довільну аналітичну функцію $e(z)$. Поліноми $P_n(x)$ будуються з використанням розкладів типу (0.8) для функції $\gamma(\lambda)e(\alpha(\lambda)x)$ замість $e^{\lambda x}/\widehat{\rho}(\lambda)$; тут $\alpha(\lambda)$ і $\gamma(\lambda)$ — фіксовані аналітичні в околі нуля функції від $\lambda \in \mathbb{C}^1$.

Друга обставина, яка стала зрозумілою при аналізі біортогональної теорії, полягає в тому, що всі її результати визначаються груповими властивостями функції $\mathbb{R}^1 \ni x \mapsto e^{\lambda x}$ — функції, що є характером з індексом λ групи $\mathbb{R}^1 \ni x$ (відносно додавання). Це дало змогу узагальнити всі результати біортогональної теорії на випадок, коли в розкладах типу (0.8), (0.11) замість $e^{\lambda x}$ фігурує характер $\chi_\lambda(x)$ комутативної гіпергрупи (або, в іншій термінології, гіперкомплексної системи). Тепер x змінюється по базису Q гіпергрупи, міра $d\rho(x)$ задана на цьому базисі. Ця обставина дала змогу Ю. М. Березанському і Ю. Г. Кондратьєву в 1995 – 1998 рр. побудувати узагальнення біортогональної теорії на комутативні гіпергрупи і розглянути кілька прикладів гіпергруп [36 – 45]. Більш того, при цьому виявилось, що фактично використовуються лише декілька аксіом теорії гіпергруп, так що замість гіпергрупи можна розглядати певну сім'ю операторів узагальненого зсуву з простими властивостями. При такому узагальненні стало зрозуміло, що велика кількість співвідношень із книг [3 – 6], записаних для гауссівського випадку, має загальний характер з прозорим змістом.

Дану роботу присвячено систематичному викладу основних положень саме такої теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних. Виклад формально незалежний від попередніх статей і відповідним чином модернізований. Через брак місця не наводяться важливі приклади цієї теорії (за винятком деяких ілюстративних); це буде зроблено в іншій роботі. Ми використовуємо термінологію і ряд фактів, викладених у підручнику [46].

У наведеному вище короткому огляді побудови теорії узагальнених функцій нескінченного числа змінних ми не торкалися застосувань цієї теорії до задач математичної фізики, теорії випадкових процесів і стохастичних рівнянь. Огляд застосувань привів би до непомірного збільшення об'єму статті. Деякі з таких застосувань описано в книгах [3 – 7].

З огляду на те, що в роботі досить часто доводиться встановлювати вкладення одного топологічного простору в інший, доречно нагадати добре відомі факти, пов'язані з цим.

Нехай E_1 і E_2 — лінійні топологічні простори. *Лінійний неперервний оператор* $O : E_2 \to E_1$ *назвемо оператором вкладення простору* E_2 *у простір* E_1, *якщо ядро*

$$\operatorname{Ker}(O) := \{f \in E_2 \mid Of = 0 \in E_1\} = \{0\}$$

(тобто відображення $E_2 \ni f \mapsto Of \in E_1$ *— ін'єктивне).*

У випадку, коли O є оператором вкладення простору E_2 у простір E_1, ототожнивши E_2 з областю значення $\operatorname{Ran}(O)$, можемо вважати, що $E_2 \subset E_1$. При такому ототожненні будемо говорити, що простір E_2 неперервно вкладається у простір E_1 (оператором вкладення O), і позначатимемо $E_2 \hookrightarrow E_1$.

Для банахових просторів ми легко отримаємо таке твердження.

Твердження 0.1. *Нехай* E_1 *і* E_2 *— банахові простори з нормами* $\|\cdot\|_{E_1}$ *і* $\|\cdot\|_{E_2}$ *відповідно. Лінійний оператор* $O : E_2 \to E_1$ *є оператором вкладення простору* E_2 *у простір* E_1 *тоді і лише тоді, коли для деякого* $c > 0$

$$\|Of\|_{E_1} \le c\|f\|_{E_2} \quad \forall f \in E_2,$$

і з того, що $\|Of\|_{E_1} = 0$ $(f \in E_2)$, *випливає* $\|f\|_{E_2} = 0$.

***Зауваження* 0.1.** Нехай E_1 і E_2 — банахові простори. Позначимо через $\mathcal{P}_1$ і $\mathcal{P}_2$ лінійні множини, щільні в E_1 і E_2 відповідно. Припустимо, що існує лінійний оператор

$$E_2 \supset \mathcal{P}_2 \ni \varphi \mapsto O\varphi = \widetilde{\varphi} \in \mathcal{P}_1 \subset E_1 \tag{0.12}$$

такий, що

$$\|O\varphi\|_{E_1} \le c\|\varphi\|_{E_2} \quad \text{для деякого} \quad c > 0 \quad \text{і} \quad \forall \varphi \in \mathcal{P}_2,$$

і для довільної фундаментальної за нормою $\|\cdot\|_{E_2}$ послідовності $(\varphi_n)_{n=0}^{\infty}$, $\varphi_n \in \in \mathcal{P}_2$, збіжність $O\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ в топології простору E_1 приводить до збіжності $\varphi_n \to 0$ при $n \to \infty$ в топології простору E_2.

Тоді оператор, що є продовженням за неперервністю оператора O (0.12) (ми зберігаємо позначення O для продовження), є оператором вкладення простору E_2 у простір E_1. Зрозуміло, що якщо $\operatorname{Ran}(O) = \mathcal{P}_1$, то вкладення простору E_2 у простір E_1 (оператором вкладення O) є щільним.

1. Ядерні ланцюжки. Розглянемо фіксований ланцюжок

$$\mathcal{N}' \supset \ldots \supset N_{-p} \supset \ldots \supset N_0 \supset \ldots \supset N_p \supset \ldots \supset \mathcal{N}, \tag{1.1}$$

$$\mathcal{N} := \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_p = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} N_p, \quad \mathcal{N}' := \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_{-p} = \bigcup_{p\in\mathbb{N}} N_{-p},$$

дійсних гільбертових сепарабельних просторів зі спарюванням $(\cdot,\cdot)_{N_0} =: \langle\cdot,\cdot\rangle$ відносно нульового простору N_0, де $N_{-p} := (N_p)'$. Ланцюжок припускається ядерним, тобто ядерною припускається проективна границя $\mathcal{N}$. Завжди *припускається, що* $\|\cdot\|_{N_0} \le \|\cdot\|_{N_1} \le \ldots$, тому $\ldots \le \|\cdot\|_{N_{-1}} \le \|\cdot\|_{N_0}$, *і вкладення* $N_2 \hookrightarrow N_1$, $N_3 \hookrightarrow N_2$ *квазіядерні* (тобто Гільберта–Шмідта; норму Гільберта–Шмідта будемо позначати $\|\cdot\|_{HS}$). Скрізь будемо використовувати позначення

$$\mathbb{Z} := \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\},$$

$$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, \ldots\}, \quad \mathbb{N}_1 := \mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}, \quad \ldots, \quad \mathbb{N}_p := \{p, p+1, \ldots\}.$$

Взявши симетричні тензорні степені $\hat{\otimes}$ просторів ланцюжка (1.1), побудуємо при кожному $n \in \mathbb{N}_0$ ядерний ланцюжок

$$\begin{gathered}(\mathcal{N}^{\hat{\otimes}n})' \supset \ldots \supset N_{-p}^{\hat{\otimes}n} \supset \ldots \supset N_0^{\hat{\otimes}n} \supset \ldots \supset N_p^{\hat{\otimes}n} \supset \ldots \supset \mathcal{N}^{\hat{\otimes}n}, \\ \mathcal{N}^{\hat{\otimes}n} := \operatorname*{pr\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_p^{\hat{\otimes}n}, \quad (\mathcal{N}^{\hat{\otimes}n})' := \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}} N_{-p}^{\hat{\otimes}n}.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Спарювання в (1.2) будемо позначати, як і раніше, $\langle\cdot,\cdot\rangle$, нехтуючи індексом n. При $n = 0$ простори із (1.2) збігаються з $\mathbb{R}^1$.

Комплексифікуючи простори ланцюжків (1.1) і (1.2), тобто переходячи від N_p, $\mathcal{N}$ до $N_{p,\mathbb{C}}$, $\mathcal{N}_{\mathbb{C}}$, отримуємо аналогічні ядерні ланцюжки. Вектор, комплексно-спряжений до вектора λ, будемо позначати через $\bar{\lambda}$. Комплексне спарювання $(\cdot,\cdot)_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}}$ збігається з дійсним $\langle\cdot,\bar{\cdot}\rangle$.

Введемо для фіксованого $p \in \mathbb{Z}$ симетричний (бозонний) простір Фока $\mathcal{F}(N_p)$:

$$\mathcal{F}(N_p) := \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_n(N_p),$$

де n-частковий простір $\mathcal{F}_n(N_p)$ — n-та симетрична тензорна степінь комплексного $N_{p,\mathbb{C}}$, $\mathcal{F}_n(N_p) := N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ $(\mathcal{F}_0(N_p) := \mathbb{C}^1)$. Вектори $f \in \mathcal{F}(N_p)$ мають вигляд

$$f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \quad f_n \in \mathcal{F}_n(N_p) = N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad \| f\|^2_{\mathcal{F}(N_p)} = \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)} < \infty.$$

Поряд з $\mathcal{F}(N_p)$, $p \in \mathbb{Z}$, побудуємо відповідний ваговий простір Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma)$, де $\gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, $\gamma_n > 0$, — вага. Означення цього простору подібне до попереднього, але з тією відмінністю, що квадрат норми n-часткового підпростору множиться на γ_n. Для $f \in \mathcal{F}(N_p, \gamma)$ маємо

$$f = (f_n)_{n=0}^{\infty}, \quad f_n \in \mathcal{F}_n(N_p) = N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad \| f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\gamma)} = \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)} \gamma_n < \infty, \tag{1.3}$$

з відповідним скалярним добутком. Зауважимо, що множина $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$ фінітних послідовностей із $\mathcal{F}(N_p, \gamma)$ щільна в цьому просторі.

Нехай $\gamma(q) = (\gamma_n(q))_{n=0}^{\infty}$, $\gamma_n(q) \geq 1, q \in \mathbb{N}$, — послідовність ваг, яка задовольняє умову $\forall\, \gamma(q_1), \gamma(q_2) \;\; \exists\, \gamma(q_3) : \; \gamma(q_3) \geq \gamma(q_1), \;\; \gamma(q_3) \geq \gamma(q_2), \;\; q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$ (тобто $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \; \gamma_n(q_3) \geq \gamma_n(q_1), \;\; \gamma_n(q_3) \geq \gamma_n(q_2), \;\; q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{N}$). Позначимо $\gamma^{-1}(q) = (\gamma_n^{-1}(q))_{n=0}^{\infty}$.

Використовуючи ланцюжок (1.1) і вагу $\gamma(q) = (\gamma_n(q))_{n=0}^{\infty}$, $q \in \mathbb{N}$, із вказаними вище властивостями, можемо ввести двопараметричний ланцюжок вагових просторів Фока

$$(\mathcal{F}(\mathcal{N}))' \supset \ldots \supset \mathcal{F}(N_{-p}, \gamma^{-1}(q)) \supset \ldots \supset \mathcal{F}(N_0) \supset \ldots$$

$$\ldots \supset \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \supset \ldots \supset \mathcal{F}(\mathcal{N}), \tag{1.4}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}) := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)), \qquad (\mathcal{F}(\mathcal{N}))' := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(N_{-p}, \gamma^{-1}(q)).$$

Доречно поряд з (1.4) ввести оснащення з тими самими позитивними просторами Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$, але з іншим нульовим, а саме

$$(\mathcal{F}(\mathcal{N}))'_F \supset \ldots \supset \mathcal{F}(N_{-p}, (\gamma(q))_F) \supset \ldots \supset F(N_0) \supset \ldots$$

$$\ldots \supset \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \supset \ldots \supset \mathcal{F}(\mathcal{N}), \tag{1.5}$$

$$\mathcal{F}(\mathcal{N}) := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)), \qquad (\mathcal{F}(\mathcal{N}))'_F := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} \mathcal{F}(N_{-p}, (\gamma(q))_F).$$

Тут $F(N_0) := \mathcal{F}(N_0, \gamma)$ — простір Фока з вагою $\gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, $\gamma_n = n!$; $\mathcal{F}(N_{-p}, (\gamma(q))_F)$ — негативний простір відносно нульового простору $F(N_0)$ і позитивного $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ з вагою $(\gamma(q))_F = ((\gamma_n(q))_F)_{n=0}^{\infty}$, $(\gamma_n(q))_F = (n!)^2 \gamma_n^{-1}(q)$, $\gamma_n(q) \geq n!$.

Відомо [4, 18], що простір $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ є ядерним, якщо для будь-яких $p, q \in \mathbb{N}$ існують $p', q' \in \mathbb{N}$ такі, що вкладення $O_{p',p} : N_{p'} \hookrightarrow N_p$ квазіядерне (в даному випадку ця умова виконується завдяки ядерності $\mathcal{N}$) і виконується умова

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| O_{p',p}\|_{HS}^{2n} \frac{\gamma_n(q)}{\gamma_n(q')} < \infty, \tag{1.6}$$

яка забезпечує квазіядерність вкладення $\mathcal{F}(N_{p'}, \gamma(q')) \hookrightarrow \mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$.

Для довільного фіксованого ядерного ланцюжка (1.1) послідовність ваг

$$\gamma(q) = (\gamma_n(q))_{n=0}^{\infty}, \qquad \gamma_n(q) = (n!)^2 K^{qn}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad q \in \mathbb{N}, \tag{1.7}$$

з фіксованим $K > 1$ задовольняє умову (1.6) і тому оснащення (1.4) з вагою (1.7) ядерне (тобто простір $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ — ядерний).

Справді, нехай $p, q \in \mathbb{N}$ довільні фіксовані, виберемо $p' > p$ настільки великим, щоб $\| O_{p',p}\|_{HS} < \infty$ (таке p' існує завдяки ядерності $\mathcal{N}$). Тоді при $q' > q$ ряд (1.6) згідно з (1.7) має вигляд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| O_{p',p}\|_{HS}^{2n} \frac{\gamma_n(q)}{\gamma_n(q')} = \sum_{n=0}^{\infty} \| O_{p',p}\|_{HS}^{2n} \frac{(n!)^2 K^{qn}}{(n!)^2 K^{q'n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\| O_{p',p}\|_{HS}^{2}}{K^{q'-q}} \right)^n.$$

Даний ряд збігається, якщо $q' = q'(p, p') > q$ вибрати достатньо великим.

У просторі Фока $\mathcal{F}(N_p)$, $p \in \mathbb{N}_0$, зручно ввести так званий базис чисел заповнення (БЧЗ). Для цього зафіксуємо деякий ортонормований базис $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ у просторі N_p і для фіксованого $n \in \mathbb{N}$ і довільної фінітної послідовності $\tau = (\tau_1, \tau_2, \ldots) \in \mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}$ чисел із $\mathbb{N}_0$ введемо вектори

$$e_\tau = \varepsilon_\tau e_1^{\otimes \tau_1} \hat{\otimes} e_2^{\otimes \tau_2} \hat{\otimes} \ldots, \qquad \varepsilon_\tau = \left(\frac{|\tau|!}{\tau_1! \tau_2! \ldots} \right)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.8}$$

$$|\tau| = \tau_1 + \tau_2 + \ldots = n, \qquad e_j^{\otimes 0} := 1.$$

Нескладно довести, що вектори (1.8) з $|\tau| = n$ утворюють ортонормований базис у просторі $\mathcal{F}_n(N_p)$, тому вектори

$$\tilde{e}_\tau = (0, \ldots, 0, e_\tau, 0, \ldots), \qquad \tau \in \mathbb{N}_{0,\text{fin}}^{\infty}, \tag{1.9}$$

де e_τ вигляду (1.8) стоїть на $|\tau|$-му місці і вектор $e_{(0,0,\ldots)} = \Omega = (1, 0, 0, \ldots)$ (вакуум), утворюють ортонормований базис в $\mathcal{F}(N_p)$.

2. Аналітичність у локально опуклих просторах. Нагадаємо деякі факти з теорії аналітичних функцій у локально опуклому лінійному комплексному топологічному просторі E точок λ (див. [47, 48]).

Комплекснозначна функція $\phi(\lambda)$ називається аналітичною в нулі, якщо існує окіл U нуля $0 \in E$, в якому вона визначена і має такі властивості:

1. Для довільних $\lambda, \mu \in U$ функція комплексної змінної $\mathbb{C}^1 \ni z \mapsto \phi(\lambda + z\mu) \in \mathbb{C}^1$ визначена при малих $|z|$ і аналітична в околі $0 \in \mathbb{C}^1$.

2. Існує константа $c > 0$ така, що $|\phi(\lambda)| \le c$, $\lambda \in U$ (локальна обмеженість).

Кожна така функція розкладається в деякому околі $V \subset U$ нуля в ряд Тейлора

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(D^n\phi)(\lambda), \quad \lambda \in V, \tag{2.1}$$

який рівномірно збігається на V. Тут $(D^n\phi)(\lambda)$ — деякі однорідні неперервні поліноми n-го степеня змінної λ. Останнє означає, що для будь-якого $n \in \mathbb{N}$ існує симетрична n-лінійна неперервна форма $E \times \ldots \times E \ni \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \mapsto$ $\mapsto A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^1$ така, що $(D^n\phi)(\lambda)$ — її діагональне значення: $(D^n\phi)(\lambda) =$ $= A_n(\lambda, \ldots, \lambda)$, $\lambda \in E$. Поліноми $(D^n\phi)(\lambda)$ визначаються по ϕ однозначно.

Зупинимося на випадку, коли E — гільбертів простір $N_{1,\mathbf{C}}$ з комплексифікації ланцюжка (1.1). Ми припустили, що вкладення $N_{2,\mathbf{C}} \hookrightarrow N_{1,\mathbf{C}}$ квазіядерне, тому до кожної форми A_n, $n \in \mathbb{N}$, можна застосувати теорему про ядро [4, 46], згідно з якою звуження форми на $N_{2,\mathbf{C}}$ породжується її ядром $\xi_n \in N_{-2,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}$:

$$A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \langle \xi_n, \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n \rangle, \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in N_{2,\mathbf{C}}. \tag{2.2}$$

Оскільки околами нуля в гільбертовому просторі є відкриті кулі з центром в 0, то з урахуванням (2.2) розклад (2.1) для $E = N_{1,\mathbf{C}}$ (звужений на $N_{2,\mathbf{C}}$) можна переписати у вигляді

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \quad \lambda \in V = \{ \lambda \in N_{2,\mathbf{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbf{C}}} < \varepsilon \}, \tag{2.3}$$

причому ряд збігається рівномірно (по λ) в довільній замкненій кулі з V; $\lambda^{\otimes 0} := 1 \; \forall \lambda$.

У деяких випадках нам зручно розглядати ростки аналітичних функцій в $0 \in$ $\in \mathcal{N}_{\mathbf{C}}$, тобто ми ототожнимо дві функції, якщо вони збігаються в деякому околі $0 \in$ $\in \mathcal{N}_{\mathbf{C}}$. Простір ростків аналітичних у нулі функцій $\phi : \mathcal{N}_{\mathbf{C}} \to \mathbb{C}^1$ будемо позначати через $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbf{C}})$. Наділимо $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbf{C}})$ індуктивною топологією, заданою сім'єю норм

$$\|\phi\|_{p,l} := \sup_{\|\lambda\|_{N_{p,\mathbf{C}}} \leq K^{-l}} |\phi(\lambda)|, \quad p, l \in \mathbb{N}, \tag{2.4}$$

з фіксованим $K > 1$. Неважко бачити, що $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbf{C}})$ є комутативною алгеброю відносно звичайного множення функцій.

Зазначимо, що якщо $\phi \in \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbf{C}})$, то існують $p, l \in \mathbb{N}$ такі, що $\|\phi\|_{p,l} < \infty$, і функція ϕ розкладається в ряд Тейлора (2.1), який рівномірно збігається в довільній замкненій кулі $\{\lambda \in N_{p,\mathbf{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{p,\mathbf{C}}} \leq r, \; r < K^{-l}\}$. Тому внаслідок ядерності $\mathcal{N}_{\mathbf{C}}$ (ядерність забезпечує існування $p' > p$ такого, що вкладення $N_{p'} \hookrightarrow N_p$ є квазіядерним) ϕ допускає зображення

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \quad \xi_n \in N_{-p',\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}; \tag{2.5}$$

крім того, завдяки ядерності $\mathcal{N}_{\mathbf{C}}$ існує $p'' > p'$ таке, що $\|O_{p'',p'}\|_{HS} < \infty$ і

$$\|\xi_n\|_{N_{-p'',\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}} \leq \|\phi\|_{p',l} \frac{e^n \|O_{p'',p'}\|_{HS}^n}{r^n}, \quad r \in (0, K^{-l}) \tag{2.6}$$

(доведення оцінки типу (2.6) див. в п. 3, лема 3.1). Щоб отримати (2.5), потрібно провести міркування, аналогічні тим, які ми проводили для встановлення (2.2).

Зафіксуємо $p, q \in \mathbb{N}$ і введемо гільбертовий простір $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$ аналітичних функцій вигляду (2.5), поклавши

$$\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q) := \Big\{ \phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \ \xi_n \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},$$

$$\lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}) \Big| \, \|\phi\|^2_{\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}},q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty \Big\}, \tag{2.7}$$

$$B_p(K^{-\frac{q}{2}}) = \{\lambda \in N_{p,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < K^{-\frac{q}{2}}\}.$$

Неважко бачити, що $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$ складається з аналітичних в $0 \in N_{p,\mathbb{C}}$ функцій змінної $\lambda \in N_{p,\mathbb{C}}$. Справді, кожен елемент ϕ простору $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$ є аналітичною функцією, оскільки ряд

$$\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle$$

збігається рівномірно на кожній замкненій кулі з $B_p(K^{-\frac{q}{2}})$. Останнє відразу випливає з нерівності

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \exists c > 0 : \qquad |\langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle| \le \|\lambda^{\otimes n}\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \|\xi_n\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} =$$

$$= \|\lambda\|^n_{N_{p,\mathbb{C}}} \|\xi_n\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \le c(\|\lambda\|_{N_{p,\mathbb{C}}} K^{\frac{q}{2}})^n,$$

$$\|\lambda\|_{N_{p,\mathbb{C}}} K^{\frac{q}{2}} < 1 \quad \text{при} \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}})$$

(ми скористалися збіжністю останнього ряду в (2.7)).

Теорема 2.1. *Має місце рівність топологічних просторів*

$$\operatorname*{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q) = \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}). \tag{2.8}$$

Доведення. Нехай $\phi \in \operatorname*{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$, тоді існують $p, q \in \mathbb{N}$ такі, що $\phi \in \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$. На підставі означення (2.7), скориставшись нерівністю Коші–Буняковського, для $\lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}})$ отримаємо

$$|\phi(\lambda)| \le \sum_{n=0}^{\infty} |\langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle| \le \sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\|^n_{N_{p,\mathbb{C}}} \|\xi_n\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \le$$

$$\le \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\|^{2n}_{N_{p,\mathbb{C}}} K^{qn} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= (1 - K^q \|\lambda\|^2_{N_{p,\mathbb{C}}})^{-\frac{1}{2}} \|\phi\|_{\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}},q)} < \infty.$$

Таким чином, $\phi \in \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})$ і

$$\|\phi\|_{p,l} \le (1 - K^{q-2l})^{-\frac{1}{2}} \|\phi\|_{\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbb{C}},q)}, \tag{2.9}$$

якщо $2l > q$.

Навпаки, нехай $\phi \in \mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})$, тоді існують $p, l \in \mathbb{N}$ такі, що $\|\phi\|_{p,l} < \infty$ і має місце зображення (2.5) для $p' > p$ з $\|O_{p',p}\|_{HS} < \infty$. Скориставшись (2.7) і оцінкою (2.6) для $p'' > p'$ такого, що $\|O_{p'',p'}\|_{HS} < \infty$, одержимо

$$\|\phi\|^2_{\mathrm{Hol}(N_{p'',\mathbb{C}},q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p'',\mathbb{C}}} K^{-qn} \le \|\phi\|^2_{p',l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(K^{-q} e^2 \|O_{p'',p'}\|^2_{HS})^n}{r^{2n}}. \tag{2.10}$$

Зафіксуємо $r \in (0, K^{-l})$ і виберемо $q \in \mathbb{N}$ настільки великим, щоб $\dfrac{K^{-q} e^2 \|O_{p'',p'}\|^2_{HS}}{r^2}$ було менше за одиницю. Тоді з (2.10) дістанемо

$$\|\phi\|_{\mathrm{Hol}(N_{p'',\mathbb{C}},q)} \le \left(\frac{r^2 - K^{-q} e^2 \|O_{p'',p'}\|^2_{HS}}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \|\phi\|_{p',l}. \tag{2.11}$$

Із (2.9) і (2.11) відразу отримаємо рівність (2.8).

3. Базисні функції. Нехай Q — сепарабельний метричний простір точок $x, y, \ldots$. Позначимо через $C(Q)$ лінійний простір всіх комплекснозначних локально обмежених (тобто обмежених на кожній кулі в Q) неперервних функцій на Q. Зручно вважати, що $C(Q)$ — топологічний простір зі збіжністю, рівномірною на кожній кулі з Q. Нагадаємо також, що в комплексифікації ланцюжка (1.1) вкладення $N_{2,\mathbb{C}} \hookrightarrow N_{1,\mathbb{C}}$ і $N_{3,\mathbb{C}} \hookrightarrow N_{2,\mathbb{C}}$ є квазіядерними.

Нехай U_0 — деякий окіл нуля в просторі $N_{1,\mathbb{C}}$ і $Q \times U_0 \ni \{x, \lambda\} \mapsto h(x, \lambda) \in \mathbb{C}^1$ — задана функція. *Припустимо, що для кожного x вона є аналітичною в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$ функцією змінної λ, для кожного $\lambda \in U_0$ $h(\cdot, \lambda) \in C(Q)$ і, крім того, локально обмеженою рівномірно відносно λ із довільної замкненої кулі з U_0* (останнє розуміємо так: для довільної кулі $W \subset Q$ і довільної замкненої кулі $\overline{U} \subset U_0$ існує константа $c(W, \overline{U}) > 0$ така, що $|h(x, \lambda)| \le c(W, \overline{U})$ при $x \in W$ і $\lambda \in \overline{U}$). У відповідності з п. 2 із аналітичності випливає, що для кожної точки $x \in Q$ існує розклад у ряд типу (2.3)

$$h(x, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(x) \rangle,$$
$$\lambda \in B_h = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_h\} \subset U_0, \tag{3.1}$$

який рівномірно (по λ) збігається в кожній замкненій кулі із B_h. Припускається існування спільного для всіх $x \in Q$ околу B_h, в якому має місце розклад (3.1). Для кожного $x \in Q$ коефіцієнти $h_n(x) \in N^{\hat{\otimes} n}_{-2,\mathbb{C}}$. Зафіксуємо функцію h з вказаними властивостями. Відповідні функції $h_n(x)$ будемо називати базисними (пов'язаними з h).

***Приклад* 3.1.** Розглянемо функцію

$$h(x, \lambda) = \exp\langle x, \lambda \rangle, \qquad x \in Q := N_{-1}, \quad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}}. \tag{3.2}$$

Зрозуміло, що дана функція аналітична відносно λ і неперервна та локально обмежена відносно x рівномірно по λ. Неважко бачити, що тепер розклад (3.1) набирає вигляду

$$h(x,\lambda) = \exp\langle x,\lambda\rangle = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, x^{\otimes n}\rangle, \quad \lambda\in N_{1,\mathbb{C}},$$

тобто $h_n(x) = x^{\otimes n}$, $x\in Q = N_{-1}$, $n\in\mathbb{N}_0$.

Використавши формулу Коші, виразимо $h_n(x)$, $n\in\mathbb{N}_0$, як коефіцієнти степеневого ряду (3.1). Нехай e — орт простору $N_{2,\mathbb{C}}$, $\|e\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = 1$. Тоді для $\lambda = ze\in N_{2,\mathbb{C}}$, $z\in\mathbb{C}^1$, $|z| = r\in(0,R_h)$ із (3.1) отримаємо

$$\forall x\in Q: \quad h(x,\lambda) = h(x,ze) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\langle e^{\otimes n}, h_n(x)\rangle. \tag{3.3}$$

Для фіксованих x, e функція (3.3) є звичайною аналітичною в нулі функцією відносно z, тому

$$\langle e^{\otimes n}, h_n(x)\rangle = \frac{d^n}{dz^n}h(x,ze)\Big|_{z=0} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|\zeta|=r}\frac{h(x,\zeta e)}{\zeta^{n+1}}d\zeta. \tag{3.4}$$

Крім того, як результат інтегрального зображення (3.4) справджується така оцінка:

$$\big|\langle e^{\otimes n}, h_n(x)\rangle\big| \le \frac{n!}{r^n}\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r}|h(x,\lambda)|, \quad n\in\mathbb{N}_0, \ x\in Q \quad \text{i} \quad r\in(0,R_h). \tag{3.5}$$

Із неперервності для довільного $\lambda\in B_h$ функції $Q\ni x\mapsto h(x,\lambda)\in\mathbb{C}^1$ і зображення (3.4) внаслідок теореми Лебега про граничний перехід випливає неперервність $Q\ni x\mapsto\langle\lambda^{\otimes n}, h_n(x)\rangle\in\mathbb{C}^1$, $n\in\mathbb{N}_0$, при кожному $\lambda\in N_{2,\mathbb{C}}$, а значить, і неперервність $Q\ni x\mapsto\langle\lambda_1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}\lambda_n, h_n(x)\rangle\in\mathbb{C}^1$ при $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in N_{2,\mathbb{C}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Для останнього потрібно скористатися поляризаційною тотожністю: нехай E — лінійний простір, тоді для $\lambda_1,\ldots,\lambda_n\in E$ добуток $\lambda_1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}\lambda_n$ виражається скінченною лінійною комбінацією з незалежними від $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ дійсними коефіцієнтами векторів вигляду $\mu^{\otimes n}$, де $\mu\in E$ залежить від $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ $\Big($наприклад, $\lambda_1\hat{\otimes}\lambda_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1\otimes\lambda_2+\lambda_2\otimes\lambda_1) = \frac{1}{4}(\mu_1^{\otimes 2}-\mu_2^{\otimes 2})$, $\mu_1 = \lambda_1+\lambda_2$, $\mu_2 = \lambda_1-\lambda_2\Big)$ [7, 47].

Із (3.5) випливає оцінка: для довільних $e_1,\ldots,e_n\in N_{2,\mathbb{C}}$, $\|e_1\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = \ldots = \|e_n\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = 1$, і для будь-якого $x\in Q$

$$|\langle e_1\otimes\ldots\otimes e_n, h_n(x)\rangle| \le \frac{n^n}{r^n}\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r}|h(x,\lambda)|, \qquad n\in\mathbb{N}, \ r\in(0,R_h), \tag{3.6}$$

де $h_n(x)\in N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}\subset N_{-2,\mathbb{C}}^{\otimes n}$ розуміємо як елемент із $N_{-2,\mathbb{C}}^{\otimes n}$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ позначає спарювання, породжене скалярним добутком у просторі $N_{0,\mathbb{C}}^{\otimes n}$.

