УДК 517.53

А. П. Голуб (Ін-т математики НАН України, Київ)

АПРОКСИМАНТИ ПАДЕ – ЧЕБИШЕВА ОДНОГО КЛАСУ ФУНКЦІЙ

By using the method of generalized moment representations suggested by Dzyadyk in 1981, we construct the Pade – Chebyshev approximants of a class of functions which is an analog of the class of Markov functions.

За допомогою методу узагальнених моментних зображень, запропонованого В. К. Дзядиком у 1981 р., побудовано апроксиманти Паде – Чебишева для класу функцій, що є аналогом класу марковських функцій.

У 1981 р. В. К. Дзядик [1] запропонував поняття узагальнених моментних зображень, що надалі [2, 3] було застосоване до побудови та вивчення раціональних апроксимацій ряду спеціальних функцій.

Означення 1. *Узагальненим моментним зображенням числової послідовності* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *на добутку двох лінійних просторів* $\mathcal{X}$ *та* $\mathcal{Y}$ *називається двопараметрична сукупність рівностей*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{1}$$

де $x_k \in \mathcal{X}$, $k = \overline{0, \infty}$, $y_j \in \mathcal{Y}$, $j = \overline{0, \infty}$, *а* $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *— білінійна форма, означена на* $\mathcal{X} \times \mathcal{Y}$.

У [4] метод узагальнених моментних зображень застосовано до побудови та дослідження апроксимацій Паде – Чебишева.

Означення 2. *Нехай функція* $f \in C[-1, 1]$ *розкладається в рівномірно збіжний ряд Фур'є – Чебишева вигляду*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_k(z), \tag{2}$$

де $T_k(z) = \cos \arccos z$ *— многочлени Чебишева першого роду. Апроксимантою Паде – Чебишева функції* f *порядку* $[M/N]$ *називається раціональний поліном*

$$[M/N]_f^T(z) = \frac{P_M(z)}{Q_N(z)}, \tag{3}$$

степінь чисельника якого не перевищує M, *а степінь чисельника не перевищує* N, *такий, що має місце розвинення*

$$f(z)Q_N(z) - P_M(z) = \sum_{k=M+N+1}^{\infty} \tau_k T_k(z). \tag{4}$$

У даній статті встановлено результати, що узагальнюють результати [4].

Теорема 1. *Нехай функція* f *розкладається в рівномірно і абсолютно збіжний ряд Фур'є – Чебишева*

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{mk+n}(z), \tag{5}$$

де $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *і при цьому для послідовності* $\{s_k\}_{k=0}^{\infty}$ *має місце узагальнене моментне зображення*

$$s_{k+j} = \langle x_k, y_j \rangle, \quad k, j = \overline{0, \infty}, \tag{6}$$

на добутку лінійних просторів $\mathscr{X}$ та $\mathscr{Y}$. Нехай, крім цього, при деяких $M \geq N$, $M, N \in \mathbb{N} \bigcup \{0\}$, є відмінним від нуля визначник

$$\Delta[M/N] = \det \left\| s_{M+1+k+j} + s_{M+1+k-j} \right\|_{k,j=0}^{N} \neq 0. \qquad (7)$$

Тоді апроксиманта Паде – Чебишева функції f порядку $[mM+n/mN]$ існує і має зображення

$$[mM+n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)}, \qquad (8)$$

де

$$Q_{mN}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k^{(N)} T_{mk}(z), \qquad (9)$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{k} c_j^{(N)} s_{k-j} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=k}^{k} c_j^{(N)} s_{j-k} -$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{-[-n/m]-1} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} + \frac{1}{2} \sum_{k=[-n/m]+1}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{M} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} (s_{k-j} + s_{k+j}), \qquad (10)$$

а коефіцієнти $c_k^{(N)}$, $k = \overline{0, N}$, визначаються з умов біортогональності для узагальненого полінома

$$X_N = \sum_{k=0}^{N} c_k^{(N)} (x_{M+1+k} + x_{M+1-k}) \qquad (11)$$

вигляду

$$\langle X_N, y_j \rangle = 0, \quad j = \overline{0, N-1}.$$

Доведення. Враховуючи (5) та (9), отримуємо

$$f(z) Q_{mN}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_{mj}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=0}^{\infty} s_k \left(T_{m(k+j)+n}(z) + T_{|m(k-j)+n|}(z) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=j}^{\infty} s_{k-j} T_{mk+n}(z) + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=0}^{[j-n/m]} s_k T_{m(j-k)-n}(z) +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} \sum_{k=[j-n/m]+1}^{\infty} s_k T_{m(k-j)+n}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{k} c_j^{(N)} s_{k-j} + \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{\infty} T_{mk+n}(z) \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k-j} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{N} T_{mk+n}(z)\sum_{j=k}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} -$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{-[-n/m]-1} T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{j-k} + \frac{1}{2}\sum_{k=[-n/m]+1}^{N} T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} +$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{\infty} T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} s_{k+j} =$$

$$= P_{mM+n}(z) + \frac{1}{2}\sum_{k=M+1}^{\infty} T_{mk+n}(z)\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} (s_{k-j} + s_{k+j}) =$$

$$= P_{mM+n}(z) + \frac{1}{2}\sum_{k=M+1}^{\infty} T_{mk+n}(z)\langle X_n, y_{k-M-1}\rangle,$$

звідки і випливає твердження теореми 1.

