УДК 514.86, 514.75

С. Г. Лейко, Ю. С. Федченко (Одес. нац. ун-т, Ін-т математики, економіки, механіки)

ІНФІНІТЕЗИМАЛЬНІ ПОВОРОТНІ ДЕФОРМАЦІЇ ПОВЕРХОНЬ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ В ТЕОРІЇ ПРУЖНИХ ОБОЛОНОК

We present variational generalization of a problem of infinitesimal geodesic deformations of surfaces in the Euclidean space E^3. By virtue of rotary deformation, the image of each geodesic curve is an isoperimetric extremal of the rotation (in the principal approximation). Results are associated in details with rotary-conformal deformations. The applications of these results are presented in the mechanics of elastic shells.

Наведено варіаційне узагальнення проблеми інфінітезимальних геодезичних деформацій поверхонь в евклідовому просторі E^3. Внаслідок поворотної деформації образ кожної геодезичної кривої є ізопериметричною екстремаллю повороту (в головному наближенні). Результати детально пов'язані з поворотно-конформними деформаціями. Застосування цих результатів наведено в механіці пружних оболонок.

У даній роботі визначено новий тип інфінітезимальних деформацій поверхонь в евклідовому просторі E^3, які названо поворотними. Вони характеризуються тією геометричною властивістю, що переводять кожну геодезичну криву в криву, яка в головному є ізопериметричною екстремаллю повороту. Виведено їх основні рівняння, детально вивчено конформний випадок. Вказано зв'язок інфінітезимальних поворотно-конформних деформацій з теорією тонкостінних пружних оболонок.

1. Інфінітезимальні поворотно-конформні деформації поверхонь в евклідовому просторі E^3. Розглянемо поверхню S в евклідовому просторі E^3 з векторно-параметричним рівнянням

$$\bar{r} = \bar{r}(x^1, x^2).$$

Означення 1. *Крива на поверхні S називається ізопериметричною екстремаллю повороту, якщо вздовж неї геодезична кривина k і гауссова кривина K пропорційні: $k = cK$, c — стала* [1, 2].

Введемо деформацію

$$\tilde{S}_\varepsilon : \bar{r}_\varepsilon = \bar{r}(x^1, x^2) + \varepsilon \bar{U}(x^1, x^2), \tag{1}$$

де $\bar{U}(x^1, x^2)$ — вектор зміщення, ε — малий параметр.

Нехай γ — геодезична крива на S і $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ — її образ при деформації (1) на поверхні $\tilde{S}_\varepsilon$. Позначимо через $\tilde{k}_\varepsilon$ геодезичну кривину кривої $\tilde{\gamma}_\varepsilon$, через $\tilde{K}_\varepsilon$ гауссову кривину $\tilde{S}_\varepsilon$ і припустимо, що $\tilde{K}_\varepsilon \neq 0$.

Означення 2. *Деформацію (1) поверхні S ненульової гауссової кривини $K \neq 0$ будемо називати інфінітезимальною поворотною деформацією, якщо для кожної геодезичної кривої γ виконується умова $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\tilde{k}_\varepsilon}{\varepsilon \tilde{K}_\varepsilon} = c$, де c — деяка стала, яка залежить від γ.*

З означення 2 випливає, що вздовж $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ виконується рівність $\tilde{k}_\varepsilon(t) = c\varepsilon\tilde{K}_\varepsilon + o(\varepsilon, t)$, де $o(\varepsilon, t)$ — мала відносно ε функція. Якщо її значеннями знехтувати, то з означення 1 отримаємо, що $\tilde{\gamma}_\varepsilon$ в головному є ізопериметричною екстремаллю повороту на поверхні $\tilde{S}_\varepsilon$.