Зазначимо, що (3.6) є наслідком (3.5) і загальної оцінки, яка доводиться на основі поляризаційної тотожності [7, 47]: нехай E — банахів простір, $E\times\ldots\times E\ni\lambda_1,\ldots,\lambda_n\mapsto A_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)\in\mathbb{C}^1$ — симетрична n-лінійна форма, тоді

$$\sup_{\|\lambda\|_E=1}|A_n(\lambda,\ldots,\lambda)| \le \sup_{\|\lambda_1\|_E=\ldots=\|\lambda_n\|_E=1}|A_n(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)| \le$$

$$\le\frac{n^n}{n!}\sup_{\|\lambda\|_E=1}|A_n(\lambda,\ldots,\lambda)|, \quad n\in\mathbb{N}$$

(потрібно покласти $A_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \langle \lambda_1 \otimes \ldots \otimes \lambda_n, h_n(x)\rangle$; зазначимо, що $h_n(x)$ входить у симетричний добуток просторів $N_{-2,\mathbb{C}}$).

Лема 3.1. *Для базисних функцій справджується така оцінка:*

$$\|h_n(x)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \le \frac{n! e^n \| O_{3,2}\|_{HS}^n}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r} | h(x, \lambda)|, \tag{3.7}$$

$$\lambda \in N_{3,\mathbb{C}}, \quad x \in Q, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r \in (0; R_h).$$

Доведення. Встановимо оцінку

$$\| h_n(x)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \le \frac{n^n \| O_{3,2}\|_{HS}^n}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r} | h(x, \lambda)|, \tag{3.8}$$

$$\lambda \in N_{3,\mathbb{C}}, \quad x \in Q, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad r \in (0, R_h),$$

з якої відразу випливає (3.7) (потрібно скористатися відомою нерівністю $n^n \le$ $\le n! e^n$, $n \in \mathbb{N}_0$).

Нехай $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормований базис у просторі $N_{3,\mathbb{C}}$, тоді $(e_{j_1} \otimes \ldots$ $\ldots \otimes e_{j_n})_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty}$ — ортонормований базис у просторі $N_{3,\mathbb{C}}^{\otimes n}$. Позначимо через $C(x, r, n)$ праву частину нерівності (3.6), тоді з (3.6) отримаємо

$$\left|\langle e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}, h_n(x)\rangle\right| \le C(x, r, n) \|e_{j_1}\|_{N_{2,\mathbb{C}}} \ldots \|e_{j_n}\|_{N_{2,\mathbb{C}}}.$$

Тому для довільного $f_n \in N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \subset N_{3,\mathbb{C}}^{\otimes n}$ з координатами $f_{n;j_1,\ldots,j_n}$ у введеному вище базисі маємо

$$\left|\langle f_n, h_n(x)\rangle\right|^2 = \left|\left\langle \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} f_{n;j_1,\ldots,j_n} e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}, h_n(x) \right\rangle\right|^2 \le$$

$$\le \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |f_{n;j_1,\ldots,j_n}|^2 \sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} |\langle e_{j_1} \otimes \ldots \otimes e_{j_n}, h_n(x)\rangle|^2 \le$$

$$\le C^2(x, r, n) \|f_n\|^2_{N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \textstyle\sum_{j_1,\ldots,j_n=1}^{\infty} \|e_{j_1}\|^2_{N_{2,\mathbb{C}}} \ldots \|e_{j_n}\|^2_{N_{2,\mathbb{C}}} =$$

$$= C^2(x, r, n) \|f_n\|^2_{N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \|O_{3,2}\|^{2n}_{HS}.$$

Ця нерівність еквівалентна (3.8) (ми беремо до уваги, що $\| h_n(x)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} =$ $= \| h_n(x)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\otimes n}}$).

Лему доведено.

Використовуючи оцінку (3.7), легко пересвідчитись, що породжені базисними елементарні функції $Q \ni x \mapsto \langle f_n, h_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1$, $f_n \in N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, належать $C(Q)$. Більш точно, має місце така лема.

Лема 3.2. *Кожна базисна функція* (3.1) $Q \ni x \mapsto h_n(x) \in N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ *слабконеперервна і локально обмежена.*

Доведення. Із оцінки (3.7) і рівномірної відносно λ із замкненої кулі з B_h локальної обмеженості $h(\cdot, \lambda)$ випливає локальна обмеженість $h_n(x)$.

Далі, як було відмічено, функція $Q \ni x \mapsto \langle \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n, h_n(x) \rangle \in \mathbb{C}^1$, $\lambda_1, \ldots$ $\ldots, \lambda_n \in N_{3,\mathbb{C}} \subset N_{2,\mathbb{C}}$, неперервна. Лінійна оболонка множини векторів $\lambda_1 \hat{\otimes} \ldots$ $\ldots \hat{\otimes} \lambda_n$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in N_{3,\mathbb{C}}$, щільна в $N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ і норми $\| h_n(x) \|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}$ згідно з (3.7) обмежені в кожному околі точки x. Тому вказана неперервність $\langle \lambda_1 \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} \lambda_n, h_n(x) \rangle$ приводить до слабкої неперервності $h_n(x)$.

4. Простір сумовних з квадратом функцій та його оснащення. Зафіксуємо деяку борелівську ймовірнісну міру ρ на Q і розглянемо гільбертовий простір $L^2(Q, d\rho(x)) =: (L^2)$. *Припустимо, що міра ρ позитивна на непорожніх відкритих множинах в Q і така, що справедлива оцінка*

$$\Big\| \|h_n(\cdot)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \Big\|_{(L^2)} \le LC^n n! \quad \text{для деяких} \quad C > 0, \ L > 0 \ \ i \quad \forall n \in \mathbb{N}_0. \tag{4.1}$$

***Зауваження* 4.1.** Для виконання оцінки (4.1) достатньо, щоб існувало $r \in$ $\in (0, R_h)$ таке, щоб збігався інтеграл

$$\int\limits_Q \Big(\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = r} |h(x, \lambda)| \Big)^2 d\rho(x) < \infty, \quad \lambda \in N_{3,\mathbb{C}}. \tag{4.2}$$

Справді, використовуючи оцінку (3.7), отримуємо

$$\Big\| \|h_n(\cdot)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \Big\|_{(L^2)}^2 = \int\limits_Q \|h_n(x)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 d\rho(x) \le$$

$$\le (n!)^2 \Big(\frac{e}{r} \|O_{3,2}\|_{HS} \Big)^{2n} \int\limits_Q \Big(\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = r} |h(x, \lambda)| \Big)^2 d\rho(x) = (LC^n n!)^2,$$

що і стверджувалося.

***Приклад* 4.1.** Борелівську ймовірнісну міру ρ на $Q = N_{-1}$ називають аналітичною, якщо перетворення Лапласа

$$l_\rho(\lambda) = \int\limits_{N_{-1}} \exp\langle x, \lambda \rangle d\rho(x), \quad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}},$$

є аналітичною в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$ функцією.

У випадку, коли $h(x, \lambda) = \exp\langle x, \lambda \rangle$, $x \in Q = N_{-1}$, $\lambda \in N_{1,\mathbb{C}}$ (див. приклад 3.1), умова (4.1) рівносильна аналітичності міри ρ. Більш того, для такої функції $h(x, \lambda)$ умова (4.2) необхідна і достатня для справедливості оцінки (4.1) (детальніше див. [30, 31]).

Завдяки (4.1) для довільного $f_n \in N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ елементарні функції $\langle f_n, h_n(x) \rangle$ належать до (L^2). Справді, для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ маємо

$$\| \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \|_{(L^2)}^2 = \int\limits_Q |\langle f_n, h_n(x) \rangle|^2 d\rho(x) \le$$

$$\le \int\limits_Q \| f_n \|_{N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 \|h_n(x)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 d\rho(x) \le (LC^n n!)^2 \|f_n\|_{N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 < \infty. \tag{4.3}$$

Лема 4.1. *При* $\lambda \in N_{3,\mathbb{C}}$, $\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}} < \min\{R_h, C^{-1}\}$ *функція* $h(\,\cdot\,,\lambda) \in (L^2)$.

Доведення. Для вказаного λ $\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} \leq \|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}} < R_h$, тому має місце зображення (3.1). Використовуючи його і оцінку (4.1), отримуємо

$$\left\| \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, h_n(\,\cdot\,)\rangle \right\|_{(L^2)} \leq \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n!} \|\langle \lambda^{\otimes n}, h_n(\,\cdot\,)\rangle\|_{(L^2)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} \frac{1}{n!} \|\lambda\|^n_{N_{3,\mathbb{C}}} \| \, \|h_n(\,\cdot\,)\|_{N^{\hat{\otimes} n}_{-3,\mathbb{C}}} \|_{(L^2)} \leq L \sum_{n=M}^{N} \|\lambda\|^n_{N_{3,\mathbb{C}}} C^n. \tag{4.4}$$

Для даного λ $\sum_{n=0}^{\infty} \|\lambda\|^n_{N_{3,\mathbb{C}}} C^n = (1 - \|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}} C)^{-1} < \infty$. Звідси і з (4.4) випливає збіжність ряду (3.1) в (L^2). Таким чином, $h(\,\cdot\,,\lambda) \in (L^2)$ при $\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}} <$ $< \min\{R_h, C^{-1}\}$.

Лему доведено.

Перейдемо до побудови оснащення простору (L^2). Виберемо і зафіксуємо $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}$ і $K > 1$. Введемо гільбертовий простір формальних рядів

$$H^h(p,q) := \left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x)\rangle, \; f_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbb{C}}, \; x \in Q \right|$$

$$\left. \|f\|^2_{H^h(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbb{C}}} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\} \tag{4.5}$$

з відповідним скалярним добутком.

***Зауваження* 4.2.** Позначимо через $\mathcal{P}_h(Q)$ множину всіх неперервних функцій („поліномів") вигляду

$$Q \ni x \mapsto \varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, h_n(x)\rangle \in \mathbb{C}^1, \qquad \varphi_n \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{\mathbb{C}}, \quad m \in \mathbb{N}_0. \tag{4.6}$$

Будемо вважати, що $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, h_n(x)\rangle = 0$ в $\mathcal{P}_h(Q)$ тоді і лише тоді, коли $\varphi_n = 0$, $n = 0, \ldots, m$. Покладемо для $\varphi(\cdot) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{P}_h$, $\psi(\cdot) = \sum_{n=0}^{m} \langle \psi_n, h_n(\cdot)\rangle \in \mathcal{P}_h$ і $\mu \in \mathbb{C}^1$

$$\varphi(x) + \psi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n + \psi_n, h_n(x)\rangle, \qquad \mu\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \mu\varphi_n, h_n(x)\rangle, \quad x \in Q.$$

Неважко бачити, що при такому визначенні операцій додавання функцій із $\mathcal{P}_h(Q)$ і множення їх на скаляр множина $\mathcal{P}_h(Q)$ є лінійною, причому щільною в гільбертовому просторі $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}$.

Лема 4.2. *При достатньо великому* $K > 1$ *перший ряд в* (4.5) *для довільних* $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ *збігається рівномірно на кожній кулі з* Q *до неперервної локально обмеженої функції. Для кожної кулі* $U \subset Q$ *існує константа* $c = c(U) > 0$ *така, що*

$$|f(x)| < c\|f\|_{H^h(p,q)}, \qquad x \in U, \quad f \in H^h(p,q). \tag{4.7}$$

Доведення. Використовуючи (3.7), для будь-якого $x \in Q$ отримуємо

$$\left|\sum_{n=M}^{N} \langle f_n, h_n(x)\rangle\right| \leq \sum_{n=M}^{N} |\langle f_n, h_n(x)\rangle| \leq$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} \|f_n\|_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \|h_n(x)\|_{\mathcal{N}_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \leq \sum_{n=M}^{N} \|f_n\|_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \|h_n(x)\|_{\mathcal{N}_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=M}^{N} \|f_n\|^2_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=M}^{N} \|h_n(x)\|^2_{\mathcal{N}_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^{-2} K^{-qn}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \sup_{\|\lambda\|_{\mathcal{N}_{3,\mathbb{C}}}=r} |h(x,\lambda)|^2 \left(\sum_{n=M}^{N} \frac{e^{2n}\|O_{3,2}\|^{2n}_{HS}}{r^{2n}K^{qn}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=M}^{N} \|f_n\|^2_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.8)$$

Зафіксуємо $r \in (0, R_h)$ і виберемо $K > 1$ настільки великим, щоб $e^2\|O_{3,2}\|^2_{HS} r^{-2} K^{-1}$ було меншим за одиницю. Тоді з (4.8) одержимо

$$\left|\sum_{n=M}^{N} \langle f_n, h_n(x)\rangle\right| \leq c \sup_{\|\lambda\|_{\mathcal{N}_{3,\mathbb{C}}}=r} |h(x,\lambda)|^2 \left(\sum_{n=M}^{N} \|f_n\|^2_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (4.9)$$

$$c = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2n}\|O_{3,2}\|^{2n}_{HS}}{r^{2n}K^{qn}}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Із (4.9), рівномірної по λ локальної обмеженості $h(x,\lambda)$ і означення (4.5) випливає рівномірна збіжність на кожній кулі з Q ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x)\rangle$, а оскільки кожен член цього ряду $\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in C(Q)$, то і $f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in C(Q)$. Оцінка (4.7) випливає з (4.9), якщо взяти $M = 0$ і покласти $N \to \infty$.

Лема 4.3. *При* $K > \max\{1, C^2\}$ *має місце наступна оцінка: існує константа* $c > 0$ *така, що*

$$\|f\|_{(L^2)} \leq c\|f\|_{H^h(p,q)}, \qquad f \in H^h(p,q), \quad p \in \mathbb{N}_3, \quad q \in \mathbb{N}. \qquad (4.10)$$

Доведення. Покажемо, що ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle = f(\cdot) \in H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, збігається в (L^2), тобто $f \in (L^2)$. Це випливає з оцінки (використовуємо (4.1) і (4.5))

$$\left\|\sum_{n=M}^{N} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\right\|_{(L^2)} \leq \sum_{n=M}^{N} \|\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle\|_{(L^2)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} \|f_n\|_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \big\| \|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{N}_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \big\|_{(L^2)} \leq$$

$$\leq \sum_{n=M}^{N} \|f_n\|_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \big\| \|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{N}_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \big\|_{(L^2)} \leq L \sum_{n=M}^{N} \|f_n\|_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} C^n n! \leq$$

$$\leq L \left(\sum_{n=M}^{N} \|f_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbf{C}}} (n!)^2 K^{qn} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=M}^{N} C^{2n} K^{-qn} \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.11}$$

і збіжності рядів

$$\sum_{n=0}^{\infty} \| f_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbf{C}}} (n!)^2 K^{qn} = \|f\|^2_{H^h(p,q)},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C^{2n} K^{-qn} < \sum_{n=0}^{\infty} C^{2n} K^{-n} = \frac{K}{K-C^2} = c^2.$$

Оцінка (4.10) випливає з (4.11), якщо взяти $M = 0$ і покласти $N \to \infty$.

Лему доведено.

Відмітимо, що для того, щоб леми 4.2, 4.3 справджувались, K повинно бути таким, щоб

$$K > \max \left\{ 1,\ C^2,\ \| O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 R_h^{-2} \right\} \tag{4.12}$$

(при доведенні леми 4.2 необхідно брати $r = R_h - \varepsilon$ з достатньо малим фіксованим $\varepsilon > 0$). Зафіксуємо надалі таке K.

Нам буде зручно простір $H^h(p,q)$ інтерпретувати таким чином. Зафіксуємо $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}$. Розглянемо простір Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ з вагою (1.7). Цей простір буде ізоморфним простору $H^h(p,q)$: ізоморфізм задається відображенням

$$\mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I_+^h f)(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in H^h(p,q). \tag{4.13}$$

Завдяки (1.3) і (4.13) для довільного $f \in \mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ маємо

$$\|I_+^h f\|^2_{H^h(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbf{C}}} (n!)^2 K^{qn} = \|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))}.$$

Із цих рівностей видно, що (4.13) є унітарним ізоморфізмом між $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ і $H^h(p,q)$. Зрозуміло, що $I_+^h f = 0$ тоді і лише тоді, коли всі $f_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Разом з тим із лем 4.2 і 4.3 випливає, що при $p \in \mathbb{N}_3$ функція $(I_+^h f)(x)$ з (4.13), визначена для кожного $x \in Q$, є неперервною, локально обмеженою і належить до (L^2). Тобто відображення (4.13) діє з $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ у лінійний простір $C(Q) \cap (L^2)$. Але в такій інтерпретації ядро

$$\operatorname{Ker}(I_+^h) = \left\{ f \in \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)),\ p \in \mathbb{N}_3,\ q \in \mathbb{N} \;\middle|\; (I_+^h f)(x) = 0\ \forall x \in Q \right\} \tag{4.14}$$

може бути відмінним від 0. Тому надалі від системи базисних функцій (тобто від h) скрізь будемо вимагати, щоб ядро (4.14) було рівним 0, іншими словами, щоб система $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ була *„мінімальною": якщо $f \in \mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ таке, що $(I_+^h f)(x) = 0$, $x \in Q$, то $f = 0$ як елемент простору $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$* (обговорення цього поняття, істотного для побудови теорії узагальнених функцій, див. у [49]).

Зрозуміло, що при такому визначенні мінімальності для довільних $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ базисні функції лінійно незалежні: якщо при деяких $f_n \in N^{\hat{\otimes} m}_{p,\mathbf{C}}$

$$\sum_{n=0}^{m}\langle f_n, h_n(x)\rangle = 0, \quad x \in Q,$$

то $f_n = 0,\ n = 0, \ldots, m$.

Надалі скрізь *будемо припускати, що система базисних функцій* $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *мінімальна, а множина* $\mathcal{P}_h(Q)$ *щільна в* (L^2).

***Зауваження* 4.3.** Якщо функція $\varphi \in C(Q)$ допускає зображення

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m}\langle \varphi_n, h_n(x)\rangle, \qquad \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad x \in Q, \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{4.15}$$

то на підставі припущення мінімальності базисних функцій $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ воно єдине. Тому множину $\mathcal{P}_h(Q)$ (див. зауваження 4.2) можна інтерпретувати як множину неперервних локально обмежених функцій φ на Q, що допускають зображення (4.15). При такій інтерпретації множину $\mathcal{P}_h(Q)$ будемо позначати $\mathcal{P}(Q)$, тобто за означенням

$$\mathcal{P}(Q) := \left\{\varphi \in C(Q) \mid \varphi(x) = \sum_{n=0}^{m}\langle \varphi_n, h_n(x)\rangle,\ \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},\ x \in Q,\ m \in \mathbb{N}_0\right\}.$$

Зрозуміло, що лінійна структура, введена на $\mathcal{P}_h(Q)$ (див. зауваження 4.2), збігається з природною лінійною структурою на $\mathcal{P}(Q)$, породженою звичайним додаванням функцій і множенням їх на скаляр із $\mathbb{C}^1$.

***Зауваження* 4.4.** На підставі припущення мінімальності, якщо функція $f \in C(Q)$ допускає зображення

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(x)\rangle, \quad x \in Q,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|^2_{\mathcal{N}_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}(n!)^2K^{qn} < \infty, \quad p \in \mathbb{N}_3,\ q \in \mathbb{N}, \tag{4.16}$$

то воно єдине. Завдяки останньому і лемі 4.2 гільбертовий простір $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, можна розглядати як множину неперервних локально обмежених функцій f на Q, що допускають зображення (4.16), з відповідною гільбертовою нормою $\|\cdot\|_{H^h(p,q)}$, заданою на цій множині.

Тепер є майже очевидною така теорема.

Теорема 4.1. *Простір* $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, *щільно і неперервно вкладається в* (L^2) *і складається з неперервних локально обмежених функцій на* Q. *При цьому має місце також неперервне вкладення* $H^h(p,q) \hookrightarrow C(Q)$.

Доведення. Зафіксуємо $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$. Встановимо неперервність вкладення $H^h(p,q)$ в $C(Q)$. Оскільки кожний елемент простору $H^h(p,q)$ є неперервною локально обмеженою функцією (лема 4.2), то існує оператор вкладення O простору $H^h(p,q)$ у простір $C(Q)$ ($\operatorname{Ker}(O) = \{0\}$ завдяки мінімальності системи базисних функцій $h_n(x)$). Неперервність оператора O (а отже, і вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow C(Q)$) відразу випливає з оцінки (4.7).

Завдяки оцінці (4.10) для встановлення неперервності вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow \hookrightarrow (L^2)$ досить показати, що якщо $\|f\|_{(L^2)} = 0$, $f \in H^h(p,q)$, то $f = 0$ і як елемент простору $H^h(p,q)$.

Із неперервності функції $Q \ni x \mapsto f(x) \in \mathbb{C}^1$ і позитивності міри ρ на непорожніх відкритих множинах з Q випливає, що для $f \in H^h(p,q)$ з рівності $\|f\|_{(L^2)} = 0$ випливає рівність $f(x) = 0$ $\forall x \in Q$. Тому на підставі припущення мінімальності $f = 0$ і як елемент простору $H^h(p,q)$. Щільність вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow (L^2)$ випливає з щільності множини $\mathcal{P}(Q)$ в даних просторах.

Теорему доведено.

Зауваження **4.5.** Простір $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, вкладається у простір (L^2) шляхом ототожнення функції $f \in H^h(p,q)$ з класом (тобто елементом (L^2)), що містить цю функцію.

Зауваження **4.6.** Простір $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, вкладається у простір $C(Q)$ оператором вкладення, що є тотожним оператором, котрий кожній функції $f \in H^h(p,q)$ ставить у відповідність цю саму функцію f, яку вже розуміємо як елемент простору $C(Q)$.

Повернемося до відображення I_+^h (4.13). При зроблених припущеннях відносно $h_n(x)$ його можна інтерпретувати таким чином:

$$\forall p \in \mathbb{N}_3, \ \ q \in \mathbb{N}: \quad \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \ni f = (f_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto (I_+^h f)(\cdot) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in \operatorname{Ran}(I_+^h) \subset (L^2) \cap C(Q). \qquad (4.17)$$

Зрозуміло, що I_+^h є ізоморфізмом між $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ і областю значень $\operatorname{Ran}(I_+^h) = = H^h(p,q)$, щільною в (L^2). Цей ізоморфізм, як відображення $I_+^h : \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \to \to (L^2)$ або $I_+^h : \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \to C(Q)$, внаслідок останньої теореми і унітарності відображення (4.13) є неперервним.

Теорема 4.1 показує, що простір $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, можна розглядати як позитивний відносно нульового (L^2). Позначимо через $H^h(-p,-q)$ відповідний спряжений (негативний) простір узагальнених функцій. Побудуємо ланцюжок просторів із комплексним спарюванням $\langle\langle \cdot , \cdot \rangle\rangle$, що є розширенням скалярного добутку $(\cdot , \cdot)_{(L^2)}$ в просторі (L^2) для будь-яких $p \in \mathbb{N}_3$ і $q \in \mathbb{N}$:

$$(\Phi^h)' \supset \ldots \supset H^h(-p,-q) \supset \ldots \supset (L^2) \supset \ldots \supset H^h(p,q) \supset \ldots \supset \Phi^h,$$

$$\Phi^h := \operatorname*{pr\,lim}_{p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}} H^h(p,q) = \bigcap_{p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}} H^h(p,q), \qquad (4.18)$$

$$(\Phi^h)' := \operatorname*{ind\,lim}_{p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}} H^h(-p,-q) = \bigcup_{p \in \mathbb{N}_3, q \in \mathbb{N}} H^h(-p,-q).$$

Оскільки простори $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, унітарно ізоморфні ваговим просторам Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ (1.4) з вагою (1.7), проективна границя яких $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ — ядерний простір, то і *простір* Φ^h *є ядерним.*

***Приклад* 4.2** (гауссівський аналіз). Нехай $h(x,\lambda) = \exp\langle x,\lambda\rangle$, $x \in Q = N_{-1}$, $\lambda \in N_{1,\mathbb{C}}$ (приклад 3.1). Будемо вважати, що вкладення $N_1 \hookrightarrow N_0$ є квазіядерним.

Оскільки $h_n(x) = x^{\otimes n}$, то кожен елемент простору $H^h(p,q) = H^{\exp}(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, має вигляд

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, x^{\otimes n}\rangle, \quad x \in Q = N_{-1} \subset N_{-p},$$
$$\|f\|^2_{H^{\exp}(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn} < \infty. \tag{4.19}$$

Нескладно показати, що функція f (4.19) є звуженням на N_{-p} цілої функції на $N_{-p,\mathbb{C}}$. Внаслідок однозначності розкладу цілої функції в ряд Тейлора відразу отримаємо мінімальність системи базисних функцій $(x^{\otimes n})_{n=0}^{\infty}$.

Далі, розглянемо класичний випадок гауссової міри g на гільбертовому оснащенні (1.1), яка на підставі теореми Мінлоса однозначно визначається своїм перетворенням Фур'є

$$\int_{\mathcal{N}'} \exp(i\langle x,\lambda\rangle) dg(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle \lambda,\lambda\rangle\right), \quad \lambda \in \mathcal{N}. \tag{4.20}$$

Оскільки права частина (4.20) є неперервною функцією в топології простору N_0 і вкладення $N_1 \hookrightarrow N_0$ квазіядерне, то на основі теореми Мінлоса–Сазонова (див. [4, 5]) міру g можна звузити на гільбертовий простір N_{-1} і розуміти її як ймовірнісну борелівську міру на $N_{-1} = Q$.

Відомо (див., наприклад, [4]), що множина неперервних поліномів $\mathcal{P}(Q) = \mathcal{P}(N_{-1})$ щільна в $L^2(N_{-1}, dg(x))$ і міра g (4.20) позитивна на непорожніх відкритих множинах в $Q = N_{-1}$. Крім того, очевидно, що перетворення Лапласа міри g

$$l_g(\lambda) = \int_{\mathcal{N}'} \exp\langle x,\lambda\rangle dg(x) = \exp\left(\frac{1}{2}\langle \lambda,\lambda\rangle\right), \quad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}}, \tag{4.21}$$

є аналітичною функцією в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$, а тому для базисних функцій $h_n(x) = x^{\otimes n} \in N_{-1}^{\hat{\otimes} n} \subset N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, оцінка (4.1) виконується автоматично (див. приклад 4.1).

Таким чином, якщо $h(x,\lambda) = \exp\langle x,\lambda\rangle$, $x \in Q = N_{-1}$, $\lambda \in N_{1,\mathbb{C}}$, і в якості міри ρ взяти міру Гаусса g, що визначається своїм перетворенням Фур'є (4.20), то на основі результатів, отриманих у даному пункті, можна побудувати теорію основних і узагальнених функцій нескінченновимірної змінної $x \in Q = N_{-1}$ зі спарюванням, що задається інтегруванням відносно міри Гаусса $dg(x)$. При цій побудові роль просторів основних функцій відіграють простори $H^{\exp}(p,q)$ функцій (4.19), а саме оснащення має вигляд

$$H^{\exp}(-p,-q) \supset L^2(N_{-1}, dg(x)) \supset H^{\exp}(p,q). \tag{4.22}$$

Корисно пересвідчитись, що функція $h(\cdot,\lambda)$ належить позитивному простору $H^h(p,q)$.

Твердження 4.1. *При* $\lambda \in N_{p,\mathbf{C}}$, $\|\lambda\|_{N_{p,\mathbf{C}}} < \min\{K^{-\frac{q}{2}},\ R_h\}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, *функція* (3.1) $h(\cdot,\lambda) \in H^h(p,q)$ *і*

$$\|h(\cdot\,,\lambda)\|_{H^h(p,q)} = \left(1 - \|\lambda\|^2_{N_{p,\mathbf{C}}} K^{\frac{q}{2}}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Доведення. Для даного λ $\|\lambda\|_{N_{2,\mathbf{C}}} \le \|\lambda\|_{N_{p,\mathbf{C}}} < R_h$, тому має місце зображення (3.1). Згідно з (4.5) маємо

$$\|h(\cdot\,,\lambda)\|^2_{H^h(p,q)} = \left\|\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, h_n(\cdot)\rangle\right\|^2_{H^h(p,q)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\|\lambda^{\otimes n}\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbf{C}}} K^{qn} = \sum_{n=0}^{\infty}\|\lambda\|^{2n}_{N_{p,\mathbf{C}}} K^{qn} = \left(1 - \|\lambda\|^2_{N_{p,\mathbf{C}}} K^{\frac{q}{2}}\right)^{-1}.$$

Зауваження **4.7.** Для кожного $x \in Q$ і $\lambda \in N_{p,\mathbf{C}}$, $\|\lambda\|_{N_{p,\mathbf{C}}} < R_h$, функцію $h(x,\lambda)$ можна подати у вигляді ряду (3.1). У свою чергу, кожен вектор простору $H^h(p,q)$ за означенням (4.5) є рядом, збіжним у топології даного простору. Тому надалі природно під вектором $h(\cdot\,,\lambda) \in H^h(p,q)$ розуміти ряд (3.1). Зрозуміло, що $h(\cdot\,,\lambda) \in H^h(p,q)$, якщо $\|\lambda\|_{N_{p,\mathbf{C}}} < K^{-\frac{q}{2}}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ (див. доведення твердження 4.1).

5. Інша система базисних функцій. У попередньому пункті ми за коефіцієнтами $h_n(x)$ розкладу (3.1), використовуючи правило (4.5), побудували простори основних функцій $H^h(p,q)$. Тепер, користуючись тим же правилом (4.5), побудуємо простори основних функцій за коефіцієнтами, які визначаються з розкладу типу (3.1), але для видозміненої лівої частини, тісно пов'язаної з $h(x,\lambda)$.

Нехай $\ell(\lambda)$ *є аналітичною функцією змінної* λ *в нулі простору* $N_{1,\mathbf{C}}$. Тоді для функції $\ell(\lambda)$ існує розклад у ряд типу (3.1):

$$\ell(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, \alpha_n\rangle, \tag{5.1}$$

$$\lambda \in B_1 = \{\lambda \in N_{2,\mathbf{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbf{C}}} < R_1\}, \quad \alpha_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{-2,\mathbf{C}},$$

який рівномірно збігається по λ в довільній замкненій кулі з B_1. *Припустимо, що* $\ell(0) \ne 0$. Зафіксуємо функцію ℓ, що має вказані властивості.

Оскільки функції $h(x,\lambda)$ і $\ell(\lambda)$ аналітичні в $0 \in N_{1,\mathbf{C}}$, то для кожного $x \in Q$ *функція* $\kappa(x,\lambda) := h(x,\lambda)\ell(\lambda)$ *є аналітичною за змінною* λ *в нулі простору* $N_{1,\mathbf{C}}$ і допускає зображення

$$\kappa(x,\lambda) = h(x,\lambda)\ell(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, \kappa_n(x)\rangle, \tag{5.2}$$

$$x \in Q, \quad \lambda \in B_\kappa = \{\lambda \in N_{2,\mathbf{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbf{C}}} < R_\kappa \le \min\{R_h, R_1\}\}.$$

Для кожного $x \in Q$ коефіцієнти $\kappa_n(x) \in N^{\hat{\otimes} n}_{-2,\mathbf{C}}$ ($\kappa_n(x)$ — базисні функції, пов'язані з κ).

