УДК 517.926.4

В. М. Евтухов (Одес. ун-т)

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ n-ГО ПОРЯДКА

We investigate smoothness properties of roots of algebraic equations with almost constant coefficients and construct a transformation, which may be effectively used in investigating the asymptotic behavior exhibited by a fundamental family of solutions of a wide class of nonautonomous linear differential equations of n-th order.

Досліджуються гладкісні властивості коренів алгебраїчних рівнянь з майже сталими коефіцієнтами і будується перетворення, яке може бути ефективно використане при дослідженні асимптотичної поведінки фундаментальної сім'ї розв'язків широкого класу неавтономних лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку.

1. Введение. Среди результатов, относящихся к асимптотической теории линейных дифференциальных уравнений n-го порядка, особо следует отметить теоремы, полученные в § 6 монографии И. Т. Кигурадзе и Т. А. Чантурия [1] (см. также работу И. Т. Кигурадзе [2]) для уравнений вида

$$u^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} [\, p_{0k}(t) + p_{1k}(t)\,]u^{(k)}, \tag{1.1}$$

где $p_{0k}: [\,a, +\infty[\, \to \mathbf{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$, — локально абсолютно непрерывны, а $p_{1k}: [\,a, +\infty[\, \to \mathbf{R}$, $k = 0, \ldots, n-1$, — „малые в некотором смысле" локально суммируемые функции. Основной из них является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть существуют дважды непрерывно дифференцируемые функции* $\varphi, \psi: [\,a, +\infty[\, \to \,]0, +\infty[$ *такие, что:*

а) *функции* $a_k(t) = \varphi^{-1}(t)\psi^{-1-k}(t)\big(\varphi(t)\psi^k(t)\big)'$, $b_k(t) = \psi^{k-n}(t)p_{0k}(t)$, $c_k(t) = \psi^{k-n+1}(t)p_{1k}(t)$ *удовлетворяют условиям*

$$\int_a^{+\infty} |a_k'(t)|dt < +\infty, \qquad \int_a^{+\infty} |b_k'(t)|dt < +\infty,$$

$$\int_a^{+\infty} |c_k(t)|dt < +\infty, \quad k = 0, \ldots, n-1;$$

б) *уравнение*

$$\prod_{j=0}^{n-1} (\lambda + a_{0j}) = \sum_{k=1}^{n-1} b_{0k} \prod_{j=0}^{k-1} (\lambda + a_{0j}) + b_{0j}, \tag{1.2}$$

где

$$a_{0j} = \lim_{t \to +\infty} a_j(t), \qquad b_{0j} = \lim_{t \to +\infty} b_j(t),$$

имеют различные корни λ_{0k}, $k = 1, \ldots, n$;

в) *система функций* $\eta_k(t) = \psi(t)\mathrm{Re}\lambda_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, *где каждая* $\lambda_k(t)$ *является корнем уравнения*

$$\prod_{j=0}^{n-1} \big(\lambda + a_j(t)\big) = \sum_{k=1}^{n-1} b_k(t) \prod_{j=0}^{k-1} \big(\lambda + a_j(t)\big) + b_j(t), \tag{1.3}$$

стремящимся к λ_{0k} *при* $t \to +\infty$, *удовлетворяет условию Мателля – Левинсона* [3 – 5], *т. е. при любых* j *и* k *либо*

$$\int_a^{+\infty} \left[\eta_k(\tau) - \eta_j(\tau) \right] d\tau = +\infty,$$

и

$$\inf \left\{ \int_s^t \left[\eta_k(\tau) - \eta_j(\tau) \right] d\tau : t \geq s \geq a \right\} > -\infty,$$

либо

$$\sup \left\{ \int_s^t \left[\eta_k(\tau) - \eta_j(\tau) \right] d\tau : t \geq s \geq a \right\} < +\infty.$$

Тогда уравнение (1.1) *имеет фундаментальную систему решений* u_j, $j = 1, \ldots, n$, *допускающих при* $t \to +\infty$ *асимптотические представления*

$$u_j^{(k-1)}(t) = \varphi(t)\psi^{k-1}(t)\exp\left(\int_a^t \lambda_j(\tau)\psi(\tau)d\tau \right)\left(g_{kj}^0 + o(1) \right), \quad k = 1, \ldots, n,$$

где $g_{1j}^0 = 1$, $g_{kj}^0 = \prod_{l=0}^{k-2} \left(\lambda_{0j} + a_{0e} \right)$.