Теорема 1. *Нехай $P_{ij}^h = \delta\Gamma_{ij}^h$ — варіація символів Крістоффеля при деформації (1). Для того щоб вектор зміщення $\bar{U}$ визначав інфінітезимальну* *поворотну деформацію поверхні S ненульової гауссової кривини $K \neq 0$, необхідно і досить, щоб на ній існував симетричний тензор a_{ij}, разом з яким цей вектор задовольняє рівняння*

$$\nabla_{(k}P^h_{ij)} = a_{(ij}\delta^h_{k)} + \frac{1}{K}K_{(i}P^h_{jk)}. \tag{2}$$

Тут δ^h_k — символ Кронекера, $K_i = \partial_i K$. Круглі дужки означають циклювання.

Доведення. Розглянемо параметричні рівняння $x^h = x^h(t)$ геодезичної кривої γ, віднесеної до канонічного параметра t. Нехай $\xi^h = \frac{dx^h}{dt}$ — її дотичний вектор,

$$\underset{1}{\xi}^h = \nabla_t \xi^h \quad \text{і} \quad \underset{2}{\xi}^h = \nabla_t \underset{1}{\xi}^h \tag{3}$$

— відповідно її перший та другий вектори кривини. Тоді за означенням геодезичної кривої маємо

$$\underset{1}{\xi}^h = \nabla_t \xi^h = \frac{d\xi^h}{dt} + \Gamma^h_{ij}\xi^i\xi^j = 0, \tag{4}$$

де Γ^h_{ij} — символи Крістоффеля поверхні, ∇_t — оператор коваріантного диференціювання вздовж кривої.

Вздовж деформованої кривої $\tilde{\gamma}_\varepsilon$, яка має ті самі параметричні рівняння, з урахуванням (4) отримуємо

$$\tilde{\xi}^h = \frac{d\tilde{x}^h}{dt} = \xi^h,$$

$$\underset{1}{\tilde{\xi}}^h = \tilde{\nabla}_t \tilde{\xi}^h = \frac{d\tilde{\xi}^h}{dt} + \tilde{\Gamma}^h_{ij}(x,\varepsilon)\tilde{\xi}^i\tilde{\xi}^j = \varepsilon P^k_{ij}\xi^i\xi^j + \varepsilon^2,$$

$$\underset{2}{\tilde{\xi}} = \varepsilon P^h_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k + \varepsilon^2,$$

де символом ε^2 позначено малі відносно ε величини, $P^h_{ijk} = \nabla_{(k}P^h_{ij)}$, ∇ — оператор коваріантного диференціювання на поверхні S. Використаємо далі формулу для геодезичної кривини (без знаку):

$$\tilde{k}_\varepsilon = \langle\tilde{\xi}, \tilde{\xi}\rangle^{-3/2}\sqrt{\tilde{G}\left(\tilde{\xi}, \underset{1}{\tilde{\xi}}\right)}, \tag{5}$$

$\langle\,,\rangle$ — скалярний добуток відносно ріманової метрики на $\tilde{S}_\varepsilon$, а $\tilde{G}\left(\tilde{\xi}, \underset{1}{\tilde{\xi}}\right) = \langle\tilde{\xi}, \tilde{\xi}\rangle\left\langle\underset{1}{\tilde{\xi}}, \underset{1}{\tilde{\xi}}\right\rangle - \left\langle\tilde{\xi}, \underset{1}{\tilde{\xi}}\right\rangle^2$ — визначник Грама векторів $\tilde{\xi}$, $\underset{1}{\tilde{\xi}}$.

Підставляючи в (5) необхідні величини і переходячи до границі при $\varepsilon \to 0$ у відповідності з означенням 2, отримуємо

$$(\xi, \xi)^{-3/2}\sqrt{G(\xi, P)} = cK, \tag{6}$$

$$G(\xi, P) = (\xi, \xi)(P, P) - (\xi, P)^2, \qquad P^h = P^h_{ij}\xi^i\xi^j,$$

$(\,,)$ — скалярний добуток відносно ріманової метрики на S.

Припустимо далі, що в розглядуваному координатному околі U гауссова кривина $\tilde{K}_\varepsilon \neq 0$.