Як і у випадку коефіцієнтів $h_n(x)$ розкладу (3.1), для $\kappa_n(x)$ справедливі аналоги зображень (3.3), (3.4) і оцінок (3.6), (3.7); в них $h(x,\lambda)$ і $h_n(x)$ потрібно замінити на $\kappa(x,\lambda)$ і $\kappa_n(x)$; зрозуміло, що $r\in(0,R_\kappa)$. А тому кожна базисна функція $Q\ni x\mapsto \kappa_n(x)\in N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $n\in\mathbb{N}$, слабконеперервна і локально обмежена.

Базисні функції $\kappa_n(x)$ і $h_n(x)$ виражаються одна через одну. Так, перемножаючи (3.1) (при $\lambda\in B_\kappa$) і (5.1), для будь-якого $x\in Q$ отримуємо

$$\kappa(x,\lambda)=h(x,\lambda)\ell(\lambda)=\sum_{n,m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\langle\lambda^{\otimes n},\alpha_n\rangle\langle\lambda^{\otimes m},h_m(x)\rangle=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\langle\lambda^{\otimes n},\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\alpha_{n-m}\hat{\otimes}h_m(x)\right\rangle,\quad \lambda\in B_\kappa.$$

Порівнюючи цей розклад з (5.2), маємо

$$\kappa_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\alpha_{n-m}\hat{\otimes}h_m(x),\qquad x\in Q,\quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{5.3}$$

Оскільки $\ell(0)\neq 0$, *то функція* $\ell^{-1}(\lambda)$ *аналітична в* $0\in N_{1,\mathbb{C}}$ і допускає зображення:

$$\frac{1}{\ell(\lambda)}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n},\beta_n\rangle, \tag{5.4}$$

$$\lambda\in B_2=\{\lambda\in N_{2,\mathbb{C}}\mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}<R_2\},\quad \beta_n\in N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}.$$

Аналогічно попередньому, перемножаючи (5.2) (при $\lambda\in B_\kappa$, вважаючи надалі скрізь $B_\kappa=\{\lambda\in N_{2,\mathbb{C}}\mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}<R_\kappa\le\min\{R_h,R_1,R_2\}\}$), (5.4) і порівнюючи з (3.1), отримуємо

$$h_n(x)=\sum_{m=0}^{n}\frac{n!}{m!(n-m)!}\beta_{n-m}\hat{\otimes}\kappa_m(x),\quad x\in Q,\ n\in\mathbb{N}_0. \tag{5.5}$$

Лема 5.1. *При наявності оцінки* (4.1) *має місце оцінка*

$$\Big\|\|\kappa_n(\cdot)\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}}\Big\|_{(L^2)}\le LD^n n!\quad \text{для деяких } L>0,\ D>0\ \text{і}\ \forall n\in\mathbb{N}_0. \tag{5.6}$$

І навпаки, наявність оцінки (5.6) *забезпечує існування оцінки* (4.1).

Доведення. Для коефіцієнтів розкладу (5.1) справедлива оцінка типу (3.7):

$$\|\alpha_n\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}}\le\frac{n!e^n\|O_{3,2}\|_{HS}^n}{r^n}\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r}|\ell(\lambda)|, \tag{5.7}$$

$$n\in\mathbb{N}_0,\quad r\in(0,R_1).$$

Поклавши

$$c_1=\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r}|\ell(\lambda)|,\quad r\in(0,R_1),\quad c_2=e\|O_{3,2}\|_{HS},$$

із (5.7) дістанемо

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \|\alpha_n\|_{N^{\hat{\otimes} n}_{-3,\mathbb{C}}} \le c_1 \left(\frac{c_2}{r}\right)^n n!\,. \tag{5.8}$$

Використавши (5.8) і (5.3), для довільного $x \in Q$ отримаємо

$$\|\kappa_n(x)\|_{N^{\hat{\otimes} n}_{-3,\mathbb{C}}} \le \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \|\alpha_{n-m}\|_{N^{\hat{\otimes}(n-m)}_{-3,\mathbb{C}}} \|h_m(x)\|_{N^{\hat{\otimes} m}_{-3,\mathbb{C}}} \le$$

$$\le c_1 n! \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\frac{c_2}{r}\right)^{n-m} \|h_m(x)\|_{N^{\hat{\otimes} m}_{-3,\mathbb{C}}} \le$$

$$\le c_1 \left(\frac{c_2}{r}\right)^n n! \sum_{m=0}^{n} \frac{1}{m!} \left(\frac{r}{c_2}\right)^m \|h_m(x)\|_{N^{\hat{\otimes} m}_{-3,\mathbb{C}}} \le$$

$$\le c_1 \left(\frac{c_2}{r}\right)^n n! \left(\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r}{c_2}\right)^m\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{1}{(m!)^2} \left(\frac{r}{c_2}\right)^m \|h_m(x)\|^2_{N^{\hat{\otimes} m}_{-3,\mathbb{C}}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Підносячи до квадрату останню нерівність і інтегруючи по $d\rho(x)$, за допомогою (4.1) знаходимо

$$\int_Q \|\kappa_n(x)\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-3,\mathbb{C}}} d\rho(x) \le L^2 c_1^2 \left(\frac{c_2}{r}\right)^{2n} (n!)^2 \left(\sum_{m=0}^{n} \left(\frac{r}{c_2}\right)^m\right) \sum_{m=0}^{n} \left(\frac{rC^2}{c_2}\right)^m. \tag{5.9}$$

Вибираючи $r \in (0, R_1)$ настільки малим, щоб $r < \min\{c_2, c_2 C^{-2}\}$, і замінюючи в (5.9) суми рядами, отримуємо

$$\forall n \in \mathbb{N}_0: \quad \int_Q \|\kappa_n(x)\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-3,\mathbb{C}}} d\rho(x) \le L^2 D^{2n} (n!)^2.$$

Обернене твердження леми доводиться аналогічно, лише необхідно замість оцінки (5.7) використати оцінку типу (3.7) для коефіцієнтів розкладу (5.4).

***Зауваження* 5.1.** Збіжність інтеграла (4.2) для деякого $r \in (0, R_\kappa)$ еквівалентна збіжності інтеграла

$$\int_Q \left(\sup_{\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}}=r} |\kappa(x,\lambda)|\right)^2 d\rho(x) < \infty, \quad \lambda \in N_{3,\mathbb{C}}. \tag{5.10}$$

Тому для виконання оцінок (4.1) і (5.6) достатньо, щоб існувало $r \in (0, R_\kappa)$ таке, щоб один з інтегралів (4.2) або (5.10) збігався.

Доведення потребує лише перша частина зауваження. Так, якщо інтеграл (4.2) збігається для деякого $r \in (0, R_\kappa)$, то враховуючи, що $\kappa(x,\lambda) = \ell(\lambda) h(x,\lambda)$ (тепер $\lambda \in B_\kappa$), отримуємо

$$\int_Q \left(\sup_{\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}}=r} |\kappa(x,\lambda)|\right)^2 d\rho(x) \le \left(\sup_{\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}}=r} |\ell(\lambda)|\right)^2 \int_Q \left(\sup_{\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}}=r} |h(x,\lambda)|\right)^2 d\rho(x) < \infty.$$

Обернене твердження доводиться аналогічно (нагадаємо, що $h(x,\lambda) = \kappa(x,\lambda) \times \times \ell^{-1}(\lambda)$ при $\lambda \in B_\kappa$).

При фіксованих $K > 1$, $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}$, використавши правило (4.5), побудуємо гільбертовий простір формальних рядів

$$H^\kappa(p,q) := \left\{ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \kappa_n(x) \rangle,\ f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n},\ x \in Q \right|$$

$$\left. \|f\|^2_{H^\kappa(p,q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|^2_{N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}} (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\} \qquad (5.11)$$

з відповідним скалярним добутком.

***Зауваження* 5.2.** Позначимо через $\mathcal{P}_\kappa(Q)$ множину всіх неперервних функцій вигляду

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle, \quad \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad x \in Q, \quad m \in \mathbb{N}$$

($\varphi = 0$ в $\mathcal{P}_\kappa(Q)$ тоді і лише тоді, коли $\varphi_n = 0$, $n = 0, \ldots, m$). Множина $\mathcal{P}_\kappa(Q)$ є лінійною множиною, щільною в гільбертовому просторі $H^\kappa(p,q)$, $p \in N_2$, $q \in \mathbb{N}$, з лінійною структурою, подібною до тієї, яку ми визначили на множині $\mathcal{P}_h(Q)$ (див. зауваження 4.2).

Аналог леми 4.2 у цьому випадку зберігається: при достатньо великому $K > 1$ для кожної кулі $U \subset Q$ існує константа $c = c(U) > 0$ така, що

$$|f(x)| < c\|f\|_{H^\kappa(p,q)}, \qquad x \in U, \quad f \in H^\kappa(p,q), \quad p \in \mathbb{N}_3, \quad q \in \mathbb{N}. \qquad (5.12)$$

Доведення цього факту не відрізняється від доведення леми 4.2, необхідно лише використати оцінку типу (3.7) для коефіцієнтів ряду (5.2).

Зрозуміло, що лема 4.3 також зберігається. А саме, існує константа $c > 0$ така, що

$$\|f\|_{(L^2)} \le c\|f\|_{H^\kappa(p,q)}, \qquad f \in H^\kappa(p,q), \quad p \in \mathbb{N}_3, \quad q \in \mathbb{N}. \qquad (5.13)$$

Вибір константи K подібний до вказаного в п. 4. У подальшому будемо вибирати константу K, яка фігурує в означеннях просторів $H^h(p,q)$ і $H^\kappa(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, спільною для них, тобто

$$K > \max\{1,\ C^2,\ D^2,\ \|O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 R_\kappa^{-2}\}. \qquad (5.14)$$

Ми переконалися, що вихідні припущення п. 4, накладені на $h_n(x)$, приводять до аналогічних фактів для $\kappa_n(x)$. Тому згідно з результатами п. 4 простір $H^\kappa(p,q)$ можна сприймати як позитивний відносно нульового (L^2), встановивши попередньо мінімальність системи базисних функцій $\kappa_n(x)$ та щільність множини $\mathcal{P}_\kappa(Q)$ в (L^2).

Звернемо увагу на те, що в деяких спеціальних випадках (наприклад, ортогональності, див. п. 6) вдається показати щільність і неперервність вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow (L^2)$, не беручи до уваги, позитивна міра ρ на відкритих множинах в Q чи ні. Зрозуміло, що якщо міра ρ позитивна не на всіх відкритих непорожніх множинах, то метод встановлення такого вкладення, запропонований в п. 4, не діє. Тому постає питання: як показати щільність і неперервність вкладення $H^{\kappa}(p,q) \hookrightarrow (L^2)$ (в припущенні, що існує вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow (L^2)$) так, щоб техніка встановлення цього вкладення не була чутливою до позитивності міри ρ на відкритих множинах.

Неважко зрозуміти, що для цього досить встановити щільність і неперервність вкладення $H^{\kappa}(p,q+t) \hookrightarrow H^h(p,q)$ (при деякому $t \in \mathbb{N}_0$), яке завдяки вкладенню $H^h(p,q) \hookrightarrow (L^2)$ забезпечить існування вкладення $H^{\kappa}(p,q+t) \hookrightarrow (L^2)$. В результаті одержаного вкладення $H^{\kappa}p,q+t) \hookrightarrow H^h(p,q)$ ми легко отримаємо мінімальність системи $\kappa_n(x)$.

Наведемо важливий результат про зв'язок просторів $H^h(p,q)$ і $H^{\kappa}(p,q)$.

Перш за все нагадаємо один важливий і потрібний у подальшому факт: якщо $\xi_k \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k}$, $f_m \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}$ і $m \geq k$, то існує вектор $f_m^{\xi_k} \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}$, $p \in \mathbb{N}_0$, такий, що

$$\langle f_m, \xi_k \hat{\otimes} \eta_{m-k} \rangle = \langle f_m^{\xi_k}, \eta_{m-k} \rangle \quad \forall \eta_{m-k} \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}, \tag{5.15}$$

$$\|f_m^{\xi_k}\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}} \leq \|\xi_k\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k}} \|f_m\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}}.$$

Справді, оператор $N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)} \ni \eta_{m-k} \mapsto A\eta_{m-k} = \xi_k \hat{\otimes} \eta_{m-k} \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}$ неперервний і його норма не перевищує $\|\xi_k\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k}}$, тоді спряжений до нього A^+ відносно $\langle \cdot, \cdot \rangle$ діє із $N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}$ в $N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}$ і $\|A\| = \|A^+\|$. Рівність і оцінка (5.15) випливають із цього зауваження: $f_m^{\xi_k} := A^+ f_m$.

Неважко бачити, що відображення

$$N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m} \ni f_m \mapsto f_m^{\xi_k} \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}, \qquad \xi_k \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad m \geq k \in \mathbb{N}_0,$$

$$N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k} \ni \xi_k \mapsto f_m^{\xi_k} \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(m-k)}, \qquad f_m \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}, \quad p \in \mathbb{N}_0, \quad k \leq m \in \mathbb{N}_0,$$

лінійні. Інакше кажучи, при кожному фіксованому $\xi_k \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k}$, $p \in \mathbb{N}_0$, для довільних f_m, $g_m \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}$, $m \geq k \in \mathbb{N}_0$, та μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{C}^1$ маємо

$$(\mu_1 f_m + \mu_2 g_m)^{\xi_k} = \mu_1 f_m^{\xi_k} + \mu_2 g_m^{\xi_k}, \tag{5.16}$$

і навпаки, при фіксованому $f_m \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}$, $p \in \mathbb{N}_0$, для довільних ξ_k, $\eta_k \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k}$, $k \leq m \in \mathbb{N}_0$, та μ_1, $\mu_2 \in \mathbb{C}^1$

$$f_m^{\mu_1 \xi_k + \mu_2 \eta_k} = \mu_1 f_m^{\xi_k} + \mu_2 f_m^{\eta_k}. \tag{5.17}$$

Крім того, має місце рівність

$$(f_m^{\xi_k})^{\eta_n} = f_m^{\xi_k \hat{\otimes} \eta_n}, \tag{5.18}$$

де $f_m \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}$, $\xi_k \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}k}$, $\eta_n \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $p \in \mathbb{N}_0$, $m \geq k+n \in \mathbb{N}_0$.

Лема 5.2. *Лінійні множини $\mathcal{P}_h(Q)$ і $\mathcal{P}_{\kappa}(Q)$ алгебраїчно ізоморфні. Цей ізоморфізм задається відображенням (бієктивним)*

$$\mathcal{P}_{\kappa}(Q) \ni \varphi(\cdot) = \sum_{m=0}^{s} \langle \varphi_m, \kappa_m(\cdot) \rangle \mapsto (O_{\kappa,h}\varphi)(\cdot) = \sum_{m=0}^{s} \langle \widetilde{\varphi}_m, h_m(\cdot) \rangle \in \mathcal{P}_h(Q), \tag{5.19}$$

$$\widetilde{\varphi}_m = \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\alpha_{n-m}} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \tag{5.20}$$

$$\|\varphi_n^{\alpha_{n-m}}\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \leq \|\alpha_{n-m}\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \|\varphi_n\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \quad \forall p \in \mathbb{N}_2$$

(тут $\alpha_j \in N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} j} \subset (\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} j})'$ — коефіцієнти з розкладу (5.1)), причому для довільного елемента $\varphi \in \mathcal{P}_\kappa(Q)$

$$(O_{\kappa,h}\varphi)(x) = \varphi(x), \quad x \in Q. \tag{5.21}$$

Оберненим до (5.19) є відображення

$$\mathcal{P}_h(Q) \ni \varphi(\cdot) = \sum_{m=0}^{s} \langle \varphi_m, h_m(\cdot) \rangle \mapsto (O_{h,\kappa}\varphi)(\cdot) =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \langle \widetilde{\varphi}_m, \kappa_m(\cdot) \rangle \in \mathcal{P}_\kappa(Q), \tag{5.22}$$

$$\widetilde{\varphi}_m = \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\beta_{n-m}} \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}, \quad s \in \mathbb{N}_0, \tag{5.23}$$

$$\|\varphi_n^{\beta_{n-m}}\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \leq \|\beta_{n-m}\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \|\varphi_n\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \quad \forall p \in \mathbb{N}_2$$

(тут $\beta_j \in N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} j} \subset (\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} j})'$ — коефіцієнти з розкладу (5.4)). Зрозуміло, що для довільного $\varphi \in \mathcal{P}_h(Q)$

$$(O_{h,\kappa}\varphi)(x) = \varphi(x), \quad x \in Q.$$

Доведення. Покажемо, що відображення (5.22) визначено. Нехай $\varphi(\cdot) = \sum_{n=0}^{s} \langle \varphi_n, h_n(\cdot) \rangle \in \mathcal{P}_h(Q)$, $s \in \mathbb{N}_0$. Використавши (5.5) і (5.15), отримаємо необхідне

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{s} \langle \varphi_n, h_n(x) \rangle = \sum_{n=0}^{s} \left\langle \varphi_n, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \beta_{n-m} \hat{\otimes} \kappa_m(x) \right\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{s} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \langle \varphi_n, \beta_{n-m} \hat{\otimes} \kappa_m(x) \rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{s} \sum_{m=0}^{n} \left\langle \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\beta_{n-m}}, \kappa_m(x) \right\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \left\langle \sum_{n=m}^{s} \frac{n!}{m!(n-m)!} \varphi_n^{\beta_{n-m}}, \kappa_m(x) \right\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{s} \langle \widetilde{\varphi}_m, \kappa_m(x) \rangle =: (O_{h,\kappa}\varphi)(x), \quad x \in Q.$$

Аналогічно, використавши (5.3) і (5.15), неважко переконатися в існуванні відображення (5.19).

Для встановлення леми залишилося довести рівності

$$O_{\kappa,h}O_{h,\kappa} = \mathrm{id}_h, \qquad O_{h,\kappa}O_{\kappa,h} = \mathrm{id}_\kappa, \tag{5.24}$$

де id_h і id_κ — тотожні відображення відповідно в $\mathcal{P}_h(Q)$ і $\mathcal{P}_\kappa(Q)$.

Переконаємося в справедливості другої рівності в (5.24) (справедливість першої рівності в (5.24) перевіряється аналогічно). Нехай $\varphi(\cdot) = \sum_{m=0}^{s}\langle\varphi_m, \kappa_m(\cdot)\rangle \in \mathcal{P}_\kappa(Q)$, $s \in \mathbb{N}_0$. Використовуючи (5.19) і (5.22), маємо

$$(O_{h,\kappa}O_{\kappa,h}\varphi)(x) = (O_{h,\kappa}(O_{\kappa,h}\varphi))(x) =$$

$$= \left(O_{h,\kappa}\left(\sum_{m=0}^{s}\langle\widetilde{\varphi}_m, h_m(\cdot)\rangle\right)\right)(x) = \sum_{m=0}^{s}\langle\widetilde{\widetilde{\varphi}}_m, \kappa_m(\cdot)\rangle,$$

де

$$\widetilde{\varphi}_m = \sum_{n=m}^{s}\frac{n!\,\cdot}{m!(n-m)!}\varphi_n^{\alpha_{n-m}}, \qquad \widetilde{\widetilde{\varphi}}_m = \sum_{n=m}^{s}\frac{n!}{m!(n-m)!}\widetilde{\varphi}_n^{\beta_{n-m}}. \tag{5.25}$$

Зрозуміло, що другу рівність в (5.24) буде встановлено, якщо ми покажемо, що

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}}_m = \varphi_m, \quad m = 0, \ldots, s.$$

Підставляючи в другу рівність в (5.25) вираз для $\widetilde{\varphi}_m$, використовуючи (5.16), (5.17) і (5.18), дістаємо

$$\widetilde{\widetilde{\varphi}}_m = \sum_{n=m}^{s}\frac{n!}{m!(n-m)!}\widetilde{\varphi}_n^{\beta_{n-m}} = \sum_{n=m}^{s}\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\sum_{k=n}^{s}\frac{k!}{n!(k-n)!}\varphi_k^{\alpha_{k-n}}\right)^{\beta_{n-m}} =$$

$$= \sum_{k=m}^{s}\frac{k!}{m!}\varphi_k^{\sum_{n=m}^{k}\frac{1}{(n-m)!(k-n)!}\alpha_{k-n}\hat{\otimes}\beta_{n-m}} = \varphi_m.$$

Остання рівність випливає із властивостей функцій $\ell(\lambda)$ і $\dfrac{1}{\ell(\lambda)}$. Так, перемножаючи розклади (5.1) і (5.4) (при $\lambda \in B_2$), отримуємо

$$1 = \ell(\lambda)\frac{1}{\ell(\lambda)} = \sum_{l,n=0}^{\infty}\frac{1}{l!n!}\langle\lambda^{\otimes l}, \alpha_l\rangle\langle\lambda^{\otimes n}, \beta_n\rangle =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}\left\langle\lambda^{\otimes l}, \sum_{n=0}^{l}\frac{l!}{n!(l-n)!}\alpha_{l-n}\hat{\otimes}\beta_n\right\rangle,$$

звідки $\alpha_0\beta_0 = 1$ і

$$\forall l \in \mathbb{N}: \quad 0 = \sum_{n=0}^{l}\frac{1}{n!(l-n)!}\alpha_{l-n}\hat{\otimes}\beta_n = \sum_{n=m}^{k=l+m}\frac{1}{(n-m)!(k-n)!}\alpha_{k-n}\hat{\otimes}\beta_{n-m}.$$

Лему доведено.

***Зауваження* 5.3.** Зважаючи на те, що при бієктивному відображенні $O_{h,\kappa}: \mathcal{P}_h(Q) \to \mathcal{P}_\kappa(Q)$ відповідні елементи збігаються як функції змінної $x \in Q$ (тобто $(O_{h,\kappa}\varphi)(x) = \varphi(x)$ $\forall x \in Q$, $\varphi \in \mathcal{P}_h(Q)$), для довільної функції $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ (див. зауваження 4.3) існує однозначне зображення

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, \kappa_n(x) \rangle, \qquad \varphi_n \in \mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad x \in Q, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{5.26}$$

і навпаки, довільна функція вигляду (5.26) належить $\mathcal{P}(Q)$. Як результат, множину $\mathcal{P}_\kappa(Q)$ можна інтерпретувати як множину неперервних локально обмежених функцій φ на Q, котрі допускають розклад (5.26). Більш того, за такої інтерпретації множина $\mathcal{P}_\kappa(Q)$ збігається з множиною $\mathcal{P}(Q)$.

Теорема 5.1. *Існує $t \in \mathbb{N}$ таке, що для довільних $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ є справедливими щільні і неперервні вкладення*

$$H^h(p, q+2t) \hookrightarrow H^\kappa(p, q+t), \qquad H^\kappa(p, q+2t) \hookrightarrow H^h(p, q+t). \tag{5.27}$$

***Зауваження* 5.4.** Простір $H^\kappa(p, q+2t)$ вкладається у простір $H^h(p, q+t)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, оператором вкладення, що є продовженням за неперервністю лінійного оператора

$$H^\kappa(p, q+2t) \supset \mathcal{P}_\kappa(Q) \ni \varphi \mapsto O_{\kappa,h}\varphi \in \mathcal{P}_h(Q) \subset H^h(p, q+t)$$

(тут $O_{\kappa,h}$ — бієкція (5.19) із $\mathcal{P}_\kappa(Q)$ на $\mathcal{P}_h(Q)$; ми зберігаємо позначення $O_{\kappa,h}$ для продовження).

Аналогічно, простір $H^h(p, q+2t)$ вкладається у простір $H^\kappa(p, q+t)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, оператором вкладення, що є продовженням за неперервністю лінійного оператора

$$H^h(p, q+2t) \supset \mathcal{P}_h(Q) \ni \varphi \mapsto O_{h,\kappa}\varphi \in \mathcal{P}_\kappa(Q) \subset H^\kappa(p, q+t)$$

(тут $O_{h,\kappa}$ — бієкція (5.22) із $\mathcal{P}_h(Q)$ на $\mathcal{P}_\kappa(Q)$; ми зберігаємо позначення $O_{h,\kappa}$ для продовження).

Доведення. Встановимо друге вкладення в (5.27) (перше встановлюється аналогічно). Згідно з зауваженням 0.1 для цього потрібно переконатися в існуванні константи $c > 0$ такої, що

$$\|O_{\kappa,h}\varphi\|_{H^h(p,q+t)} \le c\|\varphi\|_{H^\kappa(p,q+2t)}, \quad \varphi \in \mathcal{P}_\kappa(Q),$$

і, крім того, показати, що для довільної фундаментальної за нормою $\|\cdot\|_{H^\kappa(p,q+2t)}$ послідовності $(\varphi_n)_{n=0}^\infty$, $\varphi_n \in \mathcal{P}_\kappa(Q)$, збіжність $O_{\kappa,h}\varphi_n \to 0$ при $n \to 0$ в топології простору $H^h(p, q+t)$ приводить до збіжності $\varphi_n \to 0$ при $n \to 0$ в топології простору $H^\kappa(p, q+2t)$. Цим ми встановимо неперервність вкладення $H^\kappa(p, q+2t)$ в $H^h(p, q+t)$. Щільність цього вкладення випливає з того, що $\operatorname{Ran}(O_{\kappa,h}) = \mathcal{P}_h(Q)$, і з щільності множини $\mathcal{P}_h(Q)$ в $H^h(p, q+t)$.

Неважко бачити, що для доведення теореми досить показати, що при довільних фіксованих $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$

$$c'\|\varphi\|_{H^\kappa(p,q)} \le \|O_{\kappa,h}\varphi\|_{H^h(p,q+t)} \le c''\|\varphi\|_{H^\kappa(p,q+2t)} \tag{5.28}$$

для деяких $t \in \mathbb{N}$, $c' > 0$, $c'' > 0$ і для всіх $\varphi \in \mathcal{P}_\kappa(Q)$.

Справді, якщо послідовність $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$, $\varphi_n \in \mathcal{P}_\kappa(Q)$, фундаментальна у просторі $H^\kappa(p,q+2t)$ і $O_{\kappa,h}\varphi_n \to 0$ при $n\to\infty$ у просторі $H^h(p,q+t)$, то на підставі (5.28) $\varphi_n \to 0$ при $n \to 0$ у просторі $H^\kappa(p,q)$. Оскільки простір $H^\kappa(p,q+2t)$ вкладається у простір $H^\kappa(p,q)$ (оператором вкладення, що кожному елементу $f\in H^\kappa(p,q+2t)$ ставить у відповідність цей самий елемент f, котрий вже розуміємо як елемент простору $H^\kappa(p,q)$), то дана послідовність збігається до 0 і в $H^\kappa(p,q+2t)$.

Встановимо справедливість оцінки (5.28). Зафіксуємо деяке $t\in\mathbb{N}_0$. Оцінимо $\|O_{\kappa,h}\varphi\|_{H^h(p,q)}$ для довільного $\varphi\in\mathcal{P}_\kappa(Q)$, $\varphi(x)=\sum_{m=0}^{s}\langle\varphi_m,\kappa_m(x)\rangle$, $p\in\mathbb{N}_3$, $q\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}_0$. Згідно з (5.23) маємо

$$\|O_{\kappa,h}\varphi\|^2_{H^h(p,q)} = \left\|\sum_{m=0}^{s}\langle\widetilde{\varphi}_m, h_m(\cdot)\rangle\right\|^2_{H^h(p,q)} = \sum_{m=0}^{s}\|\widetilde{\varphi}_m\|^2_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}}(m!)^2K^{qm} =$$

$$= \sum_{m=0}^{s}\left\|\sum_{n=m}^{s}\frac{n!}{m!(n-m)!}\varphi_n^{\alpha_{n-m}}\right\|^2_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}}(m!)^2K^{qm} \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{s}(m!)^2K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{s}\frac{n!}{m!(n-m)!}\|\alpha_{n-m}\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}}\|\varphi_n\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}\right)^2 \le$$

$$\le \sum_{m=0}^{s}(m!)^2K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{s}\|\varphi_n\|^2_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}(n!)^2K^{(q+t)n}\right)\left(\sum_{n=m}^{s}\frac{\|\alpha_{n-m}\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}}}{(m!(n-m)!)^2K^{(q+t)n}}\right) \le$$

$$\le \|\varphi\|^2_{H^\kappa(p,q+t)}\sum_{m=0}^{s}K^{qm}\left(\sum_{n=m}^{s}\frac{\|\alpha_{n-m}\|^2_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}}}{((n-m)!)^2K^{(q+t)n}}\right).$$

Тепер оцінимо $\|\alpha_{n-m}\|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}}$, використовуючи (5.7). В результаті отримаємо

$$\forall r\in(0,R_1):\quad \|O_{\kappa,h}\varphi\|^2_{H^h(p,q)} \le$$

$$\le \|\varphi\|^2_{H^\kappa(p,q+t)}\sum_{m=0}^{s}\sum_{n=m}^{s}c_1^2(c_2r^{-1})^{2(n-m)}K^{-(q+t)n+qm} =$$

$$= c_1^2\|\varphi\|^2_{H^\kappa(p,q+t)}\sum_{m=0}^{s}\sum_{n=m}^{s}\left((c_2r^{-1})^2K^{-(q+t)}\right)^{n-m}K^{-tm} =$$

$$= c_1^2\|\varphi\|^2_{H^\kappa(p,q+t)}\sum_{m=0}^{s}K^{-tm}\sum_{n=0}^{s}\left((c_2r^{-1})^2K^{-(q+t)}\right)^{n} \le$$

$$\le c_1^2\|\varphi\|^2_{H^\kappa(p,q+t)}\sum_{m=0}^{\infty}K^{-tm}\sum_{n=0}^{\infty}\left((c_2r^{-1})^2K^{-(q+t)}\right)^{n}, \tag{5.29}$$

де $c_1=\sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}}=r}|\ell(\lambda)|$, $r\in(0,R_1)$; $c_2=\|O_{3,2}\|_{HS}e$.

Зафіксуємо $r \in (0, R_\kappa)$ і виберемо $t \in \mathbb{N}_0$ настільки великим, щоб $K^{-t} < 1$ і $c_3 = (c_2 r^{-1})^2 K^{-t}$ було меншим за одиницю (нагадаємо, що $R_\kappa \le R_1$). Оскільки $K > 1$, то для будь-якого $q \in \mathbb{N}$ $(c_2 r^{-1})^2 K^{-(q+t)} = c_3 K^{-q} < c_3 < 1$. Підсумовуючи ряди у правій частині (5.29), отримуємо

$$\|O_{\kappa,h}\varphi\|^2_{H^h(p,q)} \le c_1^2 \frac{K^t}{K^t - 1} \frac{1}{1 - c_3 K^{-q}} \|\varphi\|^2_{H^\kappa(p,q+t)}. \tag{5.30}$$

Аналогічно можна встановити оцінку

$$\|O_{h,\kappa}\psi\|^2_{H^\kappa(p,q)} \le c_4^2 \|\psi\|^2_{H^h(p,q+t)} \tag{5.31}$$

для $\psi \in \mathcal{P}_h(Q)$, $\psi(x) = \sum_{n=0}^s \langle \psi_n, h_n(x)\rangle$. При цьому потрібно скористатися формулами (5.20) і оцінити $\|\beta_{n-m}\|_{N^{\hat\otimes(n-m)}_{-p,\mathbb{C}}} \le \|\beta_{n-m}\|_{N^{\hat\otimes(n-m)}_{-3,\mathbb{C}}}$ таким чином. Коефіцієнти $\beta_n \in N^{\hat\otimes(n-m)}_{-2,\mathbb{C}}$ визначаються із розкладу (5.4), тому можна повторити доведення оцінки (3.7), яка тепер має вигляд

$$\|\beta_n\|_{N^{\hat\otimes n}_{-3,\mathbb{C}}} \le \frac{n! e^n \|O_{3,2}\|^n_{HS}}{r^n} \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = r} |\ell^{-1}(\lambda)|, \quad r \in (0, R_2). \tag{5.32}$$

Із (5.32) легко отримати аналог нерівності (5.8):

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad \|\beta_n\|_{N^{\hat\otimes n}_{-3,\mathbb{C}}} \le c_5 \left(\frac{c_2}{r}\right)^n n!,$$

$$c_5 = \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = r} |\ell^{-1}(\lambda)|, \qquad c_2 = \|O_{3,2}\|_{HS} e, \quad r \in (0, R_2). \tag{5.33}$$

Остання нерівність дозволяє повторити доведення (5.29) і отримати оцінку (5.31), причому оскільки $R_\kappa \le R_2$, то при доведенні (5.31) можна взяти $r \in (0, R_\kappa)$. Це дозволяє вибір $t \in \mathbb{N}$ залишити тим самим.