Эта теорема позволила при соответствующем выборе функций φ и ψ получить, в частности, асимптотические представления для решений уравнений с почти постоянными коэффициентами, с асимптотически малыми коэффициентами и уравнений, асимптотически эквивалентных двучленным. В основе ее доказательства лежат идеи, заложенные в работе М. Мателля [3]. Сначала уравнение (1.1) записывается в виде системы

$$\frac{d}{dt}\left(u^{(k-1)} \right)_{k=1}^n = \left[P_0(t) + P_1(t) \right]\left(u^{(k-1)} \right)_{k=1}^n, \tag{1.4}$$

где

$$P_0(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ p_{00}(t) & p_{01}(t) & p_{02}(t) & \vdots & p_{0n-1}(t) \end{pmatrix},$$

$$P_1(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_{10}(t) & p_{11}(t) & \vdots & p_{1n-1}(t) \end{pmatrix}.$$

Если ввести матрицу

$$F(t) = \begin{pmatrix} \varphi(t) & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \varphi(t)\psi(t) & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \varphi(t)\psi^{n-1}(t) \end{pmatrix}$$

и к системе (1.4) применить преобразование

$$x = \int_{t_1}^{t} \psi(\tau)\,d\tau, \qquad \left(u^{(k-1)}(t)\right)_{k=1}^{n} = F(t)z(x), \qquad z = (z_k)_{k=1}^{n}, \tag{1.5}$$

то получаем систему

$$\frac{dz}{dx} = \left[\, A(t) + \psi^{-1}(t)F^{-1}(t)P_1(t)F(t) \,\right] z,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} -a_0(t) & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -a_1(t) & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & -a_{n-2}(t) & 1 \\ b_0(t) & b_1(t) & \ldots & b_{n-2}(t) & b_{n-1}(t) - a_{n-1}(t) \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Главная матрица A коэффициентов этой системы в силу условий а) является почти постоянной (существует $\lim_{t\to+\infty} A(t) = A_0$). Ее характеристическое уравнение имеет вид (1.3). Поскольку согласно условию б) предельное алгебраическое уравнение (1.2) имеет простые корни, то корни λ_k, $k = 1, \ldots, n$, уравнения (1.3) могут быть выбранными в виде различных и локально абсолютно непрерывных на некотором промежутке $[\,t_0, +\infty[\, \subset [\,a, +\infty[$ функций, удовлетворяющих условиям $\int_{t_0}^{+\infty} |\lambda_k'(t)|\,dt < +\infty$, $k = 1, \ldots, n$, т. е. функций, наследующих гладкостные свойства коэффициентов характеристического уравнения (1.3). Кроме того, в этом случае легко строится матрица $G(t) = \left(g_{kj}(t)\right)_{j,k=1}^{n}$ с элементами

$$g_{1j}(t) = 1, \qquad g_{kj}(t) = \prod_{l=0}^{k-2} \left(\lambda_j(t) + a_l(t)\right), \qquad k = 2, \ldots, n; \quad j = 1, \ldots, n, \tag{1.8}$$

удовлетворяющая условию $\lim_{t\to+\infty} \det G(t) \neq 0$ и матричному уравнению

$$G^{-1}(t)A(t)G(t) = \operatorname{diag}[\,\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)\,].$$

После этого система (1.6) с помощью дополнительного предобразования

$$z(x) = G(t)y(x) \tag{1.9}$$

сводится до L-диагональной системы уравнений, асимптотика фундаментального семейства решений которой выписывается на основании известного результата.

В случае, когда предельное характеристическое уравнение (1.2) имеет кратные корни, возникают, прежде всего, два естественных вопроса: 1) могут ли корни характеристического уравнения (1.3) наследовать гладкостные свойства его коэффициентов? 2) Из какого матричного уравнения следует искать матрицу-функцию $G(t)$, чтобы при использовании преобразования (1.9) получить удобную для исследования систему дифференциальных уравнений?

Подобные вопросы в последние четыре десятилетия привлекали к себе внимание многих исследователей (см., например, работы [6 – 11] и цитируемую в них литературу).