Тоді з (6) вздовж γ отримаємо

$$c = \frac{1}{K}(\xi, \xi)^{-3/2}\sqrt{G(\xi, P)} = \text{const}. \tag{7}$$

Продиференціювавши рівність (7) вздовж геодезичної γ, на підставі (4) будемо мати

$$(\xi, \xi)(P, Q) - (\xi, P)(\xi, Q) = 0,$$
$$Q^h = \underset{1}{P}^h - P^h \frac{K_i \xi^i}{K}, \qquad \underset{1}{P}^h = P^h_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k. \tag{8}$$

Умову (8) задовольняє будь-який вектор вигляду

$$Q^h = a(t)\xi^h, \tag{9}$$

де $a(t)$ — деяка функція канонічного параметра t на геодезичній γ. Виявляється, що інших зображень векторів Q^h не існує.

Справді, якщо в деякій точці кривої γ вектори ξ^h і P^h колінеарні, то з (7) випливає, що вони повинні бути колінеарними вздовж всієї кривої γ, тобто при $c = 0$ маємо $P^h = a_1(t)\xi^h$. Диференціюючи останню рівність вздовж γ, на основі (4) отримуємо $\underset{1}{P}^h = a_1'(t)\xi^h$, що в підсумку дає для вектора Q^h зображення вигляду (9).

Якщо ж вздовж кривої γ вектори ξ^h і P^h неколінеарні, то, розкладаючи за ними вектор Q^h, маємо $Q^h = a(t)\xi^h + a_1(t)P^h$. Враховуючи цей розклад в (8), знаходимо $a_1(t)G(\xi, P) = 0$, тобто $a_1(t) = 0$.

Виключивши тепер з (9) функцію a, отримаємо $\xi^{[r}Q^{h]} = 0$, або, в детальному записі, $\xi^{[r}P^{h]}_{ijk}\xi^i\xi^j\xi^k = \frac{1}{K}\xi^{[r}P^{h]}_{ij}K_k\xi^i\xi^j\xi^k$. Останнє співвідношення повинно виконуватися для будь-якої геодезичної γ і, відповідно, для будь-якої точки дотичного розшарування: $(x, \xi) \in T(U)$. Тому $\delta^{[r}_{(l}P^{h]}_{ijk)} = \frac{1}{K}\delta^{[r}_{(l}P^{h]}_{ij}K_{k)}$. Згорнемо останні рівності за індексами r, l. Тоді

$$P^h_{ijk} = \frac{1}{K}K_{(i}P^h_{jk)} + a_{(ij}\delta^h_{k)}, \tag{10}$$

де a_{ij} — деякий симетричний тензор поверхні.

Співвідношення (10) отримано як необхідні умови. Неважко перевірити, розмірковуючи у зворотному напрямі, що вони також і достатні для того, щоб інфінітезимальна деформація (1) була поворотною.

Теорему доведено.

Становлять інтерес спеціальні поворотні деформації, які мають додаткові геометричні властивості. Саме такі деформації ми розглянемо далі.

Насамперед виділимо випадок геодезичних деформацій як найпростіших поворотних деформацій. У цьому випадку будемо говорити, що поворотна деформація є тривіальною.

Теорема 2. *Якщо інфінітезимальна деформація геодезична, то вона є поворотною і*

$$a_{ij} = \nabla_j\psi_i + \nabla_i\psi_j + \frac{1}{K}(K_i\psi_j + K_j\psi_i). \tag{11}$$

Доведення. Як відомо, геодезична деформація [3] зберігає в головному геодезичні криві. Для таких деформацій

$$P^h_{ij} = \psi_i\delta^h_j + \psi_j\delta^h_i, \tag{12}$$

де ψ_i — деякий ковектор. Підставляючи (12) в основні рівняння поворотних деформацій (2), після згортання за індексами h і k отримаємо (11). Легко перевірити, що внаслідок (11), (12) виконується рівняння (2).

Теорему доведено.

Поверхні, які допускають лише тривіальні інфінітезимальні поворотні деформації (тобто геодезичні), природно називати жорсткими в класі поворотних деформацій.