Оскільки $O_{\kappa,h} : \mathcal{P}_\kappa(Q) \to \mathcal{P}_h(Q)$ — бієкція, то для довільного $\psi \in \mathcal{P}_h(Q)$ існує єдиний елемент $\varphi \in \mathcal{P}_\kappa(Q)$ такий, що $O_{\kappa,h}\varphi = \psi$. Підставивши його в нерівність (5.31) і врахувавши, що $O_{h,\kappa}\psi = O_{h,\kappa}O_{\kappa,h}\varphi = \varphi$, отримаємо

$$\|\varphi\|^2_{H^\kappa(p,q)} \le c_4^2 \|O_{\kappa,h}\varphi\|^2_{H^h(p,q+t)}, \quad \varphi \in \mathcal{P}_\kappa(Q). \tag{5.34}$$

На підставі (5.30) і (5.34) відразу отримуємо (5.28).

Теорему доведено.

Зауваження **5.5.** Для того щоб мала місце оцінка (5.28), потрібно вибирати $t \in \mathbb{N}$ таким, щоб

$$K^t > \max\{1, \|O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 R_\kappa^{-2}\} \tag{5.35}$$

(при доведенні теореми 5.1 необхідно брати $r = R_\kappa - \varepsilon$ з достатньо малим фіксованим $\varepsilon > 0$). Враховуючи, що $K > \max\{1, C^2, D^2, \|O_{3,2}\|^2_{HS} e^2 R_\kappa^{-2}\}$, легко помітити, що $t = 1$ задовольняє нерівність (5.35). Таким чином, для будь-яких $p, q \in \mathbb{N}_3$ мають місце щільні і неперервні вкладення

$$H^h(p,q) \hookrightarrow H^\kappa(p,q-1), \qquad H^\kappa(p,q) \hookrightarrow H^h(p,q-1). \tag{5.36}$$

Згідно з зауваженням 5.4 простір $H^{\kappa}(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, вкладається у простір $H^h(p,q-1)$ (оператором вкладення $O_{\kappa,h}$) шляхом ототожнення кожного вектора $f \in H^{\kappa}(p,q)$ з відповідним вектором $O_{\kappa,h}f \in H^h(p,q-1)$. Неважко бачити, що при такому ототожненні

$$f(x) = (O_{\kappa,h}f)(x), \quad x \in Q. \tag{5.37}$$

Справді, нехай $f \in H^{\kappa}(p,q)$ і $\mathcal{P}_{\kappa}(Q) \ni \varphi_n \to f$ в $H^{\kappa}(p,q)$, тоді $\mathcal{P}_h(Q) \ni$ $\ni O_{\kappa,h}\varphi_n \to O_{\kappa,h}f$ в $H^h(p,q-1)$. Використовуючи (4.7) і (5.12) та враховуючи, що при кожному $n \in \mathbb{N}_0$ $\varphi_n(x) = (O_{\kappa,h}\varphi_n)(x)$ $\forall x \in Q$, маємо: для кожної кулі $U \subset Q$ існують константи $c_1 = c_1(U) > 0$ і $c_2 = c_2(U) > 0$ такі, що для довільного $x \in U$

$$|f(x) - (O_{\kappa,h}f)(x)| = |f(x) - \varphi_n(x) + \varphi_n(x) - (O_{\kappa,h}f)(x)| \leq$$

$$\leq |f(x) - \varphi_n(x)| + |(O_{\kappa,h}\varphi_n)(x) - (O_{\kappa,h}f)(x)| \leq$$

$$\leq c_1\|f - \varphi_n\|_{H^{\kappa}(p,q)} + c_2\|O_{\kappa,h}\varphi_n - O_{\kappa,h}f\|_{H^h(p,q-1)} \longrightarrow 0$$

при $n \to \infty$, а тому $f(x) = (O_{\kappa,h}f)(x)$ $\forall x \in Q$.

Лема 5.3. *Система базисних функцій $(\kappa_n(x))_{n=0}^{\infty}$ мінімальна в такому розумінні: якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, \kappa_n(x)\rangle = f(x)$, $f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, збігається в $H^{\kappa}(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, і його сума дорівнює 0 для всіх $x \in Q$, то $f_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Іншими словами, якщо $f \in H^{\kappa}(p,q)$ і $f(x) = 0$ $\forall x \in Q$, то $f = 0$ в топології простору $H^{\kappa}(p,q)$.*

Доведення. Нехай $f \in H^{\kappa}(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, і $f(x) = 0$ $\forall x \in Q$. Оскільки має місце вкладення $H^{\kappa}(p,q) \hookrightarrow H^h(p,q-1)$, то можна ототожнити вектор f з відповідним вектором $O_{\kappa,h}f \in H^h(p,q-1)$, а тому для доведення леми досить показати, що $O_{\kappa,h}f = 0$ як елемент простору $H^h(p,q-1)$.

Врахувавши те, що $f(x) = (O_{\kappa,h}f)(x) = 0$ $\forall x \in Q$ (див. (5.37)) і система базисних функцій $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ мінімальна, відразу отримаємо необхідне, тобто $O_{\kappa,h}f = 0$ як елемент простору $H^h(p,q-1)$.

Лему доведено.

***Зауваження* 5.6.** Зазначимо, що мінімальність системи базисних функцій $(\kappa_n(x))_{n=0}^{\infty}$ можна було встановити й іншим способом, використавши підхід, запропонований в [49] для встановлення мінімальності квазіаппелевих систем.

***Зауваження* 5.7.** Гільбертовий простір $H^{\kappa}(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, можна трактувати як множину неперервних локально обмежених функцій f на Q, що допускають зображення (порівняйте із зауваженням 4.4)

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, \kappa_n(x)\rangle \quad x \in Q, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\|f_n\|^2_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}(n!)^2K^{qn} < \infty, \quad p,q \in \mathbb{N}_3,$$

з відповідною гільбертовою нормою $\|\cdot\|_{H^{\kappa}(p,q)}$, заданою на цій множині.

Беручи до уваги зауваження 4.3, 5.7, 5.4 і рівність (5.37), неважко помітити, що простір $H^{\kappa}(p,q)$ вкладається у простір $H^h(p,q-1)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, оператором вкладення, який кожній функції $f \in H^{\kappa}(p,q)$, записаній у вигляді $f(x) =$

$= \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, \kappa_n(x)\rangle$, $x \in Q$, ставить у відповідність цю саму функцію f, але записану у вигляді $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle \bar{f}_n, h_n(x)\rangle$, $x \in Q$, котру вже розуміємо як елемент простору $H^h(p, q-1)$.

Простір $H^h(p,q)$ вкладається у простір $H^\kappa(p,q-1)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, аналогічним чином.

Лема 5.4. *Має місце неперервне вкладення* $H^\kappa(p,q) \hookrightarrow C(Q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$.

Доведення. Згідно з зауваженням 5.5 і теоремою 4.1 мають місце неперервні вкладення $H^\kappa(p,q+2) \hookrightarrow H^h(p,q+1) \hookrightarrow C(Q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, тобто $H^\kappa(p,q) \hookrightarrow$ $\hookrightarrow C(Q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$.

Справедлива така теорема.

Теорема 5.2. *Простір* $H^\kappa(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, *щільно і неперервно вкладається в* (L^2).

Доведення. Згідно з зауваженням 5.5 і теоремою 4.1 мають місце щільні і неперервні вкладення $H^\kappa(p,q+2) \hookrightarrow H^h(p,q+1) \hookrightarrow (L^2)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, тобто $H^\kappa(p,q) \hookrightarrow (L^2)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$.

Як і в п. 4, можна побудувати ланцюжок типу (4.18), більш точно, має місце така теорема.

Теорема 5.3. *Простори* $H^\kappa(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, *побудовані за правилом* (5.11), *і спряжені до них утворюють ядерний ланцюжок просторів для будь-яких* $p,q \in \mathbb{N}_3$:

$$(\Phi^\kappa)' \supset \ldots \supset H^\kappa(-p,-q) \supset \ldots\ldots \supset (L^2) \supset \ldots \supset H^\kappa(p,q) \supset \ldots \supset \Phi^\kappa,$$

$$\Phi^\kappa := \operatorname*{pr\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_3} H^\kappa(p,q) = \bigcap_{p,q\in\mathbb{N}_3} H^\kappa(p,q), \tag{5.38}$$

$$(\Phi^\kappa)' := \operatorname*{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_3} H^\kappa(-p,-q) = \bigcup_{p,q\in\mathbb{N}_3} H^\kappa(-p,-q).$$

Крім того, мають місце щільні і неперервні вкладення

$$\begin{gathered} H^h(p,q) \hookrightarrow H^\kappa(p,q-1), \qquad H^\kappa(p,q) \hookrightarrow H^h(p,q-1), \\ H^\kappa(-p,-(q-1)) \hookrightarrow H^h(-p,-q), \qquad H^h(-p,-(q-1)) \hookrightarrow H^\kappa(-p,-q). \end{gathered} \tag{5.39}$$

Таким чином, $\Phi^h = \Phi^\kappa =: \Phi$, $(\Phi^h)' = (\Phi^\kappa)' =: \Phi'$.

Відмітимо, що $H^h(p,q)$ та $H^\kappa(p,q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, збігаються як топологічні простори. Доведення цього факту буде наведено в одній із наступних робіт В. А. Теска.

6. Простори узагальнених функцій. Нагадаємо відомі факти, пов'язані з оснащенням гільбертових просторів [3, 4]. Нехай комплексний гільбертовий простір H_+ є зваженою ортогональною сумою своїх підпросторів H_n, тобто

$$H_+ = \bigoplus_{n=0,\gamma}^{\infty} H_n = \left\{ f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n,\ f_n \in H_n \,\middle|\, \|f\|^2_{H_+} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{H_n}\gamma_n < \infty \right\}. \tag{6.1}$$

Тут $\gamma = (\gamma_n)_{n=0}^{\infty}$, $\gamma_n > 1$, — задана послідовність ваг.

Припустимо, що простір H_+ щільно і неперервно вкладений у нульовий гільбертовий простір H. Це дає змогу побудувати оснащення простору H позитивними і негативними просторами H_+ і H_-:

$$H_- \supset H \supset H_+.$$

Нехай $\mathbb{I}: H_- \to H_+$ — канонічна ізометрія, що переводить H_- в H_+. Неважко бачити, що простір H_- можна однозначно подати у вигляді ортогональної суми своїх підпросторів, які є прообразами підпросторів H_n простору H_+ при вказаній вище ізометрії. Точніше, $\mathbb{I}^{-1}$ переводить ортогональну суму (6.1) в аналогічну зважену ортогональну суму підпросторів $\mathbb{I}^{-1}H_n =: H_{-n}$ простору H_-:

$$H_- = \bigoplus\nolimits_{n=0,\gamma}^{\infty} H_{-n} = \Big\{\theta = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \theta_n,\ \theta_n \in H_{-n} \,\Big|$$

$$\|\theta\|_{H_-}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\theta_n\|_{H_{-n}}^2 \gamma_n < \infty\Big\}. \tag{6.2}$$

Спарювання між H_- і H_+ задається через скалярний добуток в H: $\forall\theta \in H_-$, $\forall f \in H_+$ $\exists(\theta, f)_H$. Координатно запис спарювання має вигляд

$$(\theta, f)_H = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta_n, \sum_{m=0}^{\infty} f_m\right)_H = \sum_{n,m=0}^{\infty} (\theta_n, f_m)_H =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \Big(\mathbb{I}\theta_n, f_m\Big)_{H_+} = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\mathbb{I}\theta_n, f_n\Big)_{H_+} = \sum_{n=0}^{\infty} (\theta_n, f_n)_H.$$

Таким чином, для довільних $\theta \in H_-$ і $f \in H_+$

$$(\theta, f)_H = \sum_{n=0}^{\infty} (\theta_n, f_n)_H. \tag{6.3}$$

На підставі (6.3)

$$(\theta_n, f_m)_H = \delta_{n,m}(\theta_n, f_n)_H = \delta_{n,m}(\mathbb{I}\theta_n, f_n)_{H_+} = \delta_{n,m}(\mathbb{I}\theta_n, f_n)_{H_n}\gamma_n, \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{6.4}$$

Повернемося до просторів, пов'язаних з базисними функціями $h_n(x)$ і $\kappa_n(x)$. Зафіксуємо $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$. Згідно з (4.5) простір $H^h(p, q)$ має вигляд

$$H^h(p, q) = \Big\{f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, h_n(x)\rangle,\ f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},\ x \in Q \,\Big|$$

$$\|f\|_{H^h(p,q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty\Big\}.$$

Наділимо позитивний простір $H^h(p, q)$ ортогональною структурою, що переноситься унітарним ізоморфізмом I_+^h (4.13) із простору Фока $\mathcal{F}(N_p, \gamma(q))$ з вагою (1.7). А саме, покладемо

$$H_n^h(p) := I_+^h \mathcal{F}_n(N_p) =$$

$$= \left\{ \langle f_n, h_n(x) \rangle,\ f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},\ x \in Q \,\middle|\, \|\langle f_n, h_n(x) \rangle\|_{H_n^h(p)} = \|f_n\|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \right\}. \quad (6.5)$$

Тоді

$$H^h(p,q) = \bigoplus_{n=0,\gamma(q)}^{\infty} H_n^h(p), \qquad \gamma(q) = (\gamma_n(q))_{n=0}^{\infty}, \quad \gamma_n(q) = (n!)^2 K^{qn}. \quad (6.6)$$

Негативний простір $H^h(-p,-q)$ відносно нульового $H = (L^2)$ і позитивного $H^h(p,q)$ у відповідності з (6.2), (6.5) і (6.6) має вигляд

$$H^h(-p,-q) = \left\{ \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n,\ \theta_n \in H_{-n}^h(p,q) \,\middle|\, \|\theta\|_{H^h(-p,-q)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\theta_n\|_{H_{-n}^h(p,q)}^2 (n!)^2 K^{qn} < \infty \right\}, \quad (6.7)$$

$$H_{-n}^h(p,q) := (\mathbb{I}^h(p,q))^{-1} H_n^h(p), \quad \|\theta_n\|_{H_{-n}^h(p,q)} = \|\mathbb{I}^h(p,q)\theta_n\|_{H_n^h(p)}.$$

Тут $\mathbb{I}^h(p,q)$ — канонічна ізометрія, пов'язана з ланцюжком

$$H^h(-p,-q) \supset (L^2) \supset H^h(p,q). \quad (6.8)$$

***Зауваження* 6.1.** Негативний простір $H^\kappa(-p,-q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, відносно нульового (L^2) і позитивного $H^\kappa(p,q)$ має вигляд (6.7) (потрібно тільки замінити h на κ).

Детальний опис негативних просторів $H^\kappa(-p,-q)$ і $H^h(-p,-q)$ наведемо нижче, в п. 12 (для більш спеціальних функцій (5.2) і (3.1), пов'язаних з операторами узагальненого зсуву). Тут лише перепишемо співвідношення біортогональності (6.4) у розглядуваному випадку.

Нехай $\mathbb{I}_p$ — канонічна ізометрія, пов'язана з ланцюжком

$$N_{-p,\mathbb{C}} \supset N_{0,\mathbb{C}} \supset N_{p,\mathbb{C}}, \quad (6.9)$$

тоді для будь-якого $n \in \mathbb{N}_0$ $\mathbb{I}_p^{\hat{\otimes} n}$ — канонічна ізометрія, пов'язана з ланцюжком

$$N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \supset N_{0,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \supset N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n} \quad (6.10)$$

(при $n = 0$ простори (6.10) збігаються з $\mathbb{C}^1$).

Справедлива така лема.

Лема 6.1. *Для довільних елементарних узагальнених функцій* $\theta_m \in H_{-m}^h(p,q)$ *і основних* $\langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \in H_n^h(p)$, $f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, *має місце співвідношення біортогональності*

$$\langle\langle \theta_m, \langle f_n, h_n(\cdot) \rangle \rangle\rangle = \delta_{n,m} \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle (n!)^2 K^{qn}, \quad (6.11)$$

$$\xi_n = (\mathbb{I}_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} g_n \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \qquad \mathbb{I}^h(p,q)\theta_n = \langle g_n, h_n(\cdot) \rangle \in H_n^h(p), \qquad g_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},$$

$$p \in \mathbb{N}_3, \quad q \in \mathbb{N}_3, \quad n, m \in \mathbb{N}_0$$

(нагадаємо, що спарення $\langle\langle \cdot , \cdot \rangle\rangle$ *породжене скалярним добутком* $(\cdot , \cdot)_{(L^2)}$).

Доведення. Досить записати співвідношення ортогональності (6.4) у випадку ланцюжка (6.8). Вектори $\theta_m \in H^h_{-m}(p,q)$ мають вигляд $\theta_m = (\mathbb{I}^h(p,q))^{-1} \times \times \langle g_m, h_m(\cdot)\rangle$, де $\langle g_m, h_m(\cdot)\rangle \in H^h_m(p)$, $g_m \in N^{\hat{\otimes} m}_{p,\mathbf{C}}$. Нехай $\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in H^h_n(p)$, $f_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbf{C}}$. Тоді (6.4) з урахуванням (6.10) набере вигляду

$$\forall n, m \in \mathbb{N}_0 : \quad \langle\langle \theta_m, \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \rangle\rangle = \delta_{n,m}(\mathbb{I}^h(p,q)\theta_n, \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)_{H^h_n(p)}\gamma_n(q) =$$

$$= \delta_{n,m}(\langle g_n, h_n(\cdot)\rangle, \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle)_{H^h_n(p)}\gamma_n(q) =$$

$$= \delta_{n,m}(g_n, f_n)_{N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbf{C}}}\gamma_n(q) = \delta_{n,m}((\mathbb{I}^{\hat{\otimes} n}_p)^{-1} g_n, f_n)_{N^{\hat{\otimes} n}_{0,\mathbf{C}}}\gamma_n(q) =$$

$$= \delta_{n,m}(\xi_n, f_n)_{N^{\hat{\otimes} n}_{0,\mathbf{C}}}\gamma_n(q) = \delta_{n,m}\langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle (n!)^2 K^{qn}, \quad \gamma_n = \gamma_n(q) = (n!)^2 K^{qn}.$$

Зауваження 6.2. Лема 6.1 залишається справедливою і для елементарних основних і узагальнених функцій, побудованих за базисними функціями $\kappa_n(x)$.

7. Побудова оснащення за умови, що множина елементарних функцій є ортогональною. У даному пункті покажемо, що у випадку ортогональності в (L^2) множини елементарних функцій $\langle f_n, h_n(x)\rangle$ припущення мінімальності виконується автоматично. Більш того, всі результати, отримані вище, залишаються справедливими незалежно від того, позитивна міра ρ на відкритих множинах в Q чи ні.

Нехай ρ — борелівська ймовірнісна міра на Q (не обов'язково позитивна на всіх непорожніх відкритих множинах в Q) і залежність функції $h(x, \lambda)$ від x і λ така, як і в п. 3. *Припустимо, що функції* $\langle \varphi_n, h_n(x)\rangle$ *ортогональні в такому розумінні: існують* $d_n > 0$ *такі, що для довільних* $\varphi_n \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{\mathbf{C}}$, $\psi_m \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} m}_{\mathbf{C}}$

$$\int_Q \langle \varphi_n, h_n(x)\rangle \overline{\langle \psi_m, h_m(x)\rangle} d\rho(x) = \delta_{n,m} d_n \langle \varphi_n, \overline{\psi_n}\rangle, \quad n, m \in \mathbb{N}_0, \tag{7.1}$$

і множина

$$\mathcal{P}(Q) := \left\{ \varphi \in C(Q) \,|\, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, h_n(x)\rangle, \; \varphi_n \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{\mathbf{C}}, \; x \in Q, \; m \in \mathbb{N}_0 \right\}$$

є щільною в просторі $(L^2) := L^2(Q, d\rho(x))$ (зазначимо, що завдяки співвідношенню ортогональності (7.1) кожна функція $\varphi \in \mathcal{P}(Q)$ допускає однозначний розклад $\varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, h_n(x)\rangle$, $m \in \mathbb{N}_0$).

Завдяки (7.1) можна розширити в (L^2)-сенсі клас функцій $\langle \varphi_n, h_n(x)\rangle$, $\varphi_n \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{\mathbf{C}}$, до функцій $\langle f_n, h_n(x)\rangle$ з $f_n \in \mathcal{F}_n(N_0) = N^{\hat{\otimes} n}_{0,\mathbf{C}}$ таким чином, що для даного розширення властивість ортогональності зберігається.

Точніше, нехай $f_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{0,\mathbf{C}}$ і $(\varphi^{(k)}_n)^{\infty}_{k=0}$, $\varphi^{(k)}_n \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{\mathbf{C}}$ — послідовність, збіжна до f_n в $N^{\hat{\otimes} n}_{0,\mathbf{C}}$. Покладемо

$$\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle := \lim_{k\to\infty} \langle \varphi^{(k)}_n, h_n(\cdot)\rangle \in (L^2). \tag{7.2}$$

Неважко бачити, що дана границя існує в (L^2) і не залежить від вибору послідовності $(\varphi_n^{(k)})_{k=0}^\infty$, збіжної до f_n в $N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}$. Крім того, якщо $f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $p \in \mathbb{N}_2$, і $\varphi_n^{(k)} \to f_n$ при $k \to \infty$ в топології простору $N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}$, то в сенсі збіжності в (L^2) $\lim_{k\to\infty}\langle\varphi_n^{(k)}, h_n(x)\rangle = \langle f_n, h_n(x)\rangle$ (нагадаємо, що $h_n(x) \in N_{2,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n} \subset N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}$), а тому позначення границі (7.2) є природним.

Далі, використавши співвідношення ортогональності (7.1) і неперервність скалярного добутку, для довільних $f_n \in N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $g_m \in N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} m}$ отримаємо

$$\int_Q \langle f_n, h_n(x)\rangle\overline{\langle g_m, h_m(x)\rangle}d\rho(x) = \delta_{n,m}d_n\langle f_n, \overline{g_n}\rangle, \quad n, m \in \mathbb{N}_0. \tag{7.3}$$

Завдяки припущенню щільності у просторі (L^2) множини $\mathcal{P}(Q)$ має місце таке твердження.

Твердження 7.1. *Для довільної функції $f \in (L^2)$ існує однозначно визначена послідовність $(f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(N_0, d)$ ($d = (d_n)_{n=0}^\infty$, $d_n > 0$ — вага) така, що в (L^2)*

$$f(x) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(x)\rangle \tag{7.4}$$

і

$$\|f\|_{(L^2)}^2 = \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|^2_{N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}} d_n = \|(f_n)_{n=0}^\infty\|^2_{\mathcal{F}(N_0,d)}. \tag{7.5}$$

Навпаки, довільний ряд вигляду (7.4) з $(f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(N_0, d)$ визначає функцію в (L^2).

Як результат визначено відображення

$$\mathcal{F}(N_0, d) \ni f = (f_n)_{n=0}^\infty \mapsto (If)(\cdot) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in (L^2), \tag{7.6}$$

яке реалізує унітарний ізоморфізм між ваговим простором Фока $\mathcal{F}(N_0, d)$ і простором (L^2) (тобто оператор I . $\mathcal{F}(N_0, d) \to (L^2)$ — унітарний).

Доведення. Досить показати, що відображення I (7.6) визначене і є унітарним оператором між $\mathcal{F}(N_0, d)$ і (L^2).

Нехай $(f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(N_0, d)$. З (7.3) відразу випливає збіжність ряду $\sum_{n=0}^\infty\langle f_n, h_n(x)\rangle$ в топології простору (L^2). Це дає можливість визначити відображення I (7.6), яке внаслідок співвідношення ортогональності (7.3) є ізометричним оператором, що діє із $\mathcal{F}(N_0, d)$ в (L^2). Цей оператор I буде унітарним, якщо $\operatorname{Ran}(I) = (L^2)$, тобто для довільної функції $f \in (L^2)$ знайдеться вектор $\tilde{f} = (f_n)_{n=0}^\infty \in \mathcal{F}(N_0, d)$ такий, що в (L^2)

$$(I\tilde{f})(x) = \sum_{n=0}^\infty \langle f_n, h_n(x)\rangle = f(x). \tag{7.7}$$

Зафіксуємо $f \in (L^2)$. При кожному фіксованому $n \in \mathbb{N}_0$ функція $f \in (L^2)$ породжує антилінійний неперервний функціонал

$$N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n} \ni g_n \mapsto \frac{1}{d_n}\langle\langle f, \langle g_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle \in \mathbb{C}^1. \tag{7.8}$$

Тому існує єдиний елемент $f_n \in N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$ такий, що

$$\langle f_n, \overline{g_n}\rangle = \frac{1}{d_n}\langle\langle f, \langle g_n, h_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle \quad \forall g_n \in N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}. \tag{7.9}$$

Використовуючи співвідношення ортогональності (7.3) і рівність (7.9), неважко встановити нерівність

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}} d_n \le \|f\|^2_{(L^2)}, \tag{7.10}$$

яка забезпечує належність послідовності $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ до простору $\mathcal{F}(N_0, d)$.

Таким чином, $\tilde{f} = (f_n)_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}(N_0, d)$, і для доведення твердження залишилось встановити рівність (7.7). Використавши (7.9), (7.3) і врахувавши, що множина $\mathcal{P}(Q)$ є щільною в (L^2), відразу отримаємо необхідне.

Будемо вважати, що вага $d = (d_n)_{n=0}^{\infty}$, $d_n > 0$, така, що починаючи з деякого $q_0 \in \mathbb{N}$

$$d_n \le (n!)^2 K^{qn}, \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad q \in \mathbb{N}_{q_0} \tag{7.11}$$

(тут $K > \max\{1, \|O_{3,2}\|^2_{HS}, e^2 R_h^{-2}\}$). Зафіксуємо надалі таке $q_0 \in \mathbb{N}$.

Лема 7.1. *Гільбертовий простір $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0}$, формальних рядів (4.5) щільно і неперервно вкладається у простір (L^2) оператором вкладення, що кожному елементу $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in H^h(p,q)$ ставить у відповідність функцію $f \in (L^2)$, а саме таку функцію, до якої збігається в (L^2) ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle$.*

Доведення. Покажемо, що має місце оцінка типу (4.10). Для довільного вектора $f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in H^h(p,q)$, $f_n \in N_{p,\mathbf{C}}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0}$, на підставі (7.5) і оцінки (7.11) маємо

$$\|f\|^2_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}} d_n \le \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}} (n!)^2 K^{qn} = \|f\|^2_{H^h(p,q)}$$

$\Big($враховано, що $\|\cdot\|_{N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}} \le \|\cdot\|_{N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}}\Big)$.

Завдяки останній оцінці для встановлення неперервного вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow \hookrightarrow (L^2)$ досить показати, що з рівності $\|f\|_{(L^2)} = 0$ випливає рівність $\|f\|_{H^h(p,q)} = 0$.

Нехай $f \in H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0}$, і $\|f\|_{(L^2)} = 0$. Використавши (7.5), отримаємо

$$\|f\|^2_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{N_{0,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}} d_n = 0, \quad f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}.$$

Отже, $f_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, тобто $f = 0$ як елемент простору $H^h(p,q)$. Щільність вкладення $H^h(p,q)$ в (L^2) випливає із щільності множини $\mathcal{P}(Q)$ в цих просторах.

***Наслідок* 7.1.** *Система базисних функцій $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ мінімальна в такому розумінні: якщо ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(x)\rangle = f(x)$, $f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$, збігається в $H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0}$, і його сума дорівнює 0 для всіх $x \in Q$, то $f_n = 0$, $n \in \mathbb{N}_0$. Іншими словами, якщо $f \in H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0}$, і $f(x) = 0$ $\forall x \in Q$, то $f = 0$ в топології простору $H^h(p,q)$.*

Доведення. Нехай $f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(\cdot)\rangle \in H^h(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0}$, тоді згідно з лемами 4.2 і 7.1 f належить $C(Q)$ і (L^2) (точніше, даний ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(x)\rangle$ збігається в топологіях просторів $C(Q)$ і (L^2)). Далі, якщо $f(x) = 0$ $\forall x \in Q$ (тобто $\forall x \in Q: \sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(x)\rangle = 0$), то зрозуміло, що $f = 0$ і в (L^2) (тобто $\sum_{n=0}^{\infty}\langle f_n, h_n(x)\rangle = 0$ в (L^2)). Оскільки має місце неперервне вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow (L^2)$, то $f = 0$ і як елемент простору $H^h(p,q)$. Таким чином, система базисних функцій $(h_n(x))_{n=0}^{\infty}$ є мінімальною.

Наслідок 7.2. *Для довільних фіксованих $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0}$ має місце неперервне вкладення $H^h(p,q) \hookrightarrow C(Q)$.*

Твердження 7.2. *Завдяки припущенням, які накладені тут на базисні функції $h_n(x)$, оцінка* (4.1) *(точніше її посилення)* .

$$\left\| \|h_n(\cdot)\|_{N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \right\|_{(L^2)} \le C^n n! \quad \textit{для деякого} \quad C > 0 \quad i \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

виконується автоматично.

Доведення. Справді, нехай $(e_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}_{0,fin}^\infty}$ — БЧЗ типу (1.9) у просторі $\mathcal{F}(N_2)$, побудований за ортонормованим базисом $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ в N_2, $e_j \in N_2$. Зрозуміло, що $(e_\tau)_{\tau \in \mathbb{N}_{0,fin}^\infty |\tau|=n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, — ортонормований базис у $\mathcal{F}_n(N_2)$ і тому $\|h_n(x)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-2})}^2 = \sum_{\tau \in \mathbb{N}_{0,fin}^\infty,\, |\tau|=n} |\langle e_\tau, h_n(x)\rangle|^2$. Використовуючи (7.5), на підставі теореми Б. Леві отримуємо

$$\left\| \|h_n(\cdot)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-2})} \right\|_{(L^2)}^2 = \int\limits_Q \|h_n(x)\|_{\mathcal{F}_n(N_{-2})}^2 d\rho(x) =$$

$$= \int\limits_Q \sum_{\tau \in \mathbb{N}_{0,fin}^\infty,\, |\tau|=n} |\langle e_\tau, h_n(x)\rangle|^2 d\rho(x) =$$

$$= \sum_{\tau \in \mathbb{N}_{0,fin}^\infty,\, |\tau|=n} \int\limits_Q |\langle e_\tau, h_n(x)\rangle|^2 d\rho(x) =$$

$$= \sum_{\tau \in \mathbb{N}_{0,fin}^\infty,\, |\tau|=n} \|e_\tau\|_{\mathcal{F}_n(N_0)}^2 d_n = d_n \|S_n\|_{HS}^2 \le d_n \|O_{2,0}\|_{HS}^{2n},$$

де S_n — оператор вкладення $\mathcal{F}_n(N_2) \hookrightarrow \mathcal{F}_n(N_0)$ і $O_{2,0}: N_2 \hookrightarrow N_0$.