В настоящей статье предпринята попытка несколько дополнить полученные в этом направлении результаты.

2. О корнях многочленов с почти постоянными коэффициентами. Рассмотрим многочлен

$$h(\lambda, t) = \lambda^n + c_1(t)\lambda^{n-1} + \ldots + c_{n-1}(t)\lambda + c_n(t), \tag{2.1}$$

где $c_k : [a, +\infty[\to \mathbf{C}$, $k = 1, \ldots, n$, — локально абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{t \to +\infty} c_k(t) = c_{0k} = \text{const}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Теорема 2. *Пусть многочлен*

$$h(\lambda, +\infty) = \lambda^n + c_{01}\lambda^{n-1} + \ldots + c_{0n-1}\lambda + c_{0n} \tag{2.3}$$

имеет корни $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ *кратности* $n_1, \ldots, n_s$ $\left(\sum_{j=1}^{s} n_j = n\right)$ *соответственно. Тогда существует* $t_0 \geq a$ *такое, что при* $t \geq t_0$ *многочлен* $h(\lambda, t)$ *имеет корни* $\lambda_{jk} : [t_0, +\infty[\to \mathbf{C}$, $k = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, s$, *которые при каждом* $j \in \{1, \ldots, s\}$ *удовлетворяют следующим условиям*:

1) $$\lim_{t \to +\infty} \lambda_{jk}(t) = \lambda_j, \quad k = 1, \ldots, n_j; \tag{2.4}$$

2) *степенные суммы*

$$s_{jm}(t) = \lambda_{j1}^m(t) + \ldots + \lambda_{jn_j}^m(t), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{2.5}$$

представимы в виде

$$s_{jm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda - \lambda_j| = \delta_0} \lambda^m \frac{h'_\lambda(\lambda, t)}{h(\lambda, t)} d\lambda, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{2.6}$$

где $\delta_0 = \min\left\{|\lambda_p - \lambda_q| : 1 \leq p < q \leq s\right\} / 2$, *и являются локально абсолютно непрерывными на* $[t_0, +\infty[$ *функциями;*

3) *в точках дифференцируемости всех функций* c_k, $k = 1, \ldots, n$,

$$s'_{jm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\lambda - \lambda_j| = \delta_0} \lambda^m \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{h'_\lambda(\lambda, t)}{h(\lambda, t)}\right) d\lambda = O\left(\sum_{k=1}^{n} |c'_k(t)|\right), \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.7}$$

Доказательство. Зафиксируем произвольным образом число $j \in \{1, \ldots, s\}$ и введем на комплексной λ-плоскости замкнутую окрестность $|\lambda - \lambda_j| \leq \delta_0$ точки λ_j, где $\delta_0 = \min\left\{|\lambda_p - \lambda_q| : 1 \leq p < q \leq s\right\} / 2$. В силу условий теоремы и выбора числа δ_0 функция $h(\lambda, +\infty)$ не имеет в этой окрестности корней, отличных от корня λ_j кратности n_j. Следовательно, на окружности γ_j: $|\lambda - \lambda_j| = \delta_0$ модуль функции $h(\lambda, +\infty)$ имеет положительный минимум m_j. С другой стороны, ввиду (2.1) и (2.2) существует $t_j \geq a$ такое, что

$$|h(\lambda, t) - h(\lambda, +\infty)| \leq \frac{m_j}{2} \quad \text{при} \quad t \geq t_j \quad \text{и} \quad \lambda \in \gamma_j. \tag{2.8}$$

Значит, при каждом фиксированном значении $t \geq t_j$ для функций $h(\lambda, +\infty)$ и $h(\lambda, t) - h(\lambda, +\infty)$ в замкнутой δ_0-окрестности точки λ_j выполнены все условия теоремы Руше (см., например, [12], гл. VII, § 2, с. 246). Согласно этой теореме функция

$$h(\lambda,+\infty) + [\, h(\lambda,t) - h(\lambda,+\infty)\,] = h(\lambda,t)$$

при каждом фиксированном $t \in [\, t_j, +\infty[$ имеет внутри окружности γ_j столько же корней, сколько их имеет функция $h(\lambda,+\infty)$, т. е. n_j корней. Обозначим эти корни функции $h(\lambda,t)$ через $\lambda_{j1}(t), \ldots, \lambda_{jn_j}(t)$. В силу изложенного выше они удовлетворяют при $t \ge t_j$ неравенствам

$$\left|\lambda_{jk}(t) - \lambda_j\right| < \delta_0, \quad k = 1, \ldots, n_j. \tag{2.9}$$