Теорема 3. *Інфінітезимальна конформна деформація* (1) $\delta g_{ij} = 2\varphi g_{ij}$ *поверхні* S *ненульової гауссової кривини* $K \neq 0$ *буде поворотною, лише коли функція конформності* φ *породжує спеціальне концикулярне ковекторне поле* φ_i:

$$\nabla_j \varphi_i = \frac{1}{K}\varphi_i K_j + (c-\varphi)K g_{ij}, \text{ де } c = \text{const}, \ \varphi_i = \partial_i \varphi.$$

При цьому поверхня, яка допускає інфінітезимальну поворотно-конформну деформацію, є локально ізометричною деякій поверхні обертання і тензор

$$a_{ij} = (c-\varphi)K g_{ij}.$$

Доведення. За означенням інфінітезимальні конформні деформації характеризуються рівняннями

$$\delta g_{ij} = 2\varphi g_{ij} = P_{ij} + P_{ji}, \quad P_{ij} = g_{kj} P_i^k, \tag{13}$$

де $\varphi(x^1, x^2)$ — деяка функція (конформності).

З (13) випливає

$$P_{ij}^h = \varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h - \varphi^h g_{ij}, \quad \varphi_i = \partial_i \varphi, \quad \varphi^h = g^{hi}\varphi_i. \tag{14}$$

Згідно з (14) основні рівняння (2) наберуть вигляду

$$2\nabla_k \varphi_i \delta_j^h + 2\nabla_k \varphi_j \delta_i^h + 2\nabla_j \varphi_i \delta_k^h - \nabla_k \varphi^h g_{ij} - \nabla_i \varphi^h g_{jk} - \nabla_j \varphi^h g_{ki} =$$
$$= \frac{1}{K}\left[K_i\left(\varphi_j \delta_k^h + \varphi_k \delta_j^h - \varphi^h g_{jk}\right) + K_j\left(\varphi_k \delta_i^h + \varphi_i \delta_k^h - \varphi^h g_{ki}\right) + K_k\left(\varphi_i \delta_j^h + \varphi_j \delta_i^h - \varphi^h g_{ij}\right)\right] +$$
$$+ a_{ij}\delta_k^h + a_{jk}\delta_i^h + a_{ki}\delta_j^h.$$

Згорнувши останні рівності по h та j, отримаємо

$$6\nabla_k \varphi_i = \frac{1}{K}[3K_i\varphi_k + 3\varphi_i K_k] + \left(\nabla_h \varphi^h - \frac{K_h \varphi^h}{K}\right) g_{ki} + 4a_{ik}.$$

Звідси знайдемо

$$a_{ik} = \frac{3}{2}\nabla_k \varphi_i - \frac{3}{4K}[K_i\varphi_k + \varphi_i K_k] - \left(\nabla_h \varphi^h - \frac{K_h \varphi^h}{K}\right)\frac{g_{ki}}{4}. \tag{15}$$

Рівняння (2) запишемо у вигляді поліноміальних тотожностей

$$\nabla_k P_{ij}^h \xi^i \xi^j \xi^k = \left(\frac{K_i}{K} P_{jk}^h + a_{ij}\delta_k^h\right)\xi^i \xi^j \xi^k.$$

На підставі (14) вони наберуть вигляду

$$\left(2\nabla_k \varphi_i \delta_j^h - \nabla_k \varphi^h g_{ij}\right)\xi^i \xi^j \xi^k = \left(\left[2\frac{K_i}{K}\varphi_j \delta_k^h - \frac{K_i}{K}\varphi^h g_{jk}\right] + a_{ij}\delta_k^h\right)\xi^i \xi^j \xi^k. \tag{16}$$

Підставивши (15) в (16), будемо мати

$$\left(\frac{1}{2}\nabla_j \varphi_i \delta_k^h - \frac{1}{2K}K_i \varphi_j \delta_k^h\right)\xi^i \xi^j \xi^k = g_{ij}\left(\nabla_k \varphi^h - \frac{K_k}{K}\varphi^h - \frac{1}{4}\delta_k^h\left(\nabla_s \varphi^s - \frac{K_s \varphi^s}{K}\right)\right)\xi^i \xi^j \xi^k.$$

Ці рівності повинні мати тотожний характер відносно точок (x, ξ) області дотичного розшарування, що можливо, лише коли

$$\nabla_j \varphi_i - \frac{1}{K}\varphi_i K_j = b g_{ij}, \tag{17}$$

де b — деякий інваріант. Його значення можна уточнити, якщо для (17) розглянути умови інтегровності $\nabla_{[kj]}\varphi_i = \varphi_s R^s_{ijk} = K\left(\varphi_j g_{ik} - \varphi_k g_{ij}\right)$.