Зважаючи на те, що існує $q_0 \in \mathbb{N}$ таке, що $d_n \le (n!)^2 K^{q_0 n}$, і беручи до уваги, що $\mathcal{F}_n(N_{-2}) = N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, знаходимо

$$\left\| \|h_n(\cdot)\|_{N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \right\|_{(L^2)} \le d_n^{\frac{1}{2}} \|O_{2,0}\|_{HS}^n \le n! K^{\frac{q_0}{2} n} \|O_{2,0}\|_{HS}^n = n! C^n, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

де $C = \|O_{2,0}\|_{HS} K^{\frac{q_0}{2}}$.

Зауваження **7.1.** Нехай залежність функції $\ell(\lambda)$ від λ така, як і в п. 5. Тоді за базисними функціями, пов'язаними з $\kappa(x,\lambda) := \ell(\lambda) h(x,\lambda)$, можна побудувати простори $H^\kappa(p,q)$, для яких всі результати, отримані в п. 5, залишаються справедливими. Зокрема, має місце щільне і неперервне вкладення $H^\kappa(p,q) \hookrightarrow (L^2)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_{q_0+2}$.

***Приклад* 7.1.** Проілюструємо ситуацію, описану в даному пункті, на прикладі побудови аналізу Пуассона в модельному одновимірному випадку. Зазначимо, що на відміну від гауссівського аналізу (який також можна будувати виходячи з результатів, отриманих у даному пункті (див. приклад 10.2)), аналіз Пуассона не можна будувати, спираючись лише на результати, отримані в пп. 4, 5 (оскільки міра Пуассона на $\mathbb{R}^1$ позитивна не на всіх відкритих непорожніх множинах).

Нехай $Q = \mathbb{R}^1$, $N_{0,\mathbb{C}} = \mathbb{C}^1$ (тепер всі простори ланцюжка (1.1) (після комплексифікації) збігаються з $\mathbb{C}^1$) і функція $h(x,\lambda)$ має вигляд

$$h(x,\lambda) := \exp\left(x\log\left(1+\frac{\lambda}{a}\right)-\lambda\right), \quad x\in Q=\mathbb{R}^1,$$
$$\lambda\in B=\left\{\lambda\in\mathbb{C}^1 \,\middle|\, |\lambda|<a,\ a>0\right\}. \tag{7.12}$$

Неважко бачити, що функція $B\ni\lambda\mapsto h(x,\lambda)\in\mathbb{C}^1$ є звичайною аналітичною функцією для кожного фіксованого $x\in Q$, і для кожного $\lambda\in B$ функція $\mathbb{R}^1\ni$ $\ni x\mapsto h(x,\lambda)\in\mathbb{C}^1$ неперервна і локально обмежена рівномірно відносно λ із довільної замкненої кулі з B.

Розклад (3.1) для функції $h(x,\lambda)$ (7.12) має вигляд

$$h(x,\lambda)=\exp\left(x\log\left(1+\frac{\lambda}{a}\right)-\lambda\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}h_n(x), \qquad x\in Q=\mathbb{R}^1, \quad \lambda\in B. \tag{7.13}$$

При кожному $x\in Q=\mathbb{R}^1$ базисні функції $h_n(x)$ належать $\mathbb{C}^1$ і є класичними поліномами Шарльє. Надалі будемо використовувати стандартні позначення $C_n(x) := h_n(x)$ і $C(x,\lambda) := h(x,\lambda)$ для поліномів Шарльє і їх породжуючої функції (7.13).

Простір $H^h(p,q)$ (4.5) у розглядуваному модельному випадку має вигляд

$$H^h(q)=H^C(q):=\left\{f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nC_n(x),\right.$$
$$\left. f_n\in\mathbb{C}^1 \,|\, \|f\|^2_{H^C(q)}=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2(n!)^2K^{qn}<\infty\right\} \tag{7.14}$$

(зазначимо, що індекс p відсутній, оскільки $N_{p,\mathbb{C}}=\mathbb{C}^1$, $p\in\mathbb{Z}$).

В якості міри ρ візьмемо міру Пуассона π_a на $(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$ ($\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$ — борелівська σ-алгебра на $\mathbb{R}^1$). Нагадаємо, що міра Пуассона π_a (з параметром $a>0$) на $(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$ є ймовірнісною мірою, зосередженою на $\mathbb{N}_0$, такою, що для всіх $\alpha\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^1)$

$$\pi_a(\alpha)=\sum_{k\in\alpha\cap\mathbb{N}_0}\frac{e^{-a}h^k}{k!}. \tag{7.15}$$

Очевидно, що міра π_a позитивна не на всіх непорожніх відкритих множинах в $Q=\mathbb{R}^1$.

Співвідношення ортогональності для поліномів Шарльє

$$\int_{\mathbb{R}^1} C_n(x)C_m(x)d\pi_a(x) = a^{-n}n!\delta_{n,m}, \quad n,m \in \mathbb{N}_0, \tag{7.16}$$

і різницева рівність (яку, як і (7.16), можна отримати із зображення (7.13))

$$nC_{n-1}(x) + nC_n(x) + aC_{n+1}(x) = (x-a)C_n(x),$$

$$n \in \mathbb{N}_0 \quad (C_{-1}(x) := 0), \quad x \in Q,$$

показують, що нормовані поліноми

$$P_n(x) = \frac{a^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n!}}C_n(x), \qquad n \in \mathbb{N}_0, \quad x \in Q,$$

є поліномами першого роду, які пов'язані з самоспряженим оператором (породженим скалярною якобієвою матрицею), що діє у просторі l^2. При цьому спектральною мірою цієї скалярної якобієвої матриці є міра Пуассона π_a (див. [20]).

Зважаючи на те, що лінійна оболонка системи базисних функцій $(C_n(x))_{n=0}^{\infty}$ щільна в $L^2(\mathbb{R}^1, d\pi_a(x))$ (оскільки лінійна оболонка $(P_n(x))_{n=0}^{\infty}$ щільна в $L^2(\mathbb{R}^1, d\pi_a(x))$) і має місце співвідношення ортогональності (7.16), на основі результатів, отриманих у даному пункті, можна побудувати оснащення

$$H^C(-q) \supset L^2(\mathbb{R}^1, d\pi_a(x)) \supset H^C(q). \tag{7.17}$$

8. Оператори узагальненого зсуву. Припустимо, що у просторі $C(Q)$ задано сім'ю $T = (T_x)_{x\in Q}$ лінійних операторів, так званих „операторів узагальненого зсуву'', які мають такі властивості:

а) для довільної функції $f \in C(Q)$ $(T_x f)(y) = (T_y f)(x)$, $x, y \in Q$ („комутативність'');

б) існує точка $e \in Q$ („базисна одиниця'') така, що $T_e = \mathrm{id}$;

в) для довільних $x, y \in Q$ існує куля $W_{x,y} \subset Q$ така, що для довільної функції $f \in C(Q)$ значення $(T_x f)(y)$ не залежить від значень $f(s)$ при $s \in Q \backslash W_{x,y}$ („локальність'');

г) якщо $C(Q) \ni f_n \to f \in C(Q)$ рівномірно на кожній кулі, то для будь-яких $x, y \in Q$ $(T_x f_n)(y) \to (T_x f)(y)$ („неперервність'').

Відмітимо, що аксіоми а)–г) — це лише деяка частина аксіом узагальнених операторів зсуву із теорії комутативних гіперкомплексних систем і гіпергруп (див. [50, 51]).

Функцію $\chi \in C(Q)$, яка тотожно не дорівнює нулю, назвемо характером сім'ї T, якщо вона має таку властивість:

$$(T_x\chi)(y) = \chi(x)\chi(y), \quad x, y \in Q. \tag{8.1}$$

Будемо вважати, що функція $\chi(x) = 1$, $x \in Q$, є характером (одиничним характером). *Припустимо, що для* T *існує множина характерів* $\chi_\lambda(x) = \chi(x, \lambda)$, *які нумеруються точками* $\lambda \in N_{0,\mathbb{C}}$ *і аналітично залежать від* λ, *і* $\chi(x, 0) = 1$ *для всіх* $x \in Q$. *Більш точно, залежність* χ *від* x *і* λ *така, як для функції* $h(x, \lambda)$ (3.1), *з додатковою умовою* $h(x, 0) = 1$ *для всіх* $x \in Q$. Зафіксуємо множину таких характерів.

***Приклад* 8.1.** Нехай $Q = N_{-1}$. У лінійному просторі $C(Q) = C(N_{-1})$ введемо оператор узагальненого зсуву T_x, поклавши для $x \in N_{-1}$

$$(T_x f)(y) = f(x+y), \qquad y \in N_{-1}, \quad f \in C(N_{-1})$$

(тобто маємо звичайний зсув на N_{-1} з базисною одиницею $e = 0 \in N_{-1}$). Очевидно, що вимоги а)–г), накладені на дану сім'ю $T = (T_x)_{x \in N_{-1}}$, виконуються.

Неважко бачити, що функція (3.2) є характером сім'ї T. Таким чином, $\chi(x,\lambda) = \exp\langle x, \lambda\rangle$, $x \in Q = N_{-1}$, $\lambda \in N_{1,\mathbb{C}}$.

***Приклад* 8.2** (одновимірний випадок). Нехай $Q = \mathbb{R}^1$, $N_{0,\mathbb{C}} = \mathbb{C}^1$. У лінійному просторі $C(\mathbb{R}^1)$ розглянемо звичайний зсув T_x на $\mathbb{R}^1$ з базисною одиницею $e = 0 \in \mathbb{R}^1$. Неважко переконатися, що функція

$$\chi(x,\lambda) := \exp\left(x \log\left(1 + \frac{\lambda}{a}\right)\right), \quad x \in \mathbb{R}^1, \quad \lambda \in B = \left\{\lambda \in \mathbb{C}^1 \,\Big|\, |\lambda| < a, \ a > 0\right\}, \tag{8.2}$$

при кожному $\lambda \in B$ є характером сім'ї $T = (T_x)_{x \in \mathbb{R}^1}$ і $\chi(x,0) = 1$ $\forall x \in Q = \mathbb{R}^1$. Крім того, зрозуміло, що функція (8.2) аналітична відносно λ і неперервна та локально обмежена відносно x рівномірно по λ.

9. Характери Дельсарта. З огляду на те, що залежність функції $\chi(x,\lambda)$ від x і λ така, як для функції $h(x,\lambda)$ з п. 3, для неї є справедливим розклад типу (3.1)

$$\chi(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle, \quad \lambda \in B_\chi = \{\lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_\chi\} \subset U_0, \tag{9.1}$$

з відповідними коефіцієнтами $Q \ni x \mapsto \chi_n(x) \in N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ — так званими характерами Дельсарта для сім'ї T. Оскільки $T_e = \mathrm{id}$ і функція $\chi(x,\lambda)$ при кожному $\lambda \in B_\chi$ є характером сім'ї T (див. п. 8), то із (8.1) випливає $\chi(e,\lambda) = 1$ для $\lambda \in B_\chi$. Тому із (9.1), врахувавши останнє і те, що $\chi(x,0) = 1$ для всіх $x \in Q$, отримаємо очевидні рівності

$$\chi_0(x) = 1, \quad x \in Q, \qquad \chi_n(e) = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{9.2}$$

Припустимо, що виконується оцінка

$$\Big\| \|\chi_n(\cdot)\|_{N_{-2,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \Big\|_{(L^2)} \le LC^n n! \quad \text{для деяких} \quad L > 0,\ C > 0 \quad \text{і} \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \tag{9.3}$$

(зрозуміло, що для $h_n(x) = \chi_n(x)$, завдяки останній оцінці, (4.1) має місце), *система характерів Дельсарта* $(\chi_n(x))_{n=0}^{\infty}$ *мінімальна і множина неперервних функцій*

$$\mathcal{P}(Q) := \left\{\varphi \in C(Q) \mid \varphi(x) = \sum_{n=0}^{m} \langle \varphi_n, \chi_n(x)\rangle,\ \varphi_n \in N_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n},\ x \in Q,\ m \in \mathbb{N}_0\right\}$$

щільна в (L^2). Як і раніше, $(L^2) := L^2(Q, d\rho(x))$, ρ — борелівська ймовірнісна міра на Q, позитивна на непорожніх відкритих множинах в Q.

Так, використовуючи характери Дельсарта, можна побудувати простір (4.5) і оснащення (4.18). Наступна теорема є наслідком результатів п. 4.

Теорема 9.1. *При достатньо великому $K > 1$ (K має задовольняти оцінку (4.12)) простори Дельсарта $H^\chi(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, побудовані за правилом (4.5) по $h_n(x) = \chi_n(x)$, і спряжені до них утворюють ядерний ланцюжок просторів* (4.18):

$$(\Phi^\chi)' \supset \ldots \supset H^\chi(-p,-q) \supset \ldots \supset (L^2) \supset \ldots \supset H^\chi(p,q) \supset \ldots \supset \Phi^\chi. \qquad (9.4)$$

Для $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ вкладення $H^\chi(p,q) \hookrightarrow C(Q)$ неперервне. Простір Φ^χ ядерний.

Нагадаємо деякі потрібні в подальшому властивості операторів узагальненого зсуву T_x. Покажемо, перш за все, що для будь-яких $p \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ оператори узагальненого зсуву T_x можна природним чином продовжити на простір $\widetilde{C}_p^n(Q)$ слабконеперервних векторнозначних функцій $Q \ni s \mapsto \bar{g}_n(s) \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$, для яких $\|\bar{g}_n(s)\|_{N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}}$ обмежена на кожній кулі.

Лема 9.1. *Для довільного $x \in Q$ існує лінійний оператор $\tilde{T}_x$, який діє в $\widetilde{C}_p^n(Q)$ і пов'язаний з T_x рівністю*

$$\begin{gathered}\langle f_n, (\tilde{T}_x \bar{g}_n(\cdot))(y)\rangle = (T_x \langle f_n, \bar{g}_n(\cdot)\rangle)(y), \\ \bar{g}_n \in \widetilde{C}_p^n(Q), \quad f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}, \quad p \in \mathbb{N},\ y \in Q.\end{gathered} \qquad (9.5)$$

Доведення. Зафіксуємо $x, y \in Q$. Згідно з припущенням в) із п. 8 існує куля $W := W_{x,y} \subset Q$ така, що значення $(T_x f)(y)$, $f \in C(Q)$, не залежить від значень $f(s)$ при $s \in Q \setminus W$. Тому відображення $f \upharpoonright W \mapsto (T_x f)(y) \in \mathbb{C}^1$ при $f \in C(Q)$ є лінійним функціоналом на просторі, який складається з цих звужень, з рівномірною нормою. Вимога г) із п. 8 неперервності приводить до неперервності цього функціонала і відповідно до оцінки

$$|(T_x f)(y)| \le c \sup_{s \in W} |f(s)| \quad \text{для деякого} \quad c > 0 \quad \text{і} \quad f \in C(Q). \qquad (9.6)$$

При $\bar{g}_n \in \widetilde{C}_p^n(Q)$ функція $Q \ni s \mapsto \langle f_n, \bar{g}_n(s)\rangle \in \mathbb{C}^1$ входить в $C(Q)$. На основі (9.6) отримаємо

$$\begin{gathered}\forall f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}: \quad |(T_x \langle f_n, \bar{g}_n(\cdot)\rangle)(y)| \le \\ \le c \sup_{s \in W} |\langle f_n, \bar{g}_n(s)\rangle| \le c \sup_{s \in W} \|\bar{g}_n(s)\|_{N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}} \|f_n\|_{N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}}.\end{gathered} \qquad (9.7)$$

Тому існує однозначно визначений вектор $\bar{v}(\bar{g}_n, y) \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$ такий, що для довільного $f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$ $(T_x \langle f_n, \bar{g}_n(\cdot)\rangle)(y) = \langle f_n, \bar{v}(\bar{g}_n, y)\rangle$. Із лінійності T_x випливає $\bar{v}(\bar{g}_n, y) = (\tilde{T}_x \bar{g}_n(\cdot))(y)$, де $\tilde{T}_x$ — лінійний оператор в $\widetilde{C}_p^n(Q)$.

Лему доведено.

У подальшому для операторів $\tilde{T}_x$ буде збережено позначення T_x. Таким чином, (9.5) набирає вигляду

$$\forall x, y \in Q: \quad \langle f_n, (T_x \bar{g}_n(\cdot))(y)\rangle = (T_x \langle f_n, \bar{g}_n(\cdot)\rangle)(y), \quad \bar{g}_n \in \widetilde{C}_p^n(Q),\ f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}. \qquad (9.8)$$

Згідно з лемою 3.2 для $h = \chi$ кожний характер Дельсарта $Q \ni x \mapsto \chi_n(x) \in N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n \in \mathbb{N}_0$, слабконеперервний і локально обмежений, тобто $\chi_n \in \widetilde{C}_3^n(Q)$. Таким чином, якщо розуміти характери Дельсарта $\chi_n(x)$ як вектор-функції зі значеннями в $N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, то до них на підставі леми 9.1 можна застосувати оператори узагальненого зсуву T_x (тобто $\tilde{T}_x$): $(T_x\chi_n(\cdot))(y)$. Для останнього виразу справедливим є наступний факт, який узагальнює формулу бінома.

Теорема 9.2. *Для кожного* $n \in \mathbb{N}_0$ *у просторі* $N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ *справджується рівність*

$$(T_x\chi_n(\cdot))(y) = \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}\chi_m(x)\hat{\otimes}\chi_{n-m}(y), \quad x, y \in Q. \tag{9.9}$$

Доведення. Передусім відмітимо, що при $\lambda \in N_{3,\mathbb{C}}$, $\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}} < K^{-\frac{1}{2}}$ функція $h(\cdot, \lambda) = \chi(\cdot, \lambda) \in H^\chi(3,1)$ (зауваження 4.7). А отже, на підставі леми 4.2 для вказаних λ ряд (9.1) збігається рівномірно на кожній кулі з Q.

Тому з урахуванням припущення г) із п. 8, леми 9.1 і (9.1) для цих λ оператор T_x можна перенести через знак суми і $\langle\cdot,\cdot\rangle$. В результаті отримаємо

$$\forall x, y \in Q: \quad (T_x\chi(\cdot,\lambda))(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(T_x\langle\lambda^{\otimes n}, \chi_n(\cdot)\rangle)(y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, (T_x\chi_n(\cdot))(y)\rangle. \tag{9.10}$$

З іншого боку, перемноживши розклади (9.1), дістанемо

$$\forall x, y \in Q: \quad (T_x\chi(\cdot,\lambda))(y) = \chi(x,\lambda)\chi(y,\lambda) =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!}\langle\lambda^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle\langle\lambda^{\otimes m}, \chi_m(y)\rangle =$$

$$= \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{1}{n!m!}\langle\lambda^{\otimes n+m}, \chi_n(x)\hat{\otimes}\chi_m(y)\rangle =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left\langle\lambda^{\otimes n}, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}\chi_m(x)\hat{\otimes}\chi_{n-m}(y)\right\rangle. \tag{9.11}$$

Праві частини (9.10) і (9.11) збігаються для будь-яких $x, y \in Q$ при довільних $\lambda \in N_{3,\mathbb{C}}$, $\|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}} < K^{-\frac{1}{2}}$. Тому якщо покласти $\lambda = ze$, де $e \in N_{3,\mathbb{C}}$, $\|e\|_{N_{3,\mathbb{C}}} = 1$, $z \in \mathbb{C}^1$, $|z| < K^{-\frac{1}{2}}$, то із (9.10), (9.11) знайдемо, порівнявши коефіцієнти при z^n, що для довільних $x, y \in Q$ має місце рівність

$$\langle e^{\otimes n}, (T_x\chi_n(\cdot))(y)\rangle = \left\langle e^{\otimes n}, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!}\chi_m(x)\hat{\otimes}\chi_{n-m}(y)\right\rangle.$$

Скориставшись поляризаційною тотожністю і лінійністю по $e^{\otimes n}$, отримаємо таку саму рівність для щільної в $N_{3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ множини векторів g_n, що еквівалентно справедливості рівності (9.9).

10. Характери Аппеля. Будемо розглядати характери, які визначаються із розкладу (9.1), але для видозміненої лівої частини $\chi(x,\lambda)$. Зауважимо, що на відміну від елементарних функцій, побудованих за характерами Дельсарта, елементарні функції, побудовані за новими характерами, в деяких спеціальних випадках можуть бути ортогональними в (L^2).

Використовуючи розклад (9.1) і оцінку (9.3), можна показати, що узагальнене перетворення Лапласа

$$N_{2,\mathbf{C}} \ni \lambda \mapsto \widehat{\rho}(\lambda) := \int_Q \chi(x,\lambda)d\rho(x) \tag{10.1}$$

існує і аналітичне в деякому околі нуля простору $N_{2,\mathbf{C}}$. Більш точно, має місце таке твердження.

Твердження 10.1. *Узагальнене перетворення Лапласа* (10.1) *є аналітичною функцією в* $0 \in N_{2,\mathbf{C}}$. *Точніше, для* $\lambda \in N_{2,\mathbf{C}}$, $\|\lambda\|_{N_{2,\mathbf{C}}} < \min\{R_\chi, C^{-1}\}$ *є справедливим розклад у ряд*

$$\widehat{\rho}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \beta_n\rangle, \quad \beta_n \in N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}, \tag{10.2}$$

який збігається рівномірно при $\|\lambda\|_{N_{2,\mathbf{C}}} \le r$, $r \in (0, \min\{R_\chi, C^{-1}\})$.

Доведення. Перш за все відмітимо, що завдяки оцінці (9.3) є справедливою лема 4.1 (для $h(x,\lambda) = \chi(x,\lambda)$). Тому для вказаних в умові леми λ ряд (9.1) збігається у просторі (L^2), що дає можливість нижче змінити порядок інтегрування і підсумовування (нагадаємо, що $1 \in (L^2)$). В результаті одержимо

$$\widehat{\rho}(\lambda) = \int_Q \chi(x,\lambda)d\rho(x) = \int_Q \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle d\rho(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \int_Q \langle \lambda^{\otimes n}, \chi_n(x)\rangle d\rho(x). \tag{10.3}$$

Зауважимо, що для довільної елементарної функції $\langle f_n, \chi_n(x)\rangle$, $f_n \in N_{2,\mathbf{C}}^{\widehat{\otimes} n}$, існує $\beta_n \in N_{-2,\mathbf{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ таке, що

$$\int_Q \langle f_n, \chi_n(x)\rangle d\rho(x) = \langle f_n, \beta_n\rangle, \quad \|\beta_n\|_{N_{-2,\mathbf{C}}^{\widehat{\otimes} n}} \le LC^n n!. \tag{10.4}$$

Справді, використовуючи (9.3), нерівність Коші – Буняковського і рівність $\rho(Q) = 1$, отримуємо

$$\left|\int_Q \langle f_n, \chi_n(x)\rangle d\rho(x)\right|^2 \le \int_Q |\langle f_n, \chi_n(x)\rangle|^2 d\rho(x) \le$$

$$\le \int_Q \|f_n\|^2_{N_{2,\mathbf{C}}^{\widehat{\otimes} n}} \|\chi_n(x)\|^2_{N_{-2,\mathbf{C}}^{\widehat{\otimes} n}} d\rho(x) \le (LC^n n!)^2 \|f_n\|^2_{N_{2,\mathbf{C}}^{\widehat{\otimes} n}},$$

звідки й випливає (10.4).

Таким чином, на підставі (10.3) і (10.4) має місце зображення

$$\widehat{\rho}(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \beta_n \rangle.$$

З оцінки (10.4) при $\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} \leq r$, $r \in (0, \min\{R_\chi, C^{-1}\})$ маємо

$$\frac{1}{n!} |\langle \lambda^{\otimes n}, \beta_n \rangle| \leq \|\lambda\|^n_{N_{2,\mathbb{C}}} L C^n \leq L(rC)^n, \quad rC < 1.$$

Звідси випливає рівномірна при $\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} \leq r$ збіжність останнього ряду і аналітичність $\widehat{\rho}(\lambda)$.

Твердження доведено.

З метою спрощення викладок припустимо, що узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{\rho}(\lambda)$ є аналітичною в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$ функцією.

Оскільки $\widehat{\rho}(0) = \rho(Q) = 1$, то функція $\widehat{\rho}^{-1}(\lambda)$ існує і аналітична в $0 \in \in N_{1,\mathbb{C}}$. Тому функція $\omega(x, \lambda) := \dfrac{\chi(x, \lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)}$ аналітична і має місце розклад типу (9.1)

$$\omega(x, \lambda) := \frac{\chi(x, \lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \lambda^{\otimes n}, \omega_n(x) \rangle, \tag{10.5}$$

$$\lambda \in B_\omega = \left\{ \lambda \in N_{2,\mathbb{C}} \mid \| \lambda \|_{N_{2,\mathbb{C}}} < R_\omega \right\} \subset B_\chi,$$

з коефіцієнтами $Q \ni x \mapsto \omega_n(x) \in N_{-2,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ — характерами Аппеля.

Легко помітити, що функція $\omega(x, \lambda)$ побудована за тим самим правилом, що й функція $\kappa(x, \lambda)$ (5.2) (досить покласти $h(x, \lambda) = \chi(x, \lambda)$, $\ell(\lambda) = \widehat{\rho}^{-1}(\lambda)$). Тому всі результати, отримані в п. 5 для $\kappa(x, \lambda) = \omega(x, \lambda)$, залишаються справедливими. Більш точно, має місце така теорема.

Теорема 10.1. *Простори $H^\omega(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, побудовані за правилом* (5.11) *(з використанням функції $\kappa = \omega$), і спряжені до них утворюють ядерний ланцюжок просторів*

$$(\Phi^\omega)' \supset \ldots \supset H^\omega(-p, -q) \supset \ldots \supset (L^2) \supset \ldots \supset H^\omega(p, q) \supset \ldots \supset \Phi^\omega. \tag{10.6}$$

Крім того, мають місце щільні і неперервні вкладення

$$\begin{aligned} &H^\chi(p, q) \hookrightarrow H^\omega(p, q-1), \qquad && H^\omega(p, q) \hookrightarrow H^\chi(p, q-1), \\ &H^\omega(-p, -(q-1)) \hookrightarrow H^\chi(-p, -q), \qquad && H^\chi(-p, -(q-1)) \hookrightarrow H^\omega(-p, -q). \end{aligned} \tag{10.7}$$

Таким чином, $\Phi^\chi = \Phi^\omega =: \Phi$, $(\Phi^\chi)' = (\Phi^\omega)' =: \Phi'$.

Поклавши в (5.3), (5.5) $h_n(x) = \chi_n(x)$ і $\kappa_n(x) = \omega_n(x)$, відразу отримаємо формули для перерахунку характерів Дельсарта через характери Аппеля і навпаки, а саме:

$$\begin{aligned} \omega_n(x) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \alpha_{n-m} \widehat{\otimes} \chi_m(x), \qquad x \in Q, \quad n \in \mathbb{N}_0, \\ \chi_n(x) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \beta_{n-m} \widehat{\otimes} \omega_m(x), \qquad x \in Q, \quad n \in \mathbb{N}_0, \end{aligned} \tag{10.8}$$

де β_n, $\alpha_n \in N_{-2,\mathbb{C}}^{\widehat{\otimes} n}$ і визначаються із розкладів для $\ell^{-1}(\lambda) = \widehat{\rho}(\lambda)$ (10.2) і $\ell(\lambda) = \widehat{\rho}^{-1}(\lambda)$ (5.1) відповідно.

Порівнюючи (10.5) і (5.1) для $\ell(\lambda) = \widehat{\rho}^{-1}(\lambda)$ і враховуючи, що $\chi(e,\lambda) = 1$, $\lambda \in B_\omega$, а також, що $\chi(x,0) = 1 \ \ \forall x \in Q$ і $\rho^{-1}(0) = 1$, отримуємо

$$\omega_0(x) = \alpha_0 = 1, \quad x \in Q, \qquad \omega_n(e) = \alpha_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

***Приклад* 10.1.** У прикладі 4.2 встановлено, що простори, побудовані за базисними функціями $x^{\otimes n}$, можна розглядати як позитивні відносно нульового $L^2(N_{-1}, dg(x))$, де g — гауссівська міра на N_{-1}. Крім того (приклад 8.1), функція $\chi(x,\lambda) = \exp\langle x,\lambda\rangle$ є характером сім'ї операторів звичайного зсуву $T = (T_x)_{x\in N_{-1}}$ на N_{-1} і $\chi(x,0) = 1 \ \ \forall x \in Q$.

Знайдемо узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{g}(\lambda)$ і функцію $\omega(x,\lambda)$. Зрозуміло, що в даному випадку простори, побудовані за базисними функціями $\omega_n(x)$, також можна розглядати як позитивні відносно нульового $L^2(N_{-1}, dg(x))$.

У цьому випадку узагальнене перетворення Лапласа $\widehat{g}(\lambda)$ збігається із звичайним перетворенням Лапласа $l_g(\lambda)$ (4.21)

$$\widehat{g}(\lambda) = \int\limits_{N_{-1}} \chi(x,\lambda)dg(x) = \int\limits_{N_{-1}} \exp\langle x,\lambda\rangle dg(x) = l_g(\lambda), \quad \lambda \in N_{1,\mathbb{C}},$$

а функція $\omega(x,\lambda) = \dfrac{\chi(x,\lambda)}{\widehat{g}(\lambda)}$ є породжуючою для поліномів Ерміта. Точніше,

$$\omega(x,\lambda) = \frac{\chi(x,\lambda)}{\widehat{g}(\lambda)} = \exp\left(\langle x,\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle\lambda,\lambda\rangle\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes n}, H_n(x)\rangle =: H(x,\lambda),$$

де $H_n(x) = \omega_n(x) \in N_{-2}^{\widehat{\otimes} n}$ — поліноми Ерміта, які, як відомо, утворюють ортогональний базис у просторі $L^2(N_{-1}, dg(x))$.

Поряд з оснащенням (4.22) можна побудувати оснащення

$$H^H(-p,-q) \supset L^2(N_{-1}, dg(x)) \supset H^H(p,q), \tag{10.9}$$

яке є образом оснащення (1.5) простору Фока $F(N_0)$ при ізоморфізмі Вінера–Іто–Сігала.

***Зауваження* 10.1.** Нехай функція $\chi(\,\cdot\,,\lambda) \in C(Q)$ є характером сім'ї T, $\chi(x,0) = 1$ для всіх $x \in Q$ і залежність χ від x і λ така, як для функції $h(x,\lambda)$ (3.1). Припустимо, що перетворення Лапласа $\widehat{\rho}(\lambda)$ існує і аналітичне в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$. Тоді залежність від x і λ функції $\omega(x,\lambda) := \dfrac{\chi(x,\lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)}$ (нагадаємо, що $\widehat{\rho}(0) = 1$) така сама, як і функції $\chi(x,\lambda)$.