Выбрав теперь произвольным образом число $\delta \in \,]0, \delta_0\,]$, аналогично предыдущему можем доказать существование $t_j' \ge t_j$ такого, что

$$\left|\lambda_{jk}(t) - \lambda_j\right| < \delta \quad (k = 1, \ldots, n_j) \quad \text{при} \quad t \ge t_j'.$$

Следовательно, $\lim_{t\to+\infty} \lambda_{jk}(t) = \lambda_j$, $k = 1, \ldots, n_j$.

Поскольку приведенные выше рассуждения справедливы для каждого фиксированного $j \in \{1,\ldots,s\}$, то, полагая $t_0 = \{t_j : 1 \le j \le s\}$, приходим к выводу, что многочлен (2.1) при $t \ge t_0$ имеет n корней $\lambda_{jk} : [\, t_0, +\infty[\, \to \mathbf{C}$, $k = 1, \ldots, n_j$, $j = 1, \ldots, s$, удовлетворяющих при любом $j \in \{1,\ldots,s\}$ неравенствам (2.9) и условиям (2.4).

Справедливость представлений (2.6) для степенных сумм (2.5) при каждом $j \in \{1,\ldots,s\}$ и $t \ge t_0$ в силу выбора δ_0 и t_0, условия

$$\min\left\{|h(\lambda,+\infty)| : \lambda \in \gamma_j\right\} = m_j > 0 \tag{2.10}$$

и неравенств (2.8), (2.9) непосредственно вытекает из обобщения принципа аргумента (см., например, [12], гл. VII, § 1, с. 243 – 245).

Докажем теперь, используя эти представления, что каждая степенная сумма s_{jm}, $j \in \{1,\ldots,s\}$, $m \in \mathbb{N}$, является локально абсолютно непрерывной функцией на промежутке $[\, t_0, +\infty[$.

В силу непрерывности коэффициентов многочлена (2.1) на промежутке $[\, t_0, +\infty[$ и условий (2.2) существует число $M_j > 0$ такое, что

$$|h(\lambda,t)| + |h_\lambda'(\lambda,t)| \le M_j \quad \text{при} \quad t \ge t_0 \quad \text{и} \quad \lambda \in \gamma_j. \tag{2.11}$$

Кроме того, согласно (2.8) и (2.10) имеем

$$|h(\lambda,t)| \ge \frac{m_j}{2} \quad \text{при} \quad t \ge t_0 \quad \text{и} \quad \lambda \in \gamma_j. \tag{2.12}$$

Положим

$$L_j = 1 + \left|\lambda_j\right| + \delta_0, \qquad N_j = \frac{4n^2 \delta_0 M_j L_j^{m+n-1}}{m_j^2}.$$

Далее, выберем произвольным образом замкнутый промежуток $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty[$ и число $\varepsilon > 0$. Так как коэффициенты c_p, $p = 1, \ldots, n$, многочлена (2.1) являются абсолютно непрерывными на $[\alpha, \beta]$ функциями, то для данного $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что для любой конечной системы попарно непересекающихся интервалов $\{\,]\alpha_k, \beta_k[\,\}_{k=1}^q$ из промежутка $[\alpha, \beta]$, удовлетворяющей условию $\sum_{k=1}^q (\beta_k - \alpha_k) < \delta$, выполняются неравенства

$$\sum_{k=1}^{q} \left|c_p(\beta_k) - c_p(\alpha_k)\right| < \frac{\varepsilon}{N_j}, \quad p = 1, \ldots, n. \tag{2.13}$$