Використовуючи (17), знаходимо

$$\varphi_j = -\partial_j\left(\frac{b}{K}\right). \tag{18}$$

Звідси випливає, що ковектор φ_i є градієнтним. Внаслідок цього після інтегрування (18) отримаємо їх загальний розв'язок

$$\varphi = -\frac{b}{K} + c, \quad \text{або} \quad b = (c-\varphi)K.$$

Таким чином, $a_{ij} = b g_{ij} = (c-\varphi)K g_{ij}$ і

$$\nabla_j\varphi_i = \frac{1}{K}\varphi_i K_j + (c-\varphi)K g_{ij}. \tag{19}$$

Покажемо тепер, що поверхня, яка допускає інфінітезимальну поворотно-конформну деформацію, локально ізометрична деякій поверхні обертання. Справді, це випливає з результатів роботи [4], де було встановлено, що на двовимірних рімановиx просторах, в яких існує градієнтний концикулярний вектор (тобто φ_i, який задовольняє рівняння вигляду $\nabla_j\varphi_i = \varphi_i\beta_j + \alpha g_{ij}$, де β_j — градієнт, α — інваріант), основну квадратичну форму можна звести до вигляду $ds^2 = {du^1}^2 + F(u^1){du^2}^2$. У даному випадку $\beta_j = \partial_j(\ln|K|)$.

Теорему доведено.

Означення 3. *Градієнтне концикулярне поле* φ_i, *що задовольняє* (19), *будемо називати поворотним концикулярним векторним полем.*

Замкнену і обмежену (тобто компактну) поверхню додатної гауссової кривини K *називають овалоїдом.*

Теорема 4. *Овалоїди обертання у цілому є жорсткими в класі інфінітезимальних поворотно-конформних деформацій.*

Доведення. Якщо овалоїд обертання $x = r\cos\nu$, $y = r\sin\nu$, $z = f(r)$ в цілому допускає інфінітезимальну поворотно-конформну деформацію, яка відповідає функції конформності $\varphi(x^1, x^2)$, $x^1 = r$, $x^2 = \nu$, то на підставі теореми 3 ця функція повинна породжувати поворотне концикулярне поле φ_i. Введемо нове градієнтне поле $\psi_i = K^{-1}\varphi_i$. Після інтегрування (19) знаходимо функцію конформності $\varphi = c + \dfrac{c_1}{F}$. Таким чином,

$$\nabla_{ji}\psi = \frac{c-\varphi}{K}g_{ij} = -\frac{c_1}{FK}g_{ij},$$

де c, c_1 — сталі, $F = \sqrt{1+f'^2}$.

Отже, лапласіан функції ψ дорівнює $\Delta\psi = g^{ij}\nabla_{ji}\psi = -2\dfrac{c_1}{FK}$.

Застосовуючи для овалоїда S теорему Гріна [5, c. 31] знаходимо $\int\limits_S \Delta\psi\, d\sigma = c_1\int\limits_S \dfrac{d\sigma}{FK} = 0$, де $d\sigma$ — елемент площі поверхні S. Оскільки $FK > 0$, то звідси випливає $c_1 = 0$. Відповідно, $\varphi = c$ і деформація є інфінітезимальною гомотетією, тобто тривіальною інфінітезимальною поворотною деформацією.

Теорему доведено.