Може трапитись, що система елементарних функцій, побудованих за характерами Аппеля $\omega_n(x)$, щільна і ортогональна в (L^2) (в сенсі п. 7), тоді припущення п. 7, накладені на коефіцієнти $h_n(x) = \omega_n(x)$ (припущення тотальності і ортогональності) і функцію $\ell(\lambda) = \widehat{\rho}(\lambda)$ (припущення аналітичності в $0 \in N_{1,\mathbb{C}}$), виконуються. Тому всі твердження, сформульовані в п. 7, є справедливими і у даному випадку, причому тепер $h(x,\lambda) = \omega(x,\lambda)$, $\kappa(x,\lambda) = \chi(x,\lambda)$, $\ell(\lambda) = \widehat{\rho}(\lambda)$, і міра ρ не обов'язково повинна бути позитивною на непорожніх відкритих множинах в Q. Зазначимо, що така ситуація має місце, коли ρ — міра Гаусса або Пуассона. Точніше, наведемо такі приклади.

***Приклад* 10.2.** Згідно з прикладом 10.1 система елементарних функцій, побудованих за поліномами Ерміта $H_n(x)$, щільна і ортогональна в $L^2(N_{-1}, dg(x))$, тому на підставі зауваження 10.1 можна побудувати гауссівський аналіз (точніше, оснащення (4.22) і (10.9)). Як наслідок, можливість побудови оснащень (4.22) і (10.9) випливає як з результатів пп. 4, 5 (див. приклади 4.2 і 10.1), так і з результатів, отриманих в п. 7.

***Приклад* 10.3.** Як відмічено в прикладі 8.2, функція $\chi(x,\lambda) = \exp\Big(x\log\Big(1 + \frac{\lambda}{a}\Big)\Big)$, $x \in Q = \mathbb{R}^1$, $\lambda \in B = \{\lambda \in \mathbb{C}^1 \,|\, |\lambda| < a,\, a > 0\}$ є аналітичною відносно λ і неперервною та локально обмеженою відносно x рівномірно по λ. Крім того, вона є характером сім'ї операторів звичайного зсуву $T = (T_x)_{x\in Q}$ на $\mathbb{R}^1$. Зрозуміло, що за її коефіцієнтами (характерами Дельсарта), як за ортогональним базисом, за правилом (7.14) можна побудувати простір $H^\chi(q)$.

За міру ρ візьмемо міру Пуассона π_a на $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}(\mathbb{R}^1))$. З огляду на те, що міра π_a позитивна не на всіх непорожніх відкритих множинах в $Q = \mathbb{R}^1$, не можна розглядати простори $H^\chi(q)$, побудовані за характерами Дельсарта, як позитивні по відношенню до нульового $L^2(\mathbb{R}^1, d\pi_a(x))$, спираючись лише на результати п. 9.

Знайдемо узагальнене перетворення Лапласа міри π_a. На підставі (10.1) і (8.2) маємо

$$\widehat{\pi}_a(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \chi(x,\lambda)d\pi_a(\lambda) = \int\limits_{\mathbb{R}^1} \exp\left(x\log\left(1+\frac{\lambda}{a}\right)\right)d\pi_a(\lambda) = e^\lambda, \quad \lambda \in B. \tag{10.10}$$

Із (10.10), (8.2) і (10.5) відразу отримуємо

$$\omega(x,\lambda) = \frac{\chi(x,\lambda)}{\widehat{\pi}_a(\lambda)} = \exp\left(x\log\left(1+\frac{\lambda}{a}\right) - \lambda\right), \quad x \in Q = \mathbb{R}^1, \ \lambda \in B.$$

Неважко бачити, що $\omega(x,\lambda)$ — породжуюча функція для поліномів Шарльє $C_n(x)$ (див. приклад 7.1), які ортогональні і тотальні в $L^2(\mathbb{R}^1, d\pi_a(x))$. Завдяки цьому, на основі результатів п. 7, можна будувати оснащення простору $L^2(\mathbb{R}^1, d\pi_a(x))$, беручи в якості позитивних як простори $H^C(q)$, побудовані за поліномами Шарльє $C_n(x)$, так і простори $H^\chi(q)$, побудовані за характерами Дельсарта $\chi_n(x)$.

11. Оператори знищення і народження, що діють у просторах Фока. Нехай $F(N_0) = \mathcal{F}(N_0, \gamma)$, $\gamma_n = n!$, — ваговий простір Фока послідовностей

$$f = (f_n)_{n=0}^\infty, \quad f_n \in \mathcal{F}_n(N_0) = N_{0,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad \|f\|^2_{F(N_0)} = \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_0)} n! < \infty. \tag{11.1}$$

Побудуємо оснащення (1.5) з вагою $\gamma(q) = (\gamma_n(q))_{n=0}^\infty$, $\gamma_n(q) = (n!)^2 K^{qn}$:

$$(\mathcal{F}(\mathcal{N}))'_F \supset \ldots \supset \mathcal{F}(N_{-p}, (\gamma(q))_F) \supset \ldots \supset F(N_0) \supset \ldots$$

$$\ldots \supset \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)) \supset \ldots \supset \mathcal{F}(\mathcal{N}) \tag{11.2}$$

(нагадаємо, що вага $(\gamma(q))_F = ((\gamma_n(q))_F)_{n=0}^\infty$, $(\gamma_n(q))_F = (n!)^2\gamma_n^{-1}(q) = K^{-qn}$).

Класичний *оператор народження* $a_+(g)$, $g \in N_0 \subset \mathcal{F}_1(N_0)$, є визначеним у просторі Фока $F(N_0)$ (11.1) як оператор з областю визначення $\mathrm{Dom}\,(a_+(g)) = \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_0)$, який діє в кожному n-частковому підпросторі $\mathcal{F}_n(N_0)$ за правилом

$$\mathcal{F}_n(N_0) \ni f_n \mapsto a_+(g)f_n := g\hat{\otimes} f_n \in \mathcal{F}_{n+1}(N_0). \tag{11.3}$$

Відповідний *оператор знищення* $a_-(g)$ спряжений до $a_+(g)$ в $F(N_0)$, тобто $a_-(g) := (a_+(g))^*$. Використовуючи визначення (5.15), неважко перевірити, що для довільного $n \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{F}_n(N_0) \ni f_n \mapsto a_-(g)f_n = nf_n^g \in \mathcal{F}_{n-1}(N_0), \tag{11.4}$$

$$a_-(g)f_0 := 0.$$

Можна поширити „за мультиплікативністю і лінійністю" означення (11.3), (11.4) на оператори народження і знищення довільного порядку, що діятимуть в негативних або позитивних просторах. А саме, нехай $p \in \mathbb{Z}$ і $\xi_m \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m} = \mathcal{F}_m(N_p)$, $m \in \mathbb{N}_0$. При $s \in \mathbb{Z}$, $s \le p$ покладемо

$$\mathcal{F}_n(N_s) \ni f_n \mapsto a_+(\xi_m)f_n := \xi_m \hat{\otimes} f_n \in \mathcal{F}_{n+m}(N_s). \tag{11.5}$$

Нехай $\xi_m \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m} = \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $p \in \mathbb{N}_0$. Врахувавши (5.15), покладемо

$$\mathcal{F}_n(N_p) \ni f_n \mapsto a_-(\xi_m)f_n :=$$

$$:= n\ldots(n-m+1)f_n^{\xi_m} \in \mathcal{F}_{n-m}(N_p) \quad \text{для} \quad n \in \mathbb{N}_m, \tag{11.6}$$

$$a_-(\xi_m)f_n := 0 \quad \text{для} \quad n = 0,\ldots,m-1.$$

Неважко бачити, що оператори $a_+(\xi_m)$ і $a_-(\xi_m)$, які задаються (11.5) і (11.6) відповідно, є неперервними в кожному n-частковому просторі Фока $\mathcal{F}_n(N_s)$ з відповідним $s \in \mathbb{Z}$. Тому їх можна покоординатно поширити до операторів, визначених на $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_s)$ з відповідним $s \in \mathbb{Z}$.

Лема 11.1. *Оператор* $a_-(\xi_m)$, $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, *заданий через* (11.6), *який розуміємо як оператор*

$$\mathcal{F}(N_p,\gamma(q)) \supset \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p) \ni f \mapsto a_-(\xi_m)f \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p) \subset \mathcal{F}(N_p,\gamma(q)), \tag{11.7}$$

можна продовжити за неперервністю на весь простір $\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))$ *як неперервний оператор, що діє в цьому просторі і задовольняє оцінку*

$$\|a_-(\xi_m)f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))} \le K^{-qm}\|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}}\|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))}, \tag{11.8}$$

$$f \in \mathcal{F}(N_p,\gamma(q)), \quad q \in \mathbb{N}$$

(*ми зберегли позначення* $a_-(\xi_m)$ *для продовження;* $\gamma(q)$ — *вага* (1.7)). *Дія оператора* $a_-(\xi_m)$ *на довільному векторі* $f \in \mathcal{F}(N_p,\gamma(q))$ *задається формулою*

$$a_-(\xi_m)f = a_-(\xi_m)(f_0,f_1,\ldots,f_m,\ldots) = (a_-(\xi_m)f_m, a_-(\xi_m)f_{m+1},\ldots). \tag{11.9}$$

Доведення. Оскільки оператор (11.7) лінійний і простір $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$ щільний в $\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))$, то для доведення леми досить показати, що виконується оцінка (11.8) для $f\in\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$. Згідно з (1.3), (11.6) і (5.15) для $f\in\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_p)$ маємо

$$\|a_-(\xi_m)f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))}=\sum_{n=m}^{\infty}\|a_-(\xi_m)f_n\|^2_{\mathcal{F}_{n-m}(N_p)}((n-m)!)^2K^{q(n-m)}=$$

$$=\sum_{n=m}^{\infty}\left\|\frac{n!}{(n-m)!}f_n^{\xi_m}\right\|^2_{\mathcal{F}_{n-m}(N_p)}((n-m)!)^2K^{q(n-m)}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\|\frac{(n+m)!}{n!}f_{n+m}^{\xi_m}\right\|^2_{\mathcal{F}_n(N_p)}(n!)^2K^{qn}\le$$

$$\le\sum_{n=0}^{\infty}((n+m)!)^2\|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}}\|f_{n+m}\|^2_{\mathcal{F}_{n+m}(N_p)}K^{qn}=$$

$$=\|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}}K^{-qm}\sum_{n=0}^{\infty}\|f_{n+m}\|^2_{\mathcal{F}_{n+m}(N_p)}((n+m)!)^2K^{q(n+m)}\le$$

$$\le K^{-qm}\|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}}\|f\|^2_{\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))}.$$

Лему доведено.

Якщо $\xi_m\in\mathcal{F}_m(N_{-p})$, $p\in\mathbb{N}$, то $\xi_m\in\mathcal{F}_m(N_{-p'})$ для всіх $p'\ge p$. Тому оператор $a_-(\xi_m)$ діє неперервно в кожному просторі $\mathcal{F}(N_{p'},\gamma(q))$, $q\in\mathbb{N}$, а отже, і в $\mathcal{F}(\mathcal{N})$. Спряжений до нього $(a_-(\xi_m))^+$ відносно ланцюжка (11.2) діє неперервно в просторах узагальнених функцій $\mathcal{F}(N_{-p'},(\gamma(q))_F)$ і $(\mathcal{F}(\mathcal{N}))'_F$. Зв'язок між $(a_-(\xi_m))^+$ і $a_-(\xi_m)$ має вигляд

$$((a_-(\xi_m))^+\eta,f)_{F(N_0)}=(\eta,a_-(\xi_m)f)_{F(N_0)},$$

$$\xi_m\in\mathcal{F}_m(N_{-p}),\quad \eta\in\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F),\quad f\in\mathcal{F}(N_p,\gamma(q)).$$

Лема 11.2. *Для кожного* $\xi_m\in\mathcal{F}_m(N_{-p})$, $p\in\mathbb{N}$, $m\in\mathbb{N}_0$, *оператор* $a_+(\xi_m)$ (11.5), *як оператор*

$$\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)\supset\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_{-p})\ni\eta\mapsto a_+(\xi_m)\eta\in\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_{-p})\subset\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F),$$

після продовження за неперервністю є лінійним неперервним оператором в $\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)$ *і задовольняє оцінку*

$$\|a_+(\xi_m)\eta\|^2_{\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)}\le K^{-qm}\|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}}\|\eta\|^2_{\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)},\qquad(11.10)$$

$$\eta\in\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F),\quad q\in\mathbb{N}$$

(ми зберегли позначення $a_+(\xi_m)$ *для продовження; вага* $(\gamma(q))_F=((\gamma_n(q))_F)_{n=0}^{\infty}$, $(\gamma_n(q))_F=K^{-qn}$*). Дія оператора* $a_+(\xi_m)$ *на довільному векторі* $\eta\in\mathcal{F}(N_{-p},$ $(\gamma(q))_F)$ *задається формулою*

$$a_+(\xi_m)\eta = a_+(\xi_m)(\eta_0,\eta_1,\ldots) = (\underbrace{0,\ldots,0}_{m}, a_+(\xi_m)\eta_0, a_+(\xi_m)\eta_1,\ldots). \qquad (11.11)$$

Доведення. Як і при доведенні попередньої леми, досить переконатися у справедливості оцінки (11.10) для $\eta \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_{-p})$. На підставі (1.3) і (11.5) для $\eta \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}(N_{-p})$ одержимо

$$\|a_+(\xi_m)\eta\|^2_{\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \|a_+(\xi_m)\eta_n\|^2_{\mathcal{F}_{n+m}(N_{-p})} K^{-q(n+m)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_m \hat{\otimes} \eta_n\|^2_{\mathcal{F}_{n+m}(N_{-p})} K^{-q(n+m)} \le$$

$$\le \|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} m}} \sum_{n=0}^{\infty} \|\eta_n\|^2_{\mathcal{F}_n(N_{-p})} K^{-q(n+m)} = K^{-qm} \|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} m}} \|\eta\|^2_{\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)}.$$

Неважко зрозуміти, що оператори $a_+(\bar{\xi}_m)\colon \mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F) \to \mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)$ і $a_-(\xi_m) : \mathcal{F}(N_p,\gamma(q) \to \mathcal{F}(N_p,\gamma(q))$ пов'язані, як спряжені відносно ланцюжка (11.2), тобто є справедливою така лема.

Лема 11.3. *Для всіх* $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$, *має місце рівність*

$$a_+(\bar{\xi}_m) = (a_-(\xi_m))^+.$$

Доведення. Зафіксуємо $\xi_m \in \mathcal{F}_m(N_{-p})$, $p \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$. Оскільки згідно з лемами 11.1 і 11.2 дія операторів $a_+(\xi_m)\colon \mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F) \to \mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)$ і $a_-(\xi_m)\colon \mathcal{F}(N_p,\gamma(q)) \to \mathcal{F}(N_p,\gamma(q))$ на довільних векторах $\eta \in \mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)$ і $f \in \mathcal{F}(N_p,\gamma(q))$ визначається відповідно за формулами (11.9) і (11.11), то з урахуванням (11.5), (11.6) і (11.1) дістанемо

$$(\eta, a_-(\xi_m)f)_{F(N_0)} = \sum_{n=m}^{\infty} (\eta_{n-m}, a_-(\xi_m)f_n)_{\mathcal{F}_{n-m}(N_0)}(n-m)! =$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} \left(\eta_{n-m}, \frac{n!}{(n-m)!} f_n^{\xi_m}\right)_{\mathcal{F}_{n-m}(N_0)} (n-m)! =$$

$$= \sum_{n=m}^{\infty} (\eta_{n-m} \hat{\otimes} \bar{\xi}_m, f_n)_{\mathcal{F}_n(N_0)} n! = \sum_{n=0}^{\infty} (\eta_n \hat{\otimes} \bar{\xi}_m, f_{n+m})_{\mathcal{F}_{n+m}(N_0)}(n+m)! =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_+(\bar{\xi}_m)\eta_n, f_{n+m})_{\mathcal{F}_{n+m}(N_0)}(n+m)! = (a_+(\bar{\xi}_m)\eta, f)_{F(N_0)}.$$

Лему доведено.

12. Кохарактери і опис просторів узагальнених функцій. Зафіксуємо $p \in \mathbb{N}_2$, $q \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{N}_0$. У просторі $H^\chi(p,q)$ введемо оператор знищення $\partial_\chi(\xi_m)$, $\xi_m \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} m}$, поклавши (див. (4.13))

$$\partial_\chi(\xi_m) := I_+^\chi a_-(\xi_m)(I_+^\chi)^{-1}. \qquad (12.1)$$

Тобто оператор $\partial_\chi(\xi_m)$ — образ оператора знищення $a_-(\xi_m)$, визначеного у просторі Фока $\mathcal{F}(N_p,\gamma(q))$, $\gamma_n(q)=(n!)^2K^{qn}$, при унітарному ізоморфізмі I_+^χ (4.13) (потрібно покласти $h=\chi$).

Із означення (12.1) оператора $\partial_\chi(\xi_m)$ відразу отримуємо такий результат.

Лема 12.1. *Лінійний оператор* $\partial_\chi(\xi_m)$, $\xi_m\in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}m}$, $p\in\mathbb{N}_2$, $m\in\mathbb{N}_0$, *діє неперервно в кожному просторі* $H^\chi(p',q)$, $p'\geq p$, $q\in\mathbb{N}$ *(а тому і в* Φ*), і задовольняє оцінку*

$$\|\partial_\chi(\xi_m)f\|^2_{H^\chi(p',q)}\leq K^{-qm}\|\xi_m\|^2_{N_{-p',\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}m}}\|f\|^2_{H^\chi(p',q)},\quad f\in H^\chi(p',q).$$

Доведення. Лема відразу випливає із леми 11.1 і (12.1).

Легко переконатися, що дія $\partial_\chi(\xi_m)$, $\xi_m\in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}m}$, на елементарних функціях є такою:

$$\forall n\in\mathbb{N}_0,\ \ x\in Q:\quad \partial_\chi(\xi_m)\langle f_n,\chi_n(x)\rangle=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-m)!}\langle f_n,\xi_m\hat{\otimes}\chi_{n-m}(x)\rangle & \text{для}\quad n\geq m;\\ 0 & \text{для}\quad n<m,\end{cases}\tag{12.2}$$

де $f_n\in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $\chi_n(x)\in N_{-2,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}\subset N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$.

***Зауваження* 12.1.** Оператор $\partial_\chi(\xi_m)$, $\xi_m\in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}m}$, $p\in\mathbb{N}_2$, $m\in\mathbb{N}_0$, можна трактувати як оператор, визначений через (12.2) на елементарних функціях і за лінійністю і неперервністю продовжений на весь простір $H^\chi(p,q)$ (див. [41], лема 5).

Подібно до (12.1) у просторі $H^\omega(p,q)$ введемо оператор знищення $\partial_\omega(\xi_m)$, поклавши

$$\partial_\omega(\xi_m):=I_+^\omega a_-(\xi_m)(I_+^\omega)^{-1}.\tag{12.3}$$

Тут I_+^ω — унітарний ізоморфізм, заданий відображенням (4.13) (потрібно покласти $h=\omega$).

Очевидно, що всі результати, отримані вище для $\partial_\chi(\xi_m)$, зберігаються і для $\partial_\omega(\xi_m)$ (із заміною χ на ω). Більш того, завдяки формулі (10.8) оператори $\partial_\chi(\xi_m)$ і $\partial_\omega(\xi_m)$ „збігаються". Точніше, має місце така лема.

Лема 12.2. *Для всіх* $\xi_m\in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}m}$, $p\in\mathbb{N}_2$, $m\in\mathbb{N}_0$, *маємо*

$$(\partial_\chi(\xi_m))\restriction\Phi=(\partial_\omega(\xi_m))\restriction\Phi=:\partial(\xi_m).\tag{12.4}$$

Доведення. З огляду на те, що лінійна множина $\mathcal{P}(Q)$ щільна у просторі Φ і оператори $\partial_\chi(\xi_m):\Phi\to\Phi$, $\partial_\omega(\xi_m):\Phi\to\Phi$ неперервні, досить показати, що для довільного $\varphi\in\mathcal{P}(Q)$

$$\partial_\chi(\xi_m)\varphi(x)=\partial_\omega(\xi_m)\varphi(x),\quad x\in Q.\tag{12.5}$$

Крім того, оскільки оператори $\partial_\chi(\xi_m)$ і $\partial_\omega(\xi_m)$ лінійні і кожен елемент $\varphi\in\in\mathcal{P}(Q)$ можна подати у вигляді $\varphi(x)=\sum_{n=0}^\infty\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle$, $\varphi_n\in N_{\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}$ (нагадаємо, що кількість доданків в останньому ряді є скінченною), неважко помітити, що рівність (12.5) еквівалентна такій:

$$\partial_\chi(\xi_m)\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle = \partial_\omega(\xi_m)\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle, \qquad x\in Q, \quad \varphi_n\in\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}, \quad n\in\mathbb{N}_0. \tag{12.6}$$

Встановимо (12.6). Нехай $n\geq m$. На підставі (10.8), (5.15) і (12.2) для довільних $\varphi_n\in\mathcal{N}_{\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $x\in Q$ одержимо

$$\partial_\chi(\xi_m)\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle = \partial_\chi(\xi_m)\langle\varphi_n,\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\alpha_{n-k}\hat{\otimes}\chi_k(x)\rangle =$$

$$= \partial_\chi(\xi_m)\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\langle\varphi_n^{\alpha_{n-k}},\chi_k(x)\rangle =$$

$$= \sum_{k=m}^{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{k!}{(k-m)!}\langle\varphi_n^{\alpha_{n-k}},\xi_m\hat{\otimes}\chi_{k-m}(x)\rangle =$$

$$= n!\sum_{l=0}^{n-m}\frac{1}{l!(n-m-l)!}\langle\varphi_n,\alpha_{n-m-l}\hat{\otimes}\xi_m\hat{\otimes}\chi_l(x)\rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\sum_{l=0}^{n-m}\frac{(n-m)!}{l!(n-m-l)!}\langle\varphi_n^{\xi_m},\alpha_{n-m-l}\hat{\otimes}\chi_l(x)\rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\langle\varphi_n^{\xi_m},\omega_{n-m}(x)\rangle = \frac{n!}{(n-m)!}\langle\varphi_n,\xi_m\hat{\otimes}\omega_{n-m}(x)\rangle = \partial_\omega(\xi_m)\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle.$$

У випадку $n<m$ аналогічно отримаємо $\partial_\chi(\xi_m)\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle = \partial_\omega(\xi_m)\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle = 0$.

Лему доведено.

***Зауваження* 12.2.** Неважко бачити, що рівність (12.6) зберігається, якщо замінити $\langle\varphi_n,\omega_n(x)\rangle$ на $\langle f_n,\omega_n(x)\rangle$ або $\langle f_n,\chi_n(x)\rangle$, $f_n\in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $p\in\mathbb{N}_2$. Тобто дія операторів $\partial_\chi(\xi_m)$ і $\partial_\omega(\xi_m)$ на елементарних функціях $\langle f_n,\omega_n(x)\rangle$ або $\langle f_n,\chi_n(x)\rangle$ збігається.

***Зауваження* 12.3.** Оскільки простір Φ щільний у просторах $H^\chi(p,q)$ і $H^\omega(p,q)$, то оператори $\partial_\chi(\xi_m)$ і $\partial_\omega(\xi_m)$ можна розуміти як продовження за неперервністю оператора $\partial(\xi_m)$ на простори $H^\chi(p,q)$ і $H^\omega(p,q)$ відповідно. Надалі ці продовження будемо позначати $\partial(\xi_m)$, нехтуючи індексами χ і ω.

Оскільки $\partial(\xi_m)$ діє неперервно в Φ, то спряжений (відносно (L^2)) до нього оператор $\partial^+(\xi_m)$ діє неперервно в Φ'. Відповідне звуження $\partial^+(\xi_m)$ на $H^\chi(-p,-q)$ або $H^\omega(-p,-q)$ діє неперервно в цих просторах і його можна розуміти як оператор, спряжений до $\partial(\xi_m)$ відносно ланцюжків (9.4) або (10.6) відповідно.

Згідно з лемою 4.2 для $h=\chi$ справедливою є оцінка $|f(x)|<c\|f\|_{H^\chi(p,q)}$, $x\in U\subset Q$, $f\in H^\chi(p,q)$, $p\in\mathbb{N}_3$, $q\in\mathbb{N}$. Тому для будь-якого $x\in Q$ визначено δ-функцію δ_x, зосереджену в точці x:

$$\langle\langle\delta_x,f\rangle\rangle := \overline{f(x)}, \qquad f\in H^\chi(p,q), \quad \delta_x\in H^\chi(-p,-q). \tag{12.7}$$

Таким чином, при $\xi_m\in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}m}$ має сенс узагальнена функція

$$\theta(\xi_m) = \partial^+(\bar{\xi}_m)\delta_e \in H^\chi(-p,-q), \tag{12.8}$$

яку будемо називати *кохарактером Дельсарта* (e-базисна одиниця).

Лема 12.3. *Для* $\xi_m \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$ *і* $f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $n, m \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3$, *справджується співвідношення біортогональності*

$$\langle\langle \theta(\xi_m), \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \rangle\rangle = \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle. \tag{12.9}$$

Доведення. Нехай $m < n$. Згідно з (12.8), (12.2), (12.7) і (9.2) маємо

$$\langle\langle \theta(\xi_m), \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \rangle\rangle = \langle\langle \delta_e, \partial(\bar{\xi}_m)\langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \rangle\rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\langle\langle \delta_e, \langle f_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(\cdot)\rangle \rangle\rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\overline{\langle f_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(e)\rangle} = 0. \tag{12.10}$$

У випадку $n = m$ за підрахунками (12.10) отримуємо

$$\langle\langle \theta(\xi_m), \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \rangle\rangle = n!\overline{\langle f_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} \chi_{n-m}(e)\rangle} = n!\langle \bar{f}_n, \xi_n\rangle = n!\langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle.$$

У випадку $m > n$ вже другий вираз в (12.10) дорівнює нулю внаслідок (12.2).

Лему доведено.

Співвідношення біортогональності (12.9) між характерами і кохарактерами Дельсарта дає можливість більш конструктивно описати простір $H^\chi(-p,-q)$, який згідно з (6.7) має вигляд ($p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ — фіксовані):

$$H^\chi(-p,-q) = \Bigg\{ \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta_n, \ \theta_n \in H_{-n}^\chi(p,q) \ \Bigg| $$

$$\|\theta\|^2_{H^\chi(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\theta_n\|^2_{H_{-n}^\chi(p,q)} (n!)^2 K^{qn} < \infty \Bigg\}. \tag{12.11}$$

Тут

$$H_{-n}^\chi(p,q) := (\mathbb{I}^\chi(p,q))^{-1} H_n^\chi(p), \qquad \|\theta_n\|_{H_{-n}^\chi(p,q)} = \|\mathbb{I}^\chi(p,q)\theta_n\|_{H_n^\chi(p)},$$

де $\mathbb{I}^\chi(p,q)$ — канонічна ізометрія, пов'язана з ланцюжком (9.4).

Теорема 12.1. *Негативний простір* $H^\chi(-p,-q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, *узагальнених функцій має вигляд* (12.11), *де елементарні узагальнені функції* θ_n *збігаються з точністю до множника з кохарактерами Дельсарта* (12.8). *А саме*:

$$\theta_n = n! K^{qn} \theta(\eta_n), \qquad \eta_n = (\mathbb{I}_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} g_n \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}, \tag{12.12}$$

де $g_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ *визначається із рівності* $\mathbb{I}^\chi(p,q)\theta_n = \langle g_n, \chi_n(\cdot)\rangle \in H_n^\chi(p)$; *при цьому*

$$\|\theta_n\|_{H_{-n}^\chi(p,q)} = \|\eta_n\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}}, \quad n \in \mathbb{N}_0 \tag{12.13}$$

(*тут* $\mathbb{I}_p^{\hat{\otimes} n}$ — *канонічна ізометрія, пов'язана з ланцюжком* (6.10)).

Доведення. Зафіксуємо $m \in \mathbb{N}_0$. Вектор $\theta_m \in H^{\chi}_{-m}(p,q)$ має вигляд

$$\theta_m = (\mathbb{I}^{\chi}(p,q))^{-1}\langle g_m, \chi_m(\cdot)\rangle.$$

Покладемо $\eta_m = (\mathbb{I}_p^{\hat{\otimes} m})^{-1} g_m$. Для різниці

$$(\theta_m - m! K^{qm}\theta(\eta_m)) \in H^{\chi}(-p,-q)$$

при довільній елементарній функції $\langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \in H^{\chi}(p,q)$, $f_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, згідно з співвідношеннями біортогональності (12.9) і (6.11) (для $h_n(x) = \chi_n(x)$) маємо

$$\langle\langle \theta_m - m! K^{qm}\theta(\eta_m), \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \theta_m, \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle - \langle\langle m! K^{qm}\theta(\eta_m), \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle =$$

$$= \delta_{n,m}\langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle (n!)^2 K^{qn} - n! K^{qn}\delta_{n,m}\langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle n! = 0.$$

Вектори $\langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$, утворюють тотальну систему в $H^{\chi}(p,q)$, тому із останньої рівності випливає $\theta_m = m! K^{qm}\theta(\eta_m)$. Це доводить (12.12).

Рівність (12.13) очевидна:

$$\|\theta_n\|_{H^{\chi}_{-n}(p,q)} = \|\mathbb{I}^{\chi}(p,q)\theta_n\|_{H^{\chi}_n(p)} = \|\langle g_n, \chi_n(\cdot)\rangle\|_{H^{\chi}_n(p)} =$$

$$= \|g_n\|_{N^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbb{C}}} = \|(\mathbb{I}_p^{\hat{\otimes} n})^{-1} g_n\|_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}} = \|\eta_n\|_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}}.$$

Теорему доведено.

Рівності (12.12), (12.13) дають можливість переписати зображення (12.11) для простору $H^{\chi}(-p,-q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, у вигляді

$$H^{\chi}(-p,-q) = \Bigg\{ \theta = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\eta_n) n! K^{qn},\ \eta_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}} \ \Bigg| $$

$$\|\theta\|^2_{H^{\chi}(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\eta_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}} (n!)^2 K^{qn} < \infty \Bigg\}. \qquad (12.14)$$

Оскільки $\partial(\eta_n)$ лінійно залежить від η_n, то відображення

$$N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}} \ni \eta_n \mapsto \partial^{+}(\bar{\eta}_n)\delta_e = \theta(\eta_n) \in H^{\chi}(-p,-q)$$

також лінійне. Це дозволяє в (12.14) виконати заміну змінних $n! K^{qn}\eta_n = \xi_n$, після чого зображення (12.14) для $H^{\chi}(-p,-q)$ набере вигляду

$$H^{\chi}(-p,-q) = \Bigg\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\xi_n),\ \xi_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}} \ \Bigg| $$

$$\|\xi\|^2_{H^{\chi}(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}} K^{-qn} < \infty \Bigg\}. \qquad (12.15)$$

„Координатно" спарювання цього простору з $H^\chi(p,q)$ має вигляд

$$\forall \xi \in H^\chi(-p,-q), \quad \forall f \in H^\chi(p,q): \quad \langle\langle \xi, f\rangle\rangle = (\xi, f)_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle n!. \tag{12.16}$$

Зазначимо, що формула (12.16) випливає із (6.3), формули (12.12) і співвідношення біортогональності (12.9) (потрібно врахувати виконану заміну змінних).

