УДК 517.911

А. Е. Зернов, Ю. В. Кузина (Южноукр. пед. ун-т)

КАЧЕСТВЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИНГУЛЯРНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ $F(t, x, x') = 0,\ x(0) = 0$

We prove the existence and uniqueness of a continuously differentiable solution with required asymptotic properties.

Доведено існування та єдиність неперервно диференційовного розв'язку з потрібними асимптотичними властивостями.

Сингулярная задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных неизвестных, исследована достаточно подробно; в первую очередь следует отметить работы [1 – 3]. Что же касается дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно производных неизвестных, то значительное внимание [4 – 7] уделялось изучению вопросов существования и числа решений, а также сходимости к решению последовательностей приближений. Однако асимптотические свойства решений таких задач исследованы сравнительно мало даже в простейших случаях. В предлагаемой работе рассматривается одна из сингулярных задач Коши $F(t, x, x') = 0,\ x(0) = 0,$ строится асимптотика и доказывается существование единственного непрерывно дифференцируемого решения с требуемыми асимптотическими свойствами. Используются идеи и методы качественной теории дифференциальных уравнений [1, 8, 9], а также [10]. Предлагаемая схема рассуждений (подробнее об этом см. в [10]) позволяет с единых позиций исследовать и регулярные, и сингулярные задачи Коши для дифференциальных уравнений, не разрешенных относительно старших производных.

Рассмотрим задачу Коши

$$\sum_{0 \le i+j+k \le m} a_{ijk} t^i x^j (x')^k + f(t, x, x') = 0, \tag{1}$$

$$x(0) = 0, \tag{2}$$

где t — действительная переменная, $t \in (0, \tau)$, $x : (0, \tau) \to \mathbb{R}$ — действительная функция переменной t, все a_{ijk} — постоянные (i, j, k — целые неотрицательные), причем

$$a_{000} = 0, \quad a_{001} = \ldots = a_{00m} = 0, \quad a_{101} \ne 0,$$

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция,

$$\mathcal{D} = \{(t, x, y) : t \in (0, \tau),\ |x| < r_1 t,\ |y| < r_2\},$$

$$|f(t,x,y)| \le t^m \alpha(t), \quad (t,x,y) \in \mathcal{D},$$

$\alpha : (0,\tau) \to (0,+\infty)$ — непрерывная функция,

$$\lim_{t\to+0} \alpha(t) = 0, \quad \lim_{t\to+0} \frac{\alpha(t)}{t} = \sigma, \quad 0 \le \sigma \le +\infty;$$

если $\sigma = +\infty$, то α — непрерывно дифференцируемая функция, $\alpha'(t) \ge 0$, $t \in \in (0,\tau)$.

Определение. *Для каждого* $\rho \in (0,\tau)$ *будем называть* ρ *-решением задачи* (1), (2) *непрерывно дифференцируемую функцию* $x : (0,\rho] \to \mathbb{R}$, *которая удовлетворяет условиям:*

1) $(t, x(t), x'(t)) \in \mathcal{D}, \quad t \in (0,\rho];$

2) x *тождественно удовлетворяет уравнению* (1) *при всех* $t \in (0,\rho]$.

Предположим, что для любых точек $(t, x_i, y_i) \in \mathcal{D}$, $i \in \{1,2\}$, выполнено условие

$$|f(t,x_1,y_1) - f(t,x_2,y_2)| \le L_1 t(|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|),$$

где L_1 — постоянная.

Обозначим

$$P(c) = \sum_{k=0}^{m-1} a_{10k} c^k + \sum_{k=0}^{m-1} a_{01k} c^{k+1}.$$

Пусть уравнение

$$P(c) = 0 \tag{3}$$

имеет действительный корень $c = c_1$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) c_1 — простой корень уравнения (3), т. е. $P(c_1) = 0$, $P'(c_1) \ne 0$;

2) $0 < |c_1| < \min\{r_1, r_2\}$;

3) $\sum_{k=0}^{m-1} (k+1)|a_{01k}||c_1|^k + L_1 + L_2 < |a_{101}|$,

где

$$L_2 = \max\left\{\left|\sum_{k=2}^{m-1} k a_{10k} c_1^{k-1}\right|, \left|\sum_{k=0}^{m-2} (2a_{02k} c_1 + a_{11k}) c_1^k\right|\right\}.$$

Пусть функция $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$S(t) = \sum_{k=1}^{m} c_k t^k, \tag{4}$$

где постоянные коэффициенты $c_1, \ldots, c_m$ выбраны таким образом: c_1 — указанный выше корень уравнения (3), а $c_2, \ldots, c_m$ подобраны так, чтобы выполнялось условие

$$\sum_{1 \le i+j+k \le m} a_{ijk} t^i (S(t))^j (S'(t))^k = O(t^{m+1}), \quad t \to +0.$$

Нетрудно убедиться в том, что в (4) коэффициенты $c_2, \ldots, c_m$ по данному c_1 находятся однозначно.