2. Інфінітезимальні поворотно-конформні деформації поверхонь і їх зв'язок з теорією оболонок. Одна з основних задач теорії оболонок полягає у визначенні деформації оболонки і напруг, що виникають в її матеріалі під час дії заданого навантаження. Як відомо [6, 7], безмоментна теорія рівноваги напруженої оболонки та геометрична теорія інфінітезимальних згинань (ізометричних деформацій) мають тісний зв'язок. Він природно виникає тому, що ці теорії мають справу з одними і тими самими рівняннями з частинними похідними. Це дозволяє надавати геометричним фактам механічну інтерпретацію і навпаки. Викладене повною мірою стосується інших типів інфінітезимальних деформацій, наприклад ареальних [8]. У даному пункті ми покажемо, що подібний взаємозв'язок також існує між моментною теорією рівноваги напруженої оболонки та теорією інфінітезимальних поворотно-конформних деформацій поверхонь.

Відомо [6], що основна система рівноваги тонкостінної оболонки має вигляд

$$\begin{aligned} &\nabla_i T^{ij} - T_i b^{ij} + X^j = 0, \\ &\nabla_i T^i + b_{ij} T^{ij} + Z = 0, \\ &\nabla_i M^{ij} - T_i C^{ij} = 0, \\ &M^{ij} b_{ij} + C_{ij} T^{ij} = 0. \end{aligned} \tag{20}$$

Тут $\overline{X} = X^i \overline{r}_i + Z\overline{n}$ — поверхневе навантаження, T^{ij} — тензор зусиль, T^i — перерізуюча сила, M^{ij} — тензор моментів, b_{ij} — другий основний тензор і C_{ij} — дискримінантний тензор серединної поверхні оболонки.

Якщо

$$\overline{U} = u^i \overline{r}_i + u_0 \overline{n}$$

є вектором зміщення інфінітезимальної конформної деформації, то

$$d\overline{r}(d\overline{U} - \varphi d\overline{r}) = 0,$$

де $\varphi(x^1, x^2)$ — функція конформності. Введемо вектор обертання $\overline{V}$, який визначається рівностями

$$d\overline{U} - \varphi d\overline{r} = \overline{V} \times d\overline{r}, \qquad \overline{V} = \nu^i \overline{r}_i + \nu \overline{n}. \tag{21}$$

Оскільки $d\overline{U} = \overline{U}_i dx^i$, $\overline{U}_i = \partial_i \overline{U}$, то $\overline{U}_i = \left(\nabla_i u^j - b_i^j u_0\right)\overline{r}_j + \left(b_{ij} u^j + \nabla_i u_0\right)\overline{n}$.

Використовуючи рівності $[\overline{r}_i, \overline{r}_j] = C_{ij}\overline{n}$, $[\overline{n}, \overline{r}_i] = C_{ij}\overline{r}^j$, $C_{11} = C_{22} = 0$, $C_{12} = -C_{21} = \sqrt{g}$, з означення конформної деформації отримуємо

$$\begin{aligned} \nu^i C_{ij} &= \nabla_j u_0 + b_{ij} u^i, \\ \nu C_{ij} &= \nabla_i u_j - b_{ij} u_0 - \varphi. \end{aligned} \tag{22}$$

Із рівностей (22) знаходимо

$$\nu^i = C^{ij}(\nabla_j u_0 + b_{kj} u^k),$$

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{g}}(\nabla_1 u_2 - b_{12} u_0 - \varphi) = \frac{1}{2\sqrt{g}}(\nabla_1 u_2 - \nabla_2 u_1).$$

Записуючи умови інтегровності рівнянь (21), маємо

$$\nabla_i \nu^i - 2H\nu = 0,$$

$$\partial_i \nu + b_{ij} \nu^j = -\varphi_j C_i^j.$$

На підставі того, що $\overline{V}_i = \partial_i \overline{V} = (\nabla_i \nu^j - b_i^j \nu)\overline{r}_j + (b_{ij}\nu^j + \nabla_i \nu)\overline{n}$, з урахуванням (21) отримуємо

$$\overline{V}_i = \overset{*}{T}{}_i^{\,j}\, \overline{r}_j + \overset{*}{T}_i \overline{n}, \tag{23}$$

$$\overset{*}{T}{}_i^j = \nabla_i v^j - v b_i^j, \quad \overset{*}{T}_i = -\varphi^j C_{ij} = \varphi^j C_{ji}.$$