Зауваження **12.4.** Простір $H^\chi(-p,-q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, (12.15) унітарно ізоморфний негативному простору Фока $\mathcal{F}(N_{-p}, (\gamma(q))_F)$ із оснащенням (1.5) з вагою $(\gamma(q))_F = ((\gamma_n(q))_F)_{n=0}^{\infty}$, $(\gamma_n(q))_F = K^{-qn}$. Ізоморфізм задається відображенням

$$\mathcal{F}(N_{-p}, (\gamma(q))_F) \ni \xi = (\xi_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto I_-^\chi \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\xi_n) \in H^\chi(-p,-q), \tag{12.17}$$

$$\|I_-^\chi \xi\|^2_{H^\chi(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} = \|\xi\|^2_{\mathcal{F}(N_{-p},(\gamma(q))_F)}.$$

Зауваження **12.5.** Оператори I_+^χ (див. (4.13)) і I_-^χ (див. (12.17)) пов'язані таким чином:

$$(I_-^\chi \xi, I_+^\chi f)_{(L^2)} = (\xi, f)_{F(N_0)}, \tag{12.18}$$

$$\xi \in \mathcal{F}(N_{-p}, (\gamma(q))_F), \quad f \in \mathcal{F}(N_p, \gamma(q)),$$

$$\gamma(q) = (\gamma_n(q))_{n=0}^{\infty}, \quad \gamma_n(q) = (n!)^2 K^{qn}.$$

Про таку пару операторів (I_-^χ, I_+^χ) можна сказати, що вона є біунітарним відображенням між оснащенням (11.2) простору Фока $F(N_0)$ і оснащенням (9.4) простору (L^2) (детальніше див. [44]).

Справді, з урахуванням (4.13) і (12.17), скориставшись (12.16), відразу отримаємо

$$(I_-^\chi \xi, I_+^\chi f)_{(L^2)} = \langle\langle I_-^\chi \xi, I_+^\chi f\rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle n! = \sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n, f_n)_{\mathcal{F}_n(N_0)} n! = (\xi, f)_{F(N_0)}.$$

Наслідок 12.1. *Для всіх* $\xi_m \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $m \in \mathbb{N}_0$, $p \in \mathbb{N}_3$, *справджується рівність*

$$\partial^+(\xi_m) = I_-^\chi a_+(\bar{\xi}_m)(I_-^\chi)^{-1}. \tag{12.19}$$

Рівність (12.19) випливає із зауваження 12.5, леми 11.3 і твердження 2 із [44].

Наслідок 12.2. *Як прямий наслідок* (11.5) *і* (12.19) *має місце рівність*

$$\partial^+(\xi_m)\theta(\eta_n) = \theta(\bar{\xi}_m \hat{\otimes} \eta_n), \tag{12.20}$$

де $\xi_m \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $\eta_n \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Перейдемо до розгляду просторів узагальнених функцій $H^\omega(-p,-q)$ і відповідних кохарактерів. Неважко бачити, що функція $1 \in (L^2) \subset H^\omega(-p,-q) \subset \Phi'$,

$p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_3$. Тому подібно до (12.8) можна ввести кохарактери Аппеля з коефіцієнтом $\xi_m \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $m \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathcal{Q}(\xi_m) := \partial^+(\bar{\xi}_m)1 \in H^\omega(-p,-q). \tag{12.21}$$

Покажемо, що для кохарактерів (12.21) має місце аналог леми 12.3. Перш за все звернемо увагу на те, що при доведенні леми 12.3 важливу роль відігравало співвідношення (12.9) „біортогональності між χ_n і δ_e". Таку ж роль відіграє співвідношення „біортогональності між ω_n і 1". Встановимо це співвідношення.

Лема 12.4. *Справджується рівність*

$$\langle\langle 1, \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle = \delta_{n,0}\overline{\langle f_0, 1\rangle} = \delta_{n,0}\bar{f}_0, \tag{12.22}$$

де $f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $n \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Оскільки $\rho(Q) = 1$ і $\omega_0(x) = 1$ $\forall x \in Q$, то при $n = 0$ рівність (12.22) очевидна. Встановимо її для $n \in \mathbb{N}$. Згідно з лемою 4.1 (для $h = \omega$) при $\lambda \in N_{p,\mathbb{C}}$, $\|\lambda\|_{N_{p,\mathbb{C}}} < r = \min\{R_\omega, D^{-1}\}$ ряд

$$\omega(x,\lambda) = \frac{\chi(x,\lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \omega_n(x)\rangle$$

збігається в (L^2), крім того, $\langle \lambda^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle \in (L^2)$. Тому врахувавши (10.1), одержимо

$$1 = \left\langle\!\!\left\langle 1, \frac{\chi(\cdot,\lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)} \right\rangle\!\!\right\rangle = \left\langle\!\!\left\langle 1, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\langle \lambda^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle \right\rangle\!\!\right\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left\langle\!\!\left\langle 1, \langle \lambda^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle \right\rangle\!\!\right\rangle. \tag{12.23}$$

Підставивши в (12.23) $\lambda = ze$, де e — орт простору $N_{p,\mathbb{C}}$, $z \in \mathbb{C}^1$, $|z| < r$, дістанемо

$$1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\bar{z}^n}{n!}\langle\langle 1, \langle e^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle\rangle\rangle,$$

звідки

$$\left\langle\!\!\left\langle 1, \langle e^{\otimes n}, \omega_n(\cdot)\rangle \right\rangle\!\!\right\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{12.24}$$

Завдяки цій рівності, поляризаційній тотожності і лінійності відносно $e^{\otimes n}$ виразу, що стоїть у лівій частині (12.24), маємо

$$\left\langle\!\!\left\langle 1, \langle g_n, \omega_n(\cdot)\rangle \right\rangle\!\!\right\rangle = 0, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{12.25}$$

для щільної в $N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $p \in \mathbb{N}_3$, множини векторів g_n. Зважаючи на те, що $1 \in H^\omega(-p,-q)$ і збіжність $g_n \to f_n$ в $N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ приводить до збіжності $\langle g_n, \omega_n(\cdot)\rangle \to \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle$ в топології простору $H^\omega(p,q)$, можна апроксимувати такими векторами g_n довільне $f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$ в цьому просторі і перейти в (12.25) до границі. В результаті отримаємо (12.22) при $n \in \mathbb{N}$.

Тепер ми легко встановимо таку лему.

Лема 12.5. *Має місце співвідношення біортогональності*

$$\left\langle\!\!\left\langle \mathcal{Q}(\xi_m), \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle \right\rangle\!\!\right\rangle = \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle, \tag{12.26}$$

де $\xi_m \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $f_n \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $n, m \in \mathbb{N}_0$.

Доведення. Із (12.21) і (12.22), використавши рівності (12.2) і (5.15), відразу дістанемо

$$\left\langle\left\langle \mathcal{Q}(\xi_m), \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle \right\rangle\right\rangle = \left\langle\left\langle 1, \partial(\bar{\xi}_m)\langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle \right\rangle\right\rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\left\langle\left\langle 1, \langle f_n, \bar{\xi}_m \hat{\otimes} \omega_{n-m}(\cdot)\rangle \right\rangle\right\rangle =$$

$$= \frac{n!}{(n-m)!}\left\langle\left\langle 1, \langle f_n^{\bar{\xi}_m}, \omega_{n-m}(\cdot)\rangle \right\rangle\right\rangle = \delta_{n,m} n! \overline{\langle f_n^{\bar{\xi}_n}, 1\rangle} =$$

$$= \delta_{n,m} n! \langle \bar{f}_n, \xi_n\rangle = \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle.$$

Остання лема дозволяє по аналогії з доведенням теореми 12.1 отримати наступний результат.

Теорема 12.2. *Негативний простір узагальнених функцій* $H^\omega(-p,-q)$, $p, q \in \in \mathbb{N}_3$, *має вигляд*

$$H^\omega(-p,-q) = \left\{ \xi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n),\ \xi_n \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n} \,\middle|\right.$$

$$\left. \|\xi\|^2_{H^\omega(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} < \infty \right\}. \qquad (12.27)$$

Координатно спарювання між $H^\omega(p,q)$ *і* $H^\omega(-p,-q)$ *має вигляд*

$$\langle\langle \xi, f\rangle\rangle = (\xi, f)_{(L^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \bar{f}_n\rangle n!, \qquad (12.28)$$

де $\xi \in H^\omega(-p,-q)$ *і* $f \in H^\omega(p,q)$.

Зауваження **12.6.** Зауваження 12.4, 12.5 і наслідки 12.1, 12.2 є справедливими і у даному випадку, лише необхідно замінити I_+^χ, I_-^χ, $H^\chi(-p,-q)$, θ на I_+^ω, I_-^ω, $H^\omega(-p,-q)$, $\mathcal{Q}$ відповідно.

13. Оператори узагальненого зсуву Тейлора – Дельсарта. Сім'ю T (див. п. 8) з фіксованою множиною характерів $(\chi(x,\lambda))_{\lambda \in B_\chi}$ назвемо сім'єю операторів узагальненого зсуву Тейлора – Дельсарта, якщо існує сім'я лінійних неперервних операторів $\mathcal{L}(\xi_m)$, $m \in \mathbb{N}_0$,

$$H^\chi(p,q) \ni f \mapsto \mathcal{L}(\xi_m) f \in C(Q), \qquad \xi_m \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} m}, \quad p \in \mathbb{N}_3, \quad q \in \mathbb{N},$$

таких, що характер $\chi(x,\lambda)$ є їх „власною функцією” в такому розумінні:

$$\forall \xi_m \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} m},\ p \in \mathbb{N}_3,\ q \in \mathbb{N}: \quad (\mathcal{L}(\xi_m)\chi(\cdot,\lambda))(x) = \langle \lambda^{\otimes m}, \xi_m\rangle \chi(x,\lambda), \quad (13.1)$$

$$x \in Q, \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}) = \{\lambda \in N_{p,\mathbf{C}} \mid \|\lambda\|_{N_{p,\mathbf{C}}} < K^{-\frac{q}{2}}\}$$

(нагадаємо, що при $\lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}})$, $p \in \mathbb{N}_3$, внаслідок зауваження 4.7 $h(\cdot,\lambda) = = \chi(\cdot,\lambda) \in H^\chi(p,q)$).

***Зауваження* 13.1.** Оператор $\mathcal{L}(\xi_m)\colon H^{\chi}(p,q) \to C(Q)$ неперервний в такому розумінні: якщо $f_n \to f$ за нормою простору $H^{\chi}(p,q)$, то $\mathcal{L}(\xi_m)f_n \to \mathcal{L}(\xi_m)f$ у сенсі збіжності в $C(Q)$ (тобто рівномірно на кожній кулі).

***Приклад* 13.1** (одновимірний випадок). На функціях $f \in C(\mathbb{R}^1)$ введемо лінійний оператор

$$(\mathcal{L}f)(x) = a(f(x+1) - f(x)), \qquad x \in Q = \mathbb{R}^1, \quad a > 0. \tag{13.2}$$

Застосуємо (13.2) до характерів (8.2):

$$(\mathcal{L}\chi(\cdot,\lambda))(x) = a(\chi(x+1,\lambda) - \chi(x,\lambda)) =$$

$$= a\exp((x+1)\log\left(1+\frac{\lambda}{a}\right) - \exp\left(x\log\left(1+\frac{\lambda}{a}\right)\right) =$$

$$= \lambda\exp\left(x\log\left(1+\frac{\lambda}{a}\right)\right) = \lambda\chi(x,\lambda), \quad x \in Q = \mathbb{R}^1, \ \lambda \in B.$$

Таким чином, оператори T_x із прикладу 8.2 з фіксованою множиною характерів (8.2) утворюють сім'ю операторів узагальненого зсуву Тейлора – Дельсарта (потрібна неперервність оператора $\mathcal{L}$ є очевидною).

Не зупиняючись на деталях, зазначимо, що оператори T_x із прикладу 8.1 з фіксованою множиною характерів $\chi(x,\lambda) = \exp\langle x,\lambda\rangle$ також утворюють сім'ю операторів узагальненого зсуву Тейлора – Дельсарта.

Неважко бачити, що насправді оператор $\mathcal{L}(\xi_m)$ діє неперервно у просторі $H^{\chi}(p,q)$ і збігається з оператором $\partial(\xi_m)\colon H^{\chi}(p,q) \to H^{\chi}(p,q)$.

Теорема 13.1. *Припустимо, що сім'я T є сім'єю операторів узагальненого зсуву Тейлора – Дельсарта. Для кожного $\xi_m \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} m}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $m \in \mathbb{N}_0$, оператор $\mathcal{L}(\xi_m)$ діє неперервно у просторі $H^{\chi}(p,q)$, $q \in \mathbb{N}$, і*

$$\partial(\xi_m) = \mathcal{L}(\xi_m). \tag{13.3}$$

Доведення. Теорему буде встановлено, якщо ми покажемо, що

$$\forall f \in H^{\chi}(p,q): \quad \partial(\xi_m)f(x) = \mathcal{L}(\xi_m)f(x), \quad x \in Q.$$

Для цього досить переконатися, що оператори $\partial(\xi_m)$ і $\mathcal{L}(\xi_m)$, як оператори, що діють із $H^{\chi}(p,q)$ в $C(Q)$, збігаються. Оскільки оператори $\partial(\xi_m)\colon H^{\chi}(p,q) \to \to C(Q)$ і $\mathcal{L}(\xi_m)\colon H^{\chi}(p,q) \to C(Q)$ є лінійними і неперервними, то достатньо показати, що

$$\partial(\xi_m)\langle f_n, \chi_n(x)\rangle = \mathcal{L}(\xi_m)\langle f_n, \chi_n(x)\rangle, \qquad x \in Q, \quad f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}.$$

(Неперервність оператора $\partial(\xi_m) : H^{\chi}(p,q) \to C(Q)$ відразу випливає із неперервності $\partial(\xi_m)$ у просторі $H^{\chi}(p,q)$ (лема 12.5) і неперервності вкладення $H^{\chi}(p,q) \hookrightarrow C(Q)$ (теорема 9.1).)

Використовуючи розклад (9.1) для $\lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}})$ і враховуючи неперервність $\mathcal{L}(\xi_m)$, отримуємо

$$\Big(\mathcal{L}(\xi_m)\chi(\,\cdot\,,\lambda)\Big)(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\mathcal{L}(\xi_m)\langle\lambda^{\otimes n},\chi_n(x)\rangle,$$

$$\langle\lambda^{\otimes m},\xi_m\rangle\chi(x,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes m},\xi_m\rangle\langle\lambda^{\otimes n},\chi_n(x)\rangle= \tag{13.4}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\langle\lambda^{\otimes(m+n)},\xi_m\hat{\otimes}\chi_n(x)\rangle=\sum_{n=m}^{\infty}\frac{1}{(n-m)!}\langle\lambda^{\otimes n},\xi_m\hat{\otimes}\chi_{n-m}(x)\rangle.$$

Ряди у правих частинах (13.4) на основі (13.1) збігаються до однієї суми для будь-яких $x\in Q$. Тому якщо покласти $\lambda=ze$, де $e\in N_{p,\mathbb{C}}$, $p\in\mathbb{N}_3$, $\|e\|_{N_{p,\mathbb{C}}}=1$, $z\in\mathbb{C}^1$, $|z|<K^{-\frac{q}{2}}$, то із (13.4), порівнюючи коефіцієнти при z^n, для $x\in Q$, $n\in\mathbb{N}_0$ знайдемо

$$\mathcal{L}(\xi_m)\langle e^{\otimes n},\chi_n(x)\rangle=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-m)!}\langle e^{\otimes n},\xi_m\hat{\otimes}\chi_{n-m}(x)\rangle & \text{для}\quad n\geq m;\\ 0 & \text{для}\quad n<m.\end{cases} \tag{13.5}$$

За допомогою поляризаційної тотожності робимо висновок, що (13.5) має місце і у випадку, коли $e^{\otimes n}$ замінити на $e_1\hat{\otimes}\ldots\hat{\otimes}e_n$, де $e_1,\ldots,e_n\in N_{p,\mathbb{C}}$, $\|e_1\|_{N_{p,\mathbb{C}}}=\ldots=\|e_n\|_{N_{p,\mathbb{C}}}$. Далі, нехай $(e_j)_{j=1}^{\infty}$ — ортонормований базис у просторі N_p. Побудуємо по ньому БЧЗ $(\tilde{e}_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_{0,fin}^{\infty}}$ (1.9) у просторі $\mathcal{F}(N_p)$, тоді $(e_\tau)_{\tau\in\mathbb{N}_{0,fin}^{\infty}|\tau|=n}$, $n\in\mathbb{N}_0$, — ортонормований базис у $\mathcal{F}_n(N_p)=N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$. Оскільки оператор $\mathcal{L}(\xi_m):H^h(p,q)\to C(Q)$ неперервний, то для довільного $f_n\in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}n}$, $p\in\mathbb{N}_3$, з координатами $f_{n;\tau}$ у введеному вище базисі маємо

$$\mathcal{L}(\xi_m)\langle f_n,\chi_n(x)\rangle=\sum_{\tau\in\mathbb{N}_{0,fin}^{\infty}|\tau|=n}f_{n;\tau}\mathcal{L}(\xi_m)\langle e_\tau,\chi_n(x)\rangle=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-m)!}\displaystyle\sum_{\tau\in\mathbb{N}_{0,fin}^{\infty}|\tau|=n}f_{n;\tau}\langle e_\tau,\xi\hat{\otimes}\chi_{n-m}(x)\rangle & \text{для}\quad n\geq m;\\ 0 & \text{для}\quad n<m\end{cases}=$$

$$=\begin{cases}\dfrac{n!}{(n-m)!}\langle f_n,\xi\hat{\otimes}\chi_{n-m}(x)\rangle & \text{для}\quad n\geq m;\\ 0 & \text{для}\quad n<m\end{cases}=\partial(\xi_m)\langle f_n,\chi_n(x)\rangle,\quad x\in Q.$$

Теорему доведено.

14. Інтегральні перетворення. Як і у випадку звичайного зсуву, можна ввести інтегральні перетворення C, S і T. У цьому пункті ми наведемо означення та основні властивості цих операторів і встановимо зв'язок між ними.

Оскільки простори $H^\omega(p,q)$ і $H^\chi(p,q)$ унітарно ізоморфні простору Фока $F(N_p,\gamma(q))$, то існує природний унітарний ізоморфізм між ними.

Лема 14.1. *Лінійне відображення* $I_+^{\chi\omega} := I_+^{\omega} \circ (I_+^{\chi})^{-1}$, *задане через*

$$H^{\chi}(p,q) \ni f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \mapsto I_+^{\chi\omega} f(\cdot) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle \in H^{\omega}(p,q), \qquad p \in \mathbb{N}_2, \quad q \in \mathbb{N},$$

є унітарним ізоморфізмом. Обернене до нього $I_+^{\omega\chi} := I_+^{\chi} \circ (I_+^{\omega})^{-1}$ *є унітарним ізоморфізмом між* $H^{\omega}(p,q)$ *і* $H^{\chi}(p,q)$ *і задається через*

$$H^{\omega}(p,q) \ni f(\cdot) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle \mapsto I_+^{\omega\chi} f(\cdot) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \chi_n(\cdot)\rangle \in H^{\chi}(p,q), \qquad p \in \mathbb{N}_2, \quad q \in \mathbb{N}.$$

Виявляється, що унітарний ізоморфізм $I_+^{\omega\chi} : H^{\omega}(p,q) \to H^{\chi}(p,q)$ має простий аналітичний вигляд. Знайдемо його.

C-перетворенням називається лінійний оператор, визначений на деякій множині неперервних функцій $f \in C(Q)$ таким чином:

$$(\mathsf{C}f)(x) := \int_Q (T_x f)(y) d\rho(y), \quad x \in Q, \tag{14.1}$$

де T_x — оператор узагальненого зсуву (див. п. 8). Нижче ми переконаємося, що оператор (14.1), визначений на функціях із простору $H^{\omega}(p,q) \subset C(Q)$, і є вказаним ізоморфізмом $I_+^{\omega\chi}$.

Перш за все встановимо формули типу (9.9) для підрахунку $(T_x\omega_n(\cdot))(y)$.

Лема 14.2. *Для* $x, y \in Q$, $n \in \mathbb{N}_0$ *маємо*

$$(T_x\omega_n(\cdot))(y) = \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!} \alpha_k \hat{\otimes} \chi_l(x) \hat{\otimes} \chi_m(y) =$$

$$= \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!} \beta_k \hat{\otimes} \omega_l(x) \hat{\otimes} \omega_m(y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \chi_m(x) \hat{\otimes} \omega_{n-m}(y), \tag{14.2}$$

де α_k, β_k *такі, як у* (10.8).

Доведення. Зафіксуємо $x, y \in Q$, $n \in \mathbb{N}_0$. Згідно з (10.8) і (9.9) маємо

$$(T_x\omega_n(\cdot))(y) = \left(T_x\left(\sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \alpha_{n-r} \hat{\otimes} \chi_r(\cdot)\right)\right)(y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \alpha_{n-r} \hat{\otimes} (T_x \chi_r(\cdot))(y) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \frac{n!}{r!(n-r)!} \alpha_{n-r} \hat{\otimes} \left(\sum_{s=0}^{r} \frac{r!}{s!(r-s)!} \chi_s(x) \hat{\otimes} \chi_{r-s}(y) \right) =$$

$$= \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{r} \frac{n!}{(n-r)!s!(r-s)!} \alpha_{n-r} \hat{\otimes} \chi_s(x) \hat{\otimes} \chi_{r-s}(y) =$$

$$= \sum_{k+l+m=n} \frac{n!}{k!l!m!} \alpha_k \hat{\otimes} \chi_l(x) \hat{\otimes} \chi_m(y). \qquad (14.3)$$

Перший вираз для $(T_x \omega_n(\cdot))(y)$ встановлено.

Пересвідчимось у справедливості третього. Використавши (10.8) із (14.3), дістанемо необхідне:

$$(T_x \omega_n(\cdot))(y) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{s=0}^{r} \frac{n!}{(n-r)!s!(r-s)!} \alpha_{n-r} \hat{\otimes} \chi_s(x) \hat{\otimes} \chi_{r-s}(y) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!} \chi_s(x) \hat{\otimes} \left(\sum_{r=s}^{n} \frac{(n-s)!}{(n-r)!(r-s)!} \alpha_{n-r} \hat{\otimes} \chi_{r-s}(y) \right) =$$

$$= \sum_{s=0}^{n} \frac{n!}{s!(n-s)!} \chi_s(x) \hat{\otimes} \left(\sum_{r=0}^{n-s} \frac{(n-s)!}{r!(n-s-r)!} \alpha_{n-s-r} \hat{\otimes} \chi_r(y) \right) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \chi_m(x) \hat{\otimes} \omega_{n-m}(y).$$

Для доведення другого виразу потрібно в третій підставити зображення (10.8) для $\chi_m(x)$.

Лема 14.3. *C-перетворення переводить характери Аппеля в характери Дельсарта в такому сенсі:*

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad (\mathsf{C}\langle f_n, \omega_n(\,\cdot\,)\rangle)(x) = \langle f_n, \chi_n(x)\rangle, \quad x \in Q, \quad f_n \in N_{p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes} n}, \quad p \in \mathbb{N}_3. \qquad (14.4)$$

Доведення. Використовуючи третій вираз із (14.2) і рівності (9.8) і (5.15), отримуємо

$$(T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot)\rangle)(y) = \langle f_n, (T_x \omega_n(\cdot))(y)\rangle =$$

$$= \left\langle f_n, \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \chi_m(x) \hat{\otimes} \omega_{n-m}(y) \right\rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \langle f_n, \chi_m(x) \hat{\otimes} \omega_{n-m}(y) \rangle =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \langle f_n^{\chi_m(x)}, \omega_{n-m}(y) \rangle. \tag{14.5}$$

При фіксованому $x \in Q$ $\forall m = 0, \dots, n$ вектор $f_n^{\chi_m(x)} \in N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}$ і тому функція $Q \ni y \mapsto \langle f_n^{\chi_m(x)}, \omega_{n-m}(y) \rangle$ входить в (L^2). Але тоді згідно з (14.5) $f(y) = (T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y)$ входить в (L^2), тобто є інтегровною в квадраті відносно $d\rho(y)$, а значить, і інтегровною. Таким чином, інтеграл (14.1) існує і ліва частина рівності (14.4) має сенс.

Сама ця рівність випливає із (14.5) і (12.22):

$$\int_Q (T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y) d\rho(y) =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \int_Q \langle f_n^{\chi_m(x)}, \omega_{n-m}(y) \rangle d\rho(y) = \langle f_n^{\chi_n(x)}, 1 \rangle = \langle f_n, \chi_n(x) \rangle.$$

Лему доведено.

Тепер можна встановити таке твердження.

Теорема 14.1. *С-перетворення є унітарним оператором, що переводить* $H^\omega(p,q)$ *в* $H^\chi(p,q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}_2$. *Більш того, має місце рівність*

$$I_+^{\omega\chi} = \mathsf{C}. \tag{14.6}$$

Доведення. Із (14.1) з урахуванням (14.4) для $f \in H^\omega(p,q)$ дістанемо

$$(\mathsf{C}f)(x) = \left(\mathsf{C} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle \right) \right)(x) = \int_Q \left(T_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle \right) \right)(y) d\rho(y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_Q (T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y) d\rho(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (\mathsf{C} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(x) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \chi_n(x) \rangle = (I_+^{\omega\chi} f)(x), \quad x \in Q.$$

Зрозуміло, що ця викладка формальна. Щоб надати їй строгого математичного сенсу, потрібно обґрунтувати справедливість третьої рівності в цьому підрахунку.

Оскільки $f \in H^\omega(p,q)$, то згідно з лемою 4.2 ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(x) \rangle = f(x)$ збігається рівномірно на кожній кулі з Q. Тому на основі припущення г) з п. 8 для довільних фіксованих $x, y \in Q$ послідовність $\sum_{n=0}^{m} (T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y) \rightarrow$ $\rightarrow (T_x (\sum_{n=0}^{\infty} \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle))(y)$ при $m \to \infty$. Зрозуміло, що

$$\int_Q \sum_{n=0}^{m} (T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y) d\rho(y) = \sum_{n=0}^{m} \int_Q (T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y) d\rho(y). \tag{14.7}$$

Перейшовши в (14.7) до границі при $m \to \infty$, отримаємо потрібну рівність.

Можливість граничного переходу під знаком інтеграла в лівій частині (14.7) випливає із теореми Лебега про граничний перехід. В якості інтегровної мажоранти для послідовності $\left(\sum_{n=0}^{m} (T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y) \right)_{m=0}^{\infty}$ можна взяти $\sum_{n=0}^{\infty} |(T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y)|$.

Справді, використовуючи (14.5), нерівність Коші–Буняковського, (5.15), (5.14), а також (4.3) і (3.7) для $h_n(x) = \omega_n(x)$, на підставі теореми Б. Леві отримаємо (нагадаємо, що $\rho(Q) = 1$)

$$\forall r \in (0, R_\omega) \quad \text{і} \quad \forall x \in Q: \quad \int_Q \sum_{n=0}^{\infty} |(T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y)| d\rho(y) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \int_Q |(T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y)| d\rho(y) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} \int_Q |\langle f_n^{\chi_m(x)}, \omega_{n-m}(y) \rangle| d\rho(y) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!(n-m)!} L D^{n-m} (n-m)! \| f_n^{\chi_m(x)} \|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \leq$$

$$\leq L \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!} K^{\frac{n-m}{2}} \| f_n \|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \| \chi_m(x) \|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \leq$$

$$\leq L \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{n} \frac{n!}{m!} K^{\frac{n-m}{2}} \| f_n \|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} \| \chi_m(x) \|_{N_{-3,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \leq$$

$$\leq L \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = r} |\chi(x, \lambda)| \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{\frac{n}{2}} n! \sum_{m=0}^{n} \frac{m! e^m \| O_{3,2} \|_{HS}^m}{m! K^{\frac{m}{2}} r^m}. \tag{14.8}$$

Оскільки згідно з (5.14) $K^{\frac{1}{2}} > \dfrac{e\|O_{3,2}\|_{HS}}{R_\omega}$, то можна вибрати $r \in (0, R_\omega)$ так, щоб $\dfrac{e\|O_{3,2}\|_{HS}}{K^{\frac{1}{2}} r}$ було меншим за одиницю. Для такого фіксованого r ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{e\|O_{3,2}\|_{HS}}{K^{\frac{1}{2}} r} \right)^m = c < \infty.$$

Врахувавши останнє і (14.8), для $q \in \mathbb{N}_2$ дістанемо

$$\int_Q \sum_{n=0}^{\infty} |(T_x \langle f_n, \omega_n(\cdot) \rangle)(y)| d\rho(y) \leq cL \sup_{\|\lambda\|_{N_{2,\mathbb{C}}} = r} |\chi(x, \lambda)| \sum_{n=0}^{\infty} \| f_n \|_{N_{p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{\frac{(q-1)n}{2}} n! \leq$$

$$\leq cL \sup_{\|\lambda\|_{\mathcal{N}_{2,\mathbb{C}}}=r} |\chi(x,\lambda)| \left(\sum_{n=0}^{\infty} \|f_n\|^2_{\mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{p,\mathbb{C}}} K^{qn}(n!)^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^{-n}\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq c_1(x)\|f\|_{H^{\omega}(p,q)} < \infty$$

при кожному $x \in Q$.

Теорему доведено.

Із теореми випливає, що звуження C на $\Phi = \Phi^{\chi} = \Phi^{\omega}$ є неперервним оборотним оператором у цьому просторі. Звідси випливає, що *спряжений оператор* C^+ *до* C *відносно* $\langle\langle \cdot, \cdot \rangle\rangle$ *є унітарним оператором, який переводить весь* $H^{\chi}(-p,-q)$ *на весь* $H^{\omega}(-p,-q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, *і неперервним оборотним в* $\Phi' = (\Phi^{\chi})' = (\Phi^{\omega})'$.