Теорема 2. *Апроксиманти Паде – Чебишева функцій, що мають зображення*

$$f(z) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2}\, d\mu(t), \tag{12}$$

де $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $m \in \mathbb{N}$, *а* $\mu(t)$ *— неспадна функція, що має нескінченну кількість точок зростання на сегменті* $[\alpha, \beta] \subset [-1, 1]$ *порядків* $[mM + n/mN]$, $M \geq N \geq 0$, *мають зображення*

$$[mM + n/mN]_f^T(z) = \frac{P_{mM+n}(z)}{Q_{mN}(z)}, \tag{13}$$

де

$$Q_{mN}(z) = \frac{1}{2} U_n(2T_m(z)), \tag{14}$$

$$P_{mM+n}(z) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2}\left(U_n(2T_m(z)) - U_n\left(t + \frac{1}{t}\right)\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) U_n\left(1 + \frac{1}{t}\right)\right) d\mu(t), \tag{15}$$

а коефіцієнти алгебраїчного многочлена $U_N(t)$ *визначаються з умов біортогональності для полінома* $X_N(t) = t^{M+1} U_N(t + 1/t)$ *вигляду*

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^k X_N(t)\, d\mu(t) = 0, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Доведення. Оскільки, як відомо [5, с. 144],

$$\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} T_{km+n}(z) t^k,$$

то

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} s_k T_{km+n}(z),$$

де

$$s_k = \int_{\alpha}^{\beta} t^k \, d\mu(t).$$

Отже, відповідно до теореми 1, щоб побудувати апроксиманту Паде – Чебишева функції f порядку $[mM + n/mN]$, $M \geq N \geq 0$, необхідно побудувати біортогональний поліном

$$X_N(t) = t^{M+1} \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}(t^j + t^{-j}),$$

що задовольняє умови

$$\int_{\alpha}^{\beta} t^k X_N(t) d\mu(t) = 0, \quad k = \overline{0, N-1}.$$

Неважко бачити, що поліном $X_N(t)/t^{M+1}$ буде алгебраїчним многочленом степеня N від змінної $t + 1/t$. Позначимо його через $U_N(w)$. Отже,

$$\frac{X_N(t)}{t^{M+1}} = U_N\left(t + \frac{1}{t}\right).$$

Оскільки системи функцій $\{t^k\}_{k=0}^{N}$ та $\{t^{M+1}(t+1/t)^j\}_{j=0}^{N}$ є чебишевськими на $[\alpha, \beta]$, то згідно з [3] невироджена біортогоналізація можлива. Крім того, поліном $U_N(t + 1/t)$ має на (α, β) рівно N простих нулів. Розглянемо тепер

$$U_N(2T_m(z)) = \sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)}(e^{imj\arccos z} + e^{-imj\arccos z}) =$$

$$= 2\sum_{j=0}^{N} c_j^{(N)} T_{mj}(z) = 2Q_{mN}(z).$$

Таким чином, знаменник апроксиманти Паде – Чебишева $[mM + n/MN]_f^T(z)$ має вигляд

$$Q_{mN}(z) = \frac{1}{2} U_N(2T_m(z)).$$

Користуючись (10) та (12), отримуємо

$$f(z)Q_{mN}(z) = Q_{mN}(z)\int_{\alpha}^{\beta} \frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} d\mu(t) =$$

$$= Q_{mN}(z)\left(\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z)\right) d\mu(t) + \sum_{k=0}^{M} s_k T_{km+n}(z)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}\left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} - \right.$$

$$- \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) \Bigg) U_n(2T_m(z))\, d\mu(t) + Q_{mN}(z) \sum_{k=0}^{M} s_k T_{km+n}(z) =$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) \right) \left(U_n(2T_m(z)) - U_n\left(t + \frac{1}{t}\right) \right) d\mu(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{T_n(z) - tT_{|n-m|}(z)}{1 - 2tT_m(z) + t^2} - \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) \right) U_n\left(t + \frac{1}{t}\right) d\mu(t) +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \sum_{k=0}^{M} t^k T_{km+n}(z) U_n(2T_m(z))\, d\mu(t),$$

звідки і випливає формула (13).

1. *Дзядык В. К.* Об обобщении проблемы моментов // Докл. АН УССР. – 1981. – № 6. – С. 8 – 12.
2. *Дзядык В. К., Голуб А. П.* Обобщенная проблема моментов и аппроксимация Паде. – Киев, 1981. – С. 3 – 15. – (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 81.58).
3. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и рациональные аппроксимации. – Киев, 1987. – 50 с. (Препринт / АН УССР. Ин-т математики; 87.25).
4. *Голуб А. П.* Обобщенные моментные представления и аппроксимации Паде – Чебышева // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 6. – С. 762 – 766.
5. *Пашковский С.* Вычислительные применения многочленов и рядов Чебышева. – М.: Наука, 1983. – 384 с.

Одержано 18.05.2001,
після доопрацювання 31.08.2001