У свою чергу, умови інтегровності для системи (23) на основі дериваційних рівнянь набирають вигляду

$$C^{ij}\nabla_i \overset{*}{T}{}_j^k + C^{ij}\overset{*}{T}_i b_j^k = 0,$$
$$C^{ij}\nabla_i \overset{*}{T}_j + C^{ij} b_{ik}\overset{*}{T}{}_j^k = 0. \tag{24}$$

Введемо до розгляду тензор $\hat{T}^{ij} = C^{ik}\overset{*}{T}{}_k^j = \hat{T}^{ji}$. Тоді, взявши до уваги коваріантну сталість дискримінантного тензора: $\nabla_k C_{ij} = 0$, із системи (24) отримаємо

$$\nabla_i \hat{T}^{ij} - \varphi^k b_k^j = 0, \quad \nabla_i \varphi^i + b_{ij}\hat{T}^{ij} = 0, \quad \varphi^j = g^{ij}\varphi_i. \tag{25}$$

Припустимо тепер, що інфінітезимальна конформна деформація є поворотною. На основі (19)

$$\nabla_i \varphi^i = \varphi^i \partial_i \ln|K| + 2(C - \varphi) = -b_{ij}\hat{T}^{ij}. \tag{26}$$

Співставляючи (25) і (26) з основними рівняннями (20) системи рівноваги тонкостінної оболонки, можемо сформулювати таку пропозицію.

Пропозиція. *Якщо поверхня евклідового простору допускає інфінітезимальну поворотно-конформну деформацію, то її можна розглядати як серединну поверхню тонкостінної оболонки, яка знаходиться в напруженій рівновазі з*

нулевим поверхневим навантаженням $\overline{X} = 0$;

перерізуючою силою $T^i = \varphi^i$, *яка збігається з поворотним концикулярним векторним полем поверхні*;

тензором зусиль $T^{ij} = \hat{T}^{ij} = C^{ik}(\nabla_k v^j - v b_k^j)$, $v = \frac{1}{\sqrt{g}}(\nabla_1 u_2 - b_{12}u_0 - \varphi)$;

тензором моментів сил, який задовольняє рівняння $\nabla_i(M^{ij} - \varphi C^{ij}) = 0$, $M_{ij}b^{ij} = 0$.

Зауважимо, що останні рівняння допускають очевидний розв'язок $M^{ij} = \varphi C^{ij}$, а у випадку інфінітезимальних ізометричних деформацій (згинань) ($\varphi = 0$) отримаємо відому систему рівнянь безмоментної напруженої рівноваги оболонки [6].

1. *Лейко С. Г.* Инфинитезимальные поворотные преобразования и деформации поверхностей евклидового пространства // Докл. РАН. – 1994. – **344**, № 2. – С. 162–164.
2. *Лейко С. Г.* Поворотные преобразования поверхностей // Мат. физика. Анализ. Геометрия. – 1998. – **5**, вып. 3/4. – С. 203–211.
3. *Gavrilchenko M. L.* Geodesic deformations of Riemannian spaces // Different. Geom. and its Appl. (Int. Conf., Brno, 27 Aug. – 2 Sept. 1989). – Singapore etc., 1990. – P. 47–53.
4. *Fialkow A.* Conformals geodesics // Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – **45**. – P. 443–473.
5. *Яно К., Бохнер С.* Кривизна и числа Бетти. – М.: Изд-во иностр. лит., 1957. – 152 с.
6. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. – М.: Наука, 1988. – 509 с.
7. *Погорелов А. В.* Изгибания поверхностей и устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1986. – 96 с.
8. *Безкоровайна Л. Л.* Ареальні нескінченно малі деформації і врівноважені стани пружної оболонки. – Одеса: АстроПринт, 1999. – 165 с.

Одержано 20.05.2002,
після доопрацювання — 02.07.2003