Зв'язок між C^+ і C такий:

$$\forall p, q \in \mathbb{N}_3: \quad \langle\langle \mathsf{C}^+\xi, f \rangle\rangle = \langle\langle \xi, \mathsf{C}f \rangle\rangle, \tag{14.9}$$

$$\xi \in H^{\chi}(-p,-q), \qquad f \in H^{\omega}(p,q).$$

Більш того, *оператор* C^+ *переводить кохарактери Дельсарта в кохарактери Аппеля*:

$$\mathsf{C}^+\theta(\xi_n) = \mathcal{Q}(\xi_n), \qquad \xi_n \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad p \in \mathbb{N}_3. \tag{14.10}$$

Справді, для будь-яких $\xi_n \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}$, $n \in \mathbb{N}_0$, згідно з (14.9), (14.4) і співвідношеннями біортогональності (12.9), (12.26) маємо

$$\langle\langle \mathsf{C}^+\theta(\xi_n) - \mathcal{Q}(\xi_n), \langle f_m, \omega_m(\cdot)\rangle \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \mathsf{C}^+\theta(\xi_n), \langle f_m, \omega_m(\cdot)\rangle \rangle\rangle - \langle\langle \mathcal{Q}(\xi_n), \langle f_m, \omega_m(\cdot)\rangle \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \theta(\xi_n), \mathsf{C}\langle f_m, \omega_m(\cdot)\rangle \rangle\rangle - \langle\langle \mathcal{Q}(\xi_n), \langle f_m, \omega_m(\cdot)\rangle \rangle\rangle =$$

$$= \langle\langle \theta(\xi_n), \langle f_m, \chi_m(\cdot)\rangle \rangle\rangle - \langle\langle \mathcal{Q}(\xi_n), \langle f_m, \omega_m(\cdot)\rangle \rangle\rangle =$$

$$= \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle - \delta_{n,m} n! \langle \xi_n, \bar{f}_n \rangle = 0.$$

Завдяки щільності лінійної оболонки множини функцій $\langle f_m, \omega_m(x)\rangle$, $f_m \in \mathcal{N}^{\hat{\otimes} m}_{p,\mathbb{C}}$, $p \in \mathbb{N}_3$, $m \in \mathbb{N}_0$, в (L^2) із останньої рівності випливає (14.10).

Із означення просторів $H^{\chi}(-p,-q)$ і $H^{\omega}(-p,-q)$ випливає, що дія C^+ на $\xi \in H^{\chi}(-p,-q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, має вигляд

$$\mathsf{C}^+\xi = \mathsf{C}^+\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta(\xi_n)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n) \in H^{\omega}(-p,-q). \tag{14.11}$$

S-*перетворенням* називається інтегральний оператор

$$(\mathsf{S}f)(\lambda) := \int_Q f(x)\overline{k_S(\lambda, x)}\, d\rho(x) = \langle\langle f, k_S(\lambda, \cdot) \rangle\rangle, \tag{14.12}$$

$$k_S(\lambda, x) := \omega(x, \bar{\lambda}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \langle \bar{\lambda}^{\otimes n}, \omega_n(x) \rangle, \qquad x \in Q, \tag{14.13}$$

$$\lambda \in N_{3,\mathbb{C}}, \quad \|\lambda\|_{N_{3,\mathbb{C}}} < \min\{R_\omega, D^{-1}\},$$

визначений для $f \in (L^2)$. Пояснимо, що в існуванні інтеграла (14.12) для $f \in (L^2)$ легко пересвідчитись, використавши нерівність Коші – Буняковського і врахувавши, що для вказаних в означенні (14.12) λ $\omega(\cdot, \lambda) \in (L^2)$ (лема 4.1 для функції $h(x, \lambda) = \omega(x, \lambda)$).

Згідно з зауваженням 4.7 для $h(x, \lambda) = \omega(x, \lambda)$ функція $Q \ni x \mapsto k_S(\lambda, x) \in \in \mathbb{C}^1$ при $\lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}})$ належить простору $H^\omega(p, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, тому оператор (14.12) можна продовжити на узагальнені функції, пов'язані з характерами Аппеля, поклавши

$$\forall p, q \in \mathbb{N}_3: \quad (\mathsf{S}\xi)(\lambda) := \langle\langle \xi, k_S(\lambda, \cdot) \rangle\rangle,$$
$$\xi \in H^\omega(-p, -q) \supset (L^2), \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}). \tag{14.14}$$

Із (12.28), врахувавши (14.13), відразу отримаємо

$$(\mathsf{S}\xi)(\lambda) = \langle\langle \xi, k_S(\lambda, \cdot) \rangle\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \lambda^{\otimes n} \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \; \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}), \tag{14.15}$$

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n), \qquad \|\xi\|^2_{H^\omega(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}} K^{-qn} < \infty.$$

Теорема 14.2. S-*перетворення* (14.12) *за допомогою формули* (14.14) *поширюється на простір* $\Phi' = (\Phi^\omega)' = \operatorname{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}_3} H^\omega(-p, -q)$ *узагальнених функцій, при цьому кохарактери Аппеля переходять у степінь, точніше для будь-якого* $\xi \in \in H^\omega(-p, -q)$ *маємо*

$$(\mathsf{S}\xi)(\lambda) = \left(\mathsf{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n)\right)\right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}),$$

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n), \qquad \|\xi\|^2_{H^\omega(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbb{C}}} K^{-qn} < \infty.$$

S-*образи просторів* $H^\omega(-p, -q)$ *і* $\Phi' = \operatorname{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}_3} H^\omega(-p, -q)$ *є відповідно просторами аналітичних функцій* $\operatorname{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$ *і ростків аналітичних функцій* $\operatorname{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}})$.

Оператор S *здійснює топологічний ізоморфізм між відповідними просторами;* $\mathsf{S}\colon H^\omega(-p, -q) \to \operatorname{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$, $p, q \in \mathbb{N}_3$, — *унітарний оператор.*

Доведення. Оскільки $\Phi' = \operatorname{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}_3} H^\omega(-p, -q)$, а $\operatorname{Hol}_0(\mathcal{N}_{\mathbb{C}}) = = \operatorname{ind\,lim}_{p,q \in \mathbb{N}} \operatorname{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$ (теорема 2.1), то для доведення теореми досить показати, що $\mathsf{S}\colon H^\omega(-p, -q) \to \operatorname{Hol}(N_{p,\mathbb{C}}, q)$ — унітарний оператор.

Нехай $\xi \in H^\omega(-p, -q)$. Тоді згідно з (14.15) маємо

$$(\mathsf{S}\xi)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}).$$

Із означення (12.27), (2.7) просторів $H^{\omega}(-p,-q)$ і $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$ відразу отримуємо

$$\|\mathsf{S}\xi\|_{\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)} = \|\xi\|_{H^{\omega}(-p,-q)}.$$

Таким чином, S-перетворення є ізометричним оператором, що діє з $H^{\omega}(-p,-q)$ в $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$. Він буде унітарним, якщо $\mathrm{Ran}\,(\mathsf{S}) = \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$, тобто для будь-якого $\phi \in \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$ знайдеться вектор $\xi \in H^{\omega}(-p,-q)$ такий, що $\mathsf{S}\xi = \phi$. Нехай $\phi(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle$ — довільний вектор із простору $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$. Покладемо

$$\xi := \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n).$$

Зрозуміло, що $\|\xi\|_{H^{\omega}(-p,-q)} = \|\phi\|_{\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)} < \infty$, а тому $\xi \in H^{\omega}(-p,-q)$. Крім того, на підставі (14.15)

$$(\mathsf{S}\xi)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle = \phi(\lambda), \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}).$$

Як результат, $\mathrm{Ran}\,(\mathsf{S}) = \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$.

Теорему доведено.

Перейдемо до розгляду T-*перетворення*, яке також визначимо як інтегральний оператор з ядром $k_T(\lambda,x) := \chi(x,\bar{\lambda})$:

$$(\mathsf{T}f)(\lambda) := \int_Q f(x)\overline{k_T(\lambda,x)}d\rho(x) = \langle\langle f, k_T(\lambda,\cdot)\rangle\rangle, \quad f \in (L^2), \tag{14.16}$$

$$\lambda \in N_{3,\mathbf{C}}, \qquad \|\lambda\|_{N_{3,\mathbf{C}}} < \min\{R_\omega, C^{-1}\}$$

(при даному λ внаслідок леми 4.1 $k_T(\lambda,\cdot)$ належить (L^2), а тому інтеграл (14.16) існує). Як і у випадку S-перетворення, оператор T продовжується на узагальнені функції, але пов'язані з кохарактерами Дельсарта, а не Аппеля: для будь-яких $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$ потрібно покласти

$$(\mathsf{T}\xi)(\lambda) := \langle\langle \xi, k_T(\lambda,\cdot)\rangle\rangle, \quad \xi \in H^{\chi}(-p,-q) \supset (L^2), \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}). \tag{14.17}$$

Все викладене вище щодо S-перетворення зберігається і для T-перетворення, але з використанням просторів $H^{\chi}(p,q)$ замість $H^{\omega}(p,q)$ і кохарактерів Дельсарта замість кохарактерів Аппеля.

Має місце аналог теореми 14.2.

Теорема 14.3. T-*перетворення* (14.16) *за допомогою формули* (14.17) *поширюється на простір* $\Phi' = (\Phi^{\chi})' = \underset{p\in\mathbb{N}_3,\, q\in\mathbb{N}}{\mathrm{ind\,lim}}\, H^{\chi}(-p,-q)$ *узагальнених функцій, при цьому кохарактери Дельсарта переходять у степінь, точніше для будь-якого* $\xi \in H^{\chi}(-p,-q)$ *маємо*

$$(\mathsf{T}\xi)(\lambda) = \left(\mathsf{T}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\theta(\xi_n)\right)\right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \lambda^{\otimes n}, \xi_n \rangle, \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}), \tag{14.18}$$

$$\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\xi_n), \quad \|\xi\|^2_{H^\times(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\xi_n\|^2_{N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbf{C}}} K^{-qn} < \infty.$$

T*-образи просторів* $H^\times(-p,-q)$ *і* $\Phi' = \operatorname*{ind\,lim}_{p\in\mathbb{N}_3,\, q\in\mathbb{N}} H^\times(-p,-q)$ *є відповідно тими самими просторами аналітичних функцій* $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$ *і ростків аналітичних функцій* $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_\mathbf{C})$.

Оператор T *здійснює топологічний ізоморфізм між відповідними просторами;* $\mathsf{T}\colon H^\times(-p,-q) \to \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$, $p \in \mathbb{N}_3$, $q \in \mathbb{N}$, *— унітарний оператор.*

Гільбертовий простір $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$ $p,q \in \mathbb{N}_3$, з одного боку, є S-образом простору $H^\omega(-p,-q)$, а з іншого — T-образом простору $H^\times(-p,-q)$. У свою чергу простір $H^\omega(-p,-q)$ є C^+-образом простору $H^\times(-p,-q)$. Зв'язок між цими операторами показує наступна лема.

Лема 14.4. *Унітарний оператор* $\mathsf{T}\colon H^\times(-p,-q) \to \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$, $p,q \in \mathbb{N}_3$, *можна подати у вигляді*

$$\mathsf{T} = \mathsf{S}\mathsf{C}^+, \tag{14.19}$$

де $\mathsf{S}\colon H^\omega(-p,-q) \to \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}},q)$, *а* $\mathsf{C}^+\colon H^\times(-p,-q) \to H^\omega(-p,-q)$.

Доведення. Нехай $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \theta(\xi_n) \in H^\times(-p,-q)$. Використовуючи (14.11) і (14.15), отримуємо

$$((\mathsf{S}\mathsf{C}^+)\xi)(\lambda) = (\mathsf{S}(\mathsf{C}^+\xi))(\lambda) = \left(\mathsf{S}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n)\right)\right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \lambda^{\otimes n}\rangle, \ \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}),$$

з іншого боку,

$$(\mathsf{T}\xi)(\lambda) = \left(\mathsf{T}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \theta(\xi_n)\right)\right)(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle \xi_n, \lambda^{\otimes n}\rangle, \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}).$$

Таким чином, $\mathsf{T} = \mathsf{S}\mathsf{C}^+$.

15. Множення Віка. Ізоморфізм S і T між простором узагальнених функцій $\Phi' = (\Phi^\times)' = (\Phi^\omega)'$ і простором ростків аналітичних функцій $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_\mathbf{C})$ і та обставина, що останній простір є комутативною алгеброю відносно звичайного додавання і множення функцій, дають можливість ввести в Φ' множення Віка узагальнених функцій.

Для довільних $\xi, \eta \in \Phi'$ введемо множення S-Віка $\Diamond_S$, поклавши

$$\xi \Diamond_S \eta = \mathsf{S}^{-1}((\mathsf{S}\xi)(\lambda) \cdot (\mathsf{S}\eta)(\lambda)). \tag{15.1}$$

Завдяки теоремі 14.2 це означення коректне і разом із звичайним додаванням і множенням на скаляр узагальнених функцій перетворює $\Phi' = (\Phi^\omega)'$ в комутативну алгебру, ізоморфну $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_\mathbf{C})$.

Для кохарактерів Аппеля маємо

$$\forall p \in \mathbb{N}_3: \quad \mathcal{Q}(\xi_n) \Diamond_S \mathcal{Q}(\eta_m) = \mathcal{Q}(\xi_n \hat{\otimes} \eta_m), \tag{15.2}$$

$$\xi_n \in N^{\hat{\otimes} n}_{-p,\mathbf{C}}, \quad \eta_m \in N^{\hat{\otimes} m}_{-p,\mathbf{C}}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Справді, S-образ лівої частини в (15.2) згідно з (15.1) і теоремою 14.2 такий:

$$\langle \xi_n, \lambda^{\otimes n}\rangle\langle \eta_n, \lambda^{\otimes m}\rangle = \langle \xi_n \hat{\otimes} \eta_n, \lambda^{\otimes(n+m)}\rangle, \quad \lambda \in N_{p,\mathbb{C}},$$

що збігається з S-образом правої частини в (15.2).

Таким чином, якщо $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\xi_n) \in \Phi'$, $\eta = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\eta_n) \in \Phi'$, то множення S-Віка задано через

$$\xi \Diamond_S \eta = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{Q}(\zeta_n), \quad \text{де} \quad \zeta_n = \sum_{m=0}^{n} \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m}. \tag{15.3}$$

Зауваження **15.1.** Оператор $\partial^+(\bar{\xi}_m)\colon \Phi' \to \Phi'$ можна трактувати як оператор S-множення на елементарну узагальнену функцію $\mathcal{Q}(\xi_m)$, тобто

$$\Phi' \ni \eta \mapsto \partial^+(\bar{\xi}_m)\eta = \mathcal{Q}(\xi_m)\Diamond_S \eta \in \Phi', \quad \xi_m \in N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}, \quad p, q \in \mathbb{N}_3.$$

(Це відразу випливає із зауваження 12.6 і (12.20), (15.3).) Звідси видно, що образ оператора $\partial^+(\bar{\xi}_m)$ при S-перетворенні є оператором множення на функцію $\langle \lambda^{\otimes m}, \xi_m\rangle$ в $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_\mathbb{C})$.

Лема 15.1. *Множення S-Віка неперервне в $\Phi' = (\Phi^\omega)'$. Зокрема, для $\xi \in H^\omega(-p_1, -q_1)$, $\eta \in H^\omega(-p_2, -q_2)$ і $p = \max\{p_1, p_2\}$, $q > \max\{q_1, q_2\}$ має місце така оцінка: існує константа $c > 0$ така, що*

$$\|\xi \Diamond_S \eta\|_{H^\omega(-p,-q)} \leq c\|\xi\|_{H^\omega(-p_1,-q_1)}\|\eta\|_{H^\omega(-p_2,-q_2)}.$$

Доведення. Нехай, наприклад, $q_2 > q_1$. За допомогою (15.3) і (12.27) отримаємо

$$\|\xi \Diamond_S \eta\|^2_{H^\omega(-p,-q)} = \sum_{n=0}^{\infty} \|\zeta_n\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\| \sum_{m=0}^{n} \xi_m \hat{\otimes} \eta_{n-m} \right\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} n}} K^{-qn} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{m=0}^{n} \|\xi_m\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} \|\eta_{n-m}\|_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}} \right)^2 K^{-qn} \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} K^{-qn} \left(\sum_{m=0}^{n} \|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} K^{-q_1 m} \right) \left(\sum_{m=0}^{n} \|\eta_{n-m}\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}} K^{q_1 m} \right) \leq$$

$$\leq \sum_{n=0}^{\infty} K^{(-q+q_2)n} \left(\sum_{m=0}^{n} \|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} K^{-q_1 m} \right) \left(\sum_{m=0}^{n} \|\eta_{n-m}\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes}(n-m)}} K^{-q_2(n-m)} \right) \leq$$

$$\leq \left(\sum_{n=0}^{\infty} K^{(-q+q_2)n} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \|\xi_m\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} m}} K^{-q_1 m} \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\eta_k\|^2_{N_{-p,\mathbb{C}}^{\hat{\otimes} k}} K^{-q_2 k} \right) =$$

$$= c^2 \|\xi\|^2_{H^\omega(-p_1,-q_1)} \|\eta\|^2_{H^\omega(-p_2,-q_2)}, \quad \text{де} \quad c^2 = \frac{K^{q-q_2}}{K^{q-q_2} - 1}.$$

Лему доведено.

Викладену конструкцію можна повторити для T-перетворення. У цьому випадку множення T-Віка вводиться рівністю

$$\forall \xi, \eta \in \Phi': \quad \xi \Diamond_T \eta = \mathrm{T}^{-1}((\mathrm{T}\xi)(\lambda) \cdot (\mathrm{T}\eta)(\lambda)), \tag{15.4}$$

яка породжується правилом множення „базисних" векторів $\theta(\xi_n)$ простору $\Phi' = (\Phi^\chi)'$:

$$\forall p \in \mathbb{N}_3: \quad \theta(\xi_n)\Diamond_T\theta(\eta_m) = \theta(\xi_n\hat{\otimes}\eta_m), \tag{15.5}$$

$$\xi_n \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}n}, \quad \eta_m \in N_{-p,\mathbf{C}}^{\hat{\otimes}m}, \quad n, m \in \mathbb{N}_0.$$

Аналоги зауваження 15.1 і леми 15.1 зберігаються. Множення (15.4), (15.5) знову перетворює Φ' в комутативну алгебру, ізоморфну тій самій алгебрі $\mathrm{Hol}_0(\mathcal{N}_\mathbf{C})$, але відмінну від алгебри, породженої (15.1), (15.2).

Має місце теорема, в якій встановлюється зв'язок між множенням S- і T-Віка.

Теорема 15.1. *Для всіх* $\xi, \eta \in \Phi' = (\Phi^\chi)'$ *має місце рівність*

$$\mathsf{C}^+(\xi\Diamond_T\eta) = \mathsf{C}^+\xi\Diamond_S\mathsf{C}^+\eta. \tag{15.6}$$

Доведення. Для довільних $\xi, \eta \in \Phi' = (\Phi^\chi)' = \operatorname*{ind\,lim}_{p,q\in\mathbb{N}_3} H^\chi(-p,-q)$ існують $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}_3$ такі, що $\xi \in H^\chi(-p_1,-q_1)$, $\eta \in H^\chi(-p_2,-q_2)$. Зафіксуємо $\xi, \eta \in \Phi'$ і числа $p_1, p_2, q_1, q_2 \in \mathbb{N}_3$ з вказаними вище властивостями. Використовуючи лему 15.1 і враховуючи, що оператор C^+ діє із простору $H^\chi(-p,-q)$ у простір $H^\omega(-p,-q)$, легко переконуємося, що ліва і права частини рівності (15.6) належать $H^\omega(-p,-q)$, де $p = \max\{p_1, p_2\}$, $q > \max\{q_1, q_2\}$.

Подіємо оператором S на ліву частину рівності (15.6). Використавши (14.19) і (15.4), отримаємо

$$(\mathsf{SC}^+(\xi\Diamond_T\eta))(\lambda) = (\mathsf{T}(\xi\Diamond_T\eta))(\lambda) = (\mathsf{T}\xi)(\lambda)\cdot(\mathsf{T}\eta)(\lambda) \in \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}}, q),\ \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}).$$

З іншого боку, при дії S на праву частину (15.6), використавши (14.19) і (15.1), дістанемо

$$(\mathsf{S}(\mathsf{C}^+\xi\Diamond_S\mathsf{C}^+\eta))(\lambda) = (\mathsf{SC}^+\xi)(\lambda)\cdot(\mathsf{SC}^+\eta)(\lambda) =$$

$$= (\mathsf{T}\xi)(\lambda)\cdot(\mathsf{T}\eta)(\lambda) \in \mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}}, q), \quad \lambda \in B_p(K^{-\frac{q}{2}}).$$

Звідси, врахувавши те, що S — унітарний оператор, що діє із $H^\omega(-p,-q)$ в $\mathrm{Hol}(N_{p,\mathbf{C}}, q)$, одержимо (15.6).

Теорему доведено.

Зробимо одне загальне зауваження.

Зауваження **15.2.** Нехай залежність функції $h(x,\lambda)$ (3.1) від x і λ така, як і в п. 3, і $\kappa(x,\lambda) := \dfrac{h(x,\lambda)}{\widehat{\rho}(\lambda)}$ (тут $\widehat{\rho}(\lambda) := \int_Q h(x,\lambda)d\rho(x)$ — аналітична в $0 \in N_{1,\mathbf{C}}$ функція (за припущенням)).

Якщо відомо, що $h(x,0) = 1$ для всіх $x \in Q$, і існує точка $e \in Q$ така, що $h(e,\lambda) = 1$ для всіх $\lambda \in B_h$, то результати пп. 12–15 (окрім результатів, отриманих для C-перетворення) залишаються справедливими (із заміною χ і ω на h і κ відповідно) незалежно від того, чи є функція $h(x,\lambda)$ характером деякої сім'ї T операторів узагальненого зсуву.

Автори глибоко вдячні М. О. Качановському за корисні обговорення і критичні зауваження, які сприяли поліпшенню викладу роботи.

1. *Березанский Ю. М., Самойленко Ю. С.* Ядерные пространства функций бесконечного числа переменных // Укр. мат. журн. – 1973. – **25**, № 6. – С. 723–737 (English transl.: Ukr. Math. J. – 1973. – **25**).
2. *Hida T.* Analysis of Brownian functionals // Carleton Math. Lect. Notes. – 1975. – № 13. – 83 p.
3. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных. – Киев: Наук. думка, 1978. – 360 с. (English transl.: Providence: Amer. Math. Soc., 1986. – xvi + 384 p.).
4. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Spectral methods in infinite dimensional analysis. – Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1995. – Vol. 1. – xvii + 572 p.; Vol. 2. – viii + 427 p. (Russian edition: Kiev: Naukova Dumka, 1988. – 680 p.).
5. *Hida T.* Brownian motion. – Berlin: Springer, 1980 (Russian edition: Moscow: Nauka, 1987. – 304 p.).
6. *Hida T., Kuo H.-H., Potthoff J., Streit L.* White noise. An infinite dimensional calculus. – Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1993. – xiii + 516 p.
7. *Obata N.* White noise calculus and Fock space // Lect. Notes Math. – Berlin: Springer, 1994. – x + 183 p.
8. *Кондратьев Ю. Г.* Узагальнені функції нескінченної кількості змінних. — Київ: Вид-во Київ. ун-ту, 1975.
9. *Кондратьев Ю. Г., Самойленко Ю. С.* Интегральное представление обобщенных положительно определенных ядер бесконечного числа переменных // Докл. АН СССР. – 1976. – **227**, № 4. – С. 800–803 (English transl.: Sov. Math. Dokl. – 1976. – **17**).
10. *Kondratiev Yu. G., Samoilenko Yu. S.* The spase of trial and generalized functions of infinitely many variables // Rept. Math. Phys. – 1978. – **14**, № 3. – P. 325–350.
11. *Кондратьев Ю. Г.* Степени Вика гауссовских обобщенных случайных процессов // Методы функционального анализа в задачах математической физики. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1978. – С. 129–158.
12. *Кондратьев Ю. Г., Самойленко Ю. С.* Обобщенные производные вероятностных мер на $\mathbb{R}^\infty$ // Там же. – С. 159–176.
13. *Кондратьев Ю. Г.* Обобщенные функции в задачах бесконечномерного анализа: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Киев, 1979. – 146 с.
14. *Кондратьев Ю. Г.* Ядерные пространства целых функций в задачах бесконечномерного анализа // Докл. АН СССР. – 1980. – **254**, № 6. – С. 1325–1329 (English transl.: Sov. Math. Dokl. – 1981. – **22**).
15. *Кондратьев Ю. Г.* Пространство целых функций бесконечного числа переменных, связанное с оснащением пространств Фока // Спектральный анализ дифференциальных операторов. – Киев: Ин-т математики АН УССР, 1980. – С. 18–37 (English transl.: Selecta Math. Sov. – 1991. – **10**, № 2).
16. *Kondratiev Yu. G., Leukert P., Streit L.* Wick calculus in Gaussian analysis // Acta Appl. Math. – 1996. – **44**. – P. 269–294.
17. *Berezansky Yu. M.* Spectral approach to white noise analysis // Proc. Symp. „Dynamics of Complex and Irregular Systems" (16–20 December 1991, Germany; „Bielefeld Encounters in Math. and Phys. VIII". – Singapore: World Sci., 1993. – P. 131–140.
18. *Березанский Ю. М., Ливинский В. А., Литвинов Е. В.* Спектральный подход к анализу белого шума // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 3. – С. 177–197 (English transl.: Ukr. Math. J. – 1994. – **46**, № 2. – P. 183–203).
19. *Berezansky Yu. M., Livinsky V. O., Lytvynov E. V.* A generalization of Gaussian white noise analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1995. – **1**, № 1. – P. 28–55.
20. *Berezansky Yu. M.* Poisson measure as the spectral measure of Jacobi field // Infinite Dimen. Anal. Quant. Probab. Related Topics. – 2000. – **3**, № 1. – P. 121–139.
21. *Lytvynov E. W.* Multiple Wiener integrals and non-Gaussian white noise analysis: a Jacobi field approach // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1995. – **1**, № 1. – P. 61–85.
22. *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L., Us G. F.* Analysis on Poisson and Gamma spaces // Infinite Dimen. Anal. Quant. Probab. Related Topics. – 1998. – **1**, № 1. – P. 91–117.
23. *Kondratiev Yu. G., Lytvynov E. W.* Operators of Gamma white noise calculus // Ibid. – 2000. – **3**, № 3. – P. 303–335.
24. *Kondratiev Yu. G., Kuna T., Oliveira M. J.* Analytic aspects of Poissonian white noise analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 4. – P. 15–48.
25. *Ito Y., Kubo I.* Calculus on Gaussian and Poisson white noise // Nagoya Math. J. – 1988. – **111**. – P. 41–84.
26. *Далецкий Ю. Л.* Биортогональный аналог полиномов Эрмита и обращение преобразования Фурье по негауссовой мере // Функцион. анализ и его прил. - 1991. – **25**, № 2. – С. 68–70 (English transl.: Funct. Anal. and Appl. – 1991. – **25**).

27. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Streit L.* How to generalize white noise analysis to non-Gaussian spaces // Dynamics of Complex and Irregular Systems / Eds: Ph. Blanchard et al. – Singapore: World Sci., 1993. – P. 48–60.
28. *Albeverio S., Daletsky Yu. L., Kondratiev Yu. G., Streit L.* Non-Gaussian infinite-dimensional analysis // J. Func. Anal. – 1996. – **138**. – P. 311–350.
29. *Kondratiev Yu. G., Da Silva J. L., Streit L.* Generalized Appel systems // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1997. – **3**, № 3. – P. 28–61.
30. *Kondratiev Yu. G., Streit L., Westerkamp W., Yan J.* Generalized functions in infinite dimensional analysis // Hiroshima Math. J. – 1998. – **28**, № 2. – P. 213–260.
31. *Kachanovsky N. A.* Biortogonal Appel-like systems in a Hilbert space // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – **2**, № 3–4. – P. 36–52.
32. *Качановский Н. А.* Дуальная система Аппеля и пространства Кондратьева в анализе на пространствах Шварца // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 4. – С. 527–534 (English transl.: Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 4. – P. 581–590).
33. *Kachanovsky N. A.* On analog of stochastic integral and Wick calculus in non-Gaussian infinite dimensional analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1997. – **3**, № 3. – P. 1–12.
34. *Kachanovsky N. A.* Dual Appel-like system and finite order spaces in non-Gaussian infinite dimensional analysis // Ibid. – 1998. – **4**, № 2. – P. 41–52.
35. *Качановский Н. А., Ус Г. Ф.* Биортогональные системы Аппеля в анализе на дуально-ядерных пространствах // Функцион. анализ и его прил. – 1998. – **32**, № 1. – С. 69–72 (English transl.: Funct. Anal. and Appl. – 1998. – **32**).
36. *Березанский Ю. М., Кондратьев Ю. Г.* Негауссов анализ и гипергруппы // Там же. – 1995. – **29**, № 3. – С. 51–55 (English transl.: Funct. Anal. and Appl. – 1995. – **29**).
37. *Berezansky Yu. M.* A connection betwen the theory of hypergrups and white noise analysis // Rept. Math. Phys. – 1995. – **36**, № 2/3. – P. 215–234.
38. *Berezansky Yu. M.* A generalization of white noise analysis by means of theory of hypergrups // Ibid. – 1996. – **38**, № 3. – P. 289–300.
39. *Berezansky Yu. M., Kondratiev Yu. G.* Biorthogonal systems in hypergroups: an extension of non-Gausssian analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1996. – **2**, № 2. – P. 1–50.
40. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный негауссов анализ и операторы обобщенного сдвига // Функцион. анализ и его прил. – 1996. – **30**, № 4. – С. 61–65 (English transl.: Funct. Anal. and Appl. – 1996. – **30**).
41. *Березанский Ю. М.* Бесконечномерный анализ, связанный с операторами обобщенного сдвига // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 3. – С. 364–409 (English transl.: Ukr. Math. J. – 1997. – **49**, № 3. – P. 403–450).
42. *Berezansky Yu. M.* Generalized functions, connected with differential hypergroups // Differential Equations, Asymptotic Analysis, and Mathematical Physics / Eds M. Demuth, B.-W. Schulze. – Berlin: Acad. Verlag, 1997. – P. 32–39.
43. *Berezansky Yu. M.* Construction of generalized translation operators from the system of Appel characters // Amer. Math. Soc. Transl. (2). – 1998. – **184**. – P. 7–21.
44. *Berezansky Yu. M.* Infinite-dimensional non-Gaussian analysis connected with generalized translation operators // Analysis on Infinite-Dimensional Lie Groups and Algebras / Eds H. Heyer, J. Marion. – Singapore etc.: World Sci., 1998. – P. 22–46.
45. *Березанский Ю. М.* Пуассонов бесконечномерный анализ как пример анализа, связанного с операторами обобщенного сдвига // Функцион. анализ и его прил. – 1998. – **32**, № 3. – С. 65–70 (English transl.: Funct. Anal. and Appl. – 1998. – **32**).
46. *Berezansky Yu. M., Sheftel Z. G., Us G. F.* Functional analysis: Vols 1, 2. – Basel etc.: Birkhäuser, 1996. – Vol. 1. – xix + 423 p.; Vol. 2. – xvi + 293 p. (Russian edition: Kiev: Vyshcha Shkola, 1990. – 600 p.).
47. *Nachbin L.* Topology on spaces of holomorfic mappings. – Berlin etc.: Springer, 1969. – 66 p.
48. *Dineen S.* Complex analysis in locally conves spaces // Math. Stud. – Amsterdam: North Holland, 1981. – № 57.
49. *Kachanovsky N. A., Koshkin S. V.* Minimality of Appell-like systems and embeddings of test functions spaces in a generalization of white noise analysis // Meth. Funct. Anal. and Top. – 1999. – **5**, № 3. – P. 13–25.
50. *Березанский Ю. М., Калюжный А. А.* Гармонический анализ в гиперкомплексных системах. – Киев: Наук. думка, 1992. – 352 с. (English transl.: Dordrecht etc.: Kluwer Acad. Publ., 1996. – x + 483 p.).
51. *Bloom W. R., Heyer H.* Harmonic analysis of probability measures on hypergroups. – Berlin; New York: de Gruyter, 1995. – vi + 601 p.

Одержано 13.05.2003