Обозначим через $\mathcal{U}(\rho, M)$ множество всех непрерывно дифференцируемых функций $u : (0,\rho] \to \mathbb{R}$ таких, что

$$|u(t)-S(t)| \le M t^m \beta(t), \quad |u'(t)-S'(t)| \le M t^{m-1}\beta(t), \quad t \in (0, \rho], \tag{5}$$

где функция $\beta : (0, \tau) \to (0, +\infty)$ определяется равенством

$$\beta(t) = \begin{cases} t, & \text{если } \sigma < +\infty; \\ \alpha(t), & \text{если } \sigma = +\infty. \end{cases}$$

Здесь ρ, M — постоянные, $\rho \in (0, \tau)$.

Теорема. *Существуют* ρ, M *такие, что задача* (1), (2) *имеет* ρ*-решение, принадлежащее множеству* $\mathcal{U}(\rho, M)$ *и притом единственное.*

Доказательство. Вначале выбираем ρ, M. Неравенства, определяющие этот выбор, здесь не приводятся ввиду ограниченности объема статьи. Отметим лишь, что M достаточно велико, ρ достаточно мало. Обозначим через $\mathcal{B}$ пространство непрерывно дифференцируемых функций $x : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ с нормой

$$\| x \|_{\mathcal{B}} = \max_{t \in [0,\rho]} \left(|x(t)| + |x'(t)| \right),$$

а через $\mathcal{U}$ подмножество $\mathcal{B}$, каждый элемент $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ которого удовлетворяет неравенствам (5), причем $u(0) = 0$, $u'(0) = c_1$. Множество $\mathcal{U}$ замкнуто и ограничено.

Преобразовав уравнение (1) к виду

$$x' = (-a_{101}t)^{-1}\left(a_{100}t + a_{010}x + \sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}x(x')^k + \varphi(t, x, x') + f(t, x, x') \right),$$

где функция $\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ определяется равенством

$$\varphi(t, x, y) = \sum_{k=2}^{m-1} a_{10k}ty^k + \sum_{\substack{1 \le i+j+k \le m, \\ i+j \ge 2}} a_{ijk}t^i x^j y^k,$$

будем рассматривать дифференциальное уравнение

$$x' = (-a_{101}t)^{-1}\Big(a_{100}t + a_{010}x + x\sum_{k=1}^{m-1} a_{01k}(u'(t))^k + $$
$$+ \varphi(t, u(t), u'(t)) + f(t, u(t), u'(t)) \Big), \tag{6}$$

где $u \in \mathcal{U}$ — произвольная фиксированная функция. Далее рассуждения проводятся по той же схеме, что и при доказательстве теоремы 1 из [10, с. 303 – 305] в случае $b < 2\sigma$; сохраняя обозначения из [10], здесь следует взять

$$\Phi_1 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - S(t)| = M t^m \beta(t)\},$$

$$\Phi_2 = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_2(t)| = t h\},$$

$$\Phi_3(\nu) = \{(t, x) : t \in (0, \rho],\ |x - x_u(t)| = \nu t\},$$

где ν — параметр, $\nu \in (0, 1]$. Доказывается, что задача Коши (6), (2) имеет единственное решение $x_u \in \mathcal{U}$. Определяем оператор $\mathrm{T} : \mathcal{U} \to \mathcal{U}$, полагая $\mathrm{T}u = x_u$, и доказываем, что этот оператор является сжимающим. Для завершения доказательства теоремы остается применить принцип Банаха сжатых отображений.

1. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. – Минск: Наука и техника, 1972. – 664 с.
2. *Кигурадзе И. Т.* О задаче Коши для сингулярных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. – 1965. – **1**, № 10. – С. 1271–1291.
3. *Чечик В. А.* Исследование систем обыкновенных дифференциальных уравнений с сингулярностью // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1959. – № 8. – С. 155–198.
4. *Витюк А. Н.* Обобщенная задача Коши для системы дифференциальных уравнений, не решенной относительно производных // Дифференц. уравнения. – 1971. – 7, № 9. – С. 1575–1580.
5. *Рудаков В. П.* О существовании и единственности решения систем дифференциальных уравнений первого порядка, частично разрешенных относительно производных // Изв. вузов. Математика. – 1971. – № 9. – С. 79–84.
6. *Conti R.* Sulla risoluzione dell'equazione $F(t, x, dx/dt) = 0$ // Ann. mat. pura ed appl. – 1959. – № 48. – P. 97–102.
7. *Kowalski Z.* A difference method of solving the differential equation $y' = h(t, y, y, y')$ // Ann. pol. math. – 1965. – **16**, № 2. – P. 121–148.
8. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
9. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М., Л.: Гостехтеориздат, 1949. – 550 с.
10. *Зернов А. Е.* Качественный анализ неявной сингулярной задачи Коши // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 3. – С. 302–310.

Получено 14.10.2002