Выбирая таким образом число $\delta > 0$ и любую систему попарно непересекающихся интервалов $\{\,]\alpha_k, \beta_k[\,\}_{k=1}^{q}$ из $[\alpha, \beta]$, для которой $\sum_{k=1}^{q}(\beta_k - \alpha_k) < \delta$, с учетом (2.6) получаем

$$\sum_{k=1}^{q}\left|s_{jm}(\beta_k) - s_{jm}(\alpha_k)\right| \le \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_j}|\lambda|^m \sum_{k=1}^{q}\left|\frac{h'_\lambda(\lambda, \beta_k)}{h(\lambda, \beta_k)} - \frac{h'_\lambda(\lambda, \alpha_k)}{h(\lambda, \alpha_k)}\right||d\lambda|. \quad (2.14)$$

Поскольку

$$|h(\lambda, \beta_k) - h(\lambda, \alpha_k)| \le \sum_{p=1}^{n}|\lambda|^{n-p}\left|c_p(\beta_k) - c_p(\alpha_k)\right|,$$

$$\left|h'_\lambda(\lambda, \beta_k) - h'_\lambda(\lambda, \alpha_k)\right| \le \sum_{p=1}^{n-1}(n-p)|\lambda|^{n-p-1}\left|c_p(\beta_k) - c_p(\alpha_k)\right|,$$

на окружности $\gamma_j : |\lambda - \lambda_j| = \delta_0$ имеют место оценки (2.11), (2.12) и $|\lambda| < L_j$, то

$$\left|\frac{h'_\lambda(\lambda, \beta_k)}{h(\lambda, \beta_k)} - \frac{h'_\lambda(\lambda, \alpha_k)}{h(\lambda, \alpha_k)}\right| = \left|\frac{h'_\lambda(\lambda, \beta_k)}{h(\lambda, \beta_k)} - \frac{h'_\lambda(\lambda, \alpha_k)}{h(\lambda, \beta_k)} + \frac{h'_\lambda(\lambda, \alpha_k)}{h(\lambda, \beta_k)} - \frac{h'_\lambda(\lambda, \alpha_k)}{h(\lambda, \alpha_k)}\right| \le$$

$$\le \frac{2}{m_j}\left|h'_\lambda(\lambda, \beta_k) - h'_\lambda(\lambda, \alpha_k)\right| + \frac{4M_j}{m_j^2}\left|h(\lambda, \beta_k) - h(\lambda, \alpha_k)\right| \le$$

$$\le \frac{2L_j^{n-1}}{m_j}\sum_{p=1}^{n}\left|c_p(\beta_k) - c_p(\alpha_k)\right| + \frac{4(n-1)M_j L_j^{n-2}}{m_j^2}\sum_{p=1}^{n-1}\left|c_p(\beta_k) - c_p(\alpha_k)\right| \le$$

$$\le \frac{4nM_j L_j^{n-1}}{m_j^2}\sum_{p=1}^{n}\left|c_p(\beta_k) - c_p(\alpha_k)\right| \quad \text{при} \quad \lambda \in \gamma_j.$$

Ввиду этих неравенств и (2.13), из (2.14) находим

$$\sum_{k=1}^{q}\left|s_{jm}(\beta_k) - s_{jm}(\alpha_k)\right| \le \frac{4nM_j L_j^{m+n-1}}{2\pi m_j^2}\oint_{\gamma_j}\sum_{p=1}^{n}\sum_{k=1}^{q}\left|c_p(\beta_k) - c_p(\alpha_k)\right||d\lambda| <$$

$$< \frac{4n^2\delta_0 M_j L_j^{m+n-1}}{m_j^2}\frac{\varepsilon}{N_j} = \varepsilon.$$

Отсюда следует, что s_{jm} является абсолютно непрерывной функцией на промежутке $[\alpha, \beta]$ и в силу произвольности $[\alpha, \beta] \subset [t_0, +\infty[$ — локально абсолютно непрерывной на полуоси $[t_0, +\infty[$.

Используя представление (2.6), определение производной и оценки (2.11), (2.12), нетрудно также убедиться в том, что при любом значении $t \in [t_0, +\infty[$, для которого существуют конечные производные $c'_p(t)$, $p = 1, \ldots, n$, имеют место соотношения (2.7). Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Степенные суммы (2.5), введенные в тереме 2, играют важную роль при исследовании многочленов вида (2.1). В частности, они позволяют восстановить многочлен

$$h_j(\lambda, t) = \lambda^{n_j} + a_{j1}(t)\lambda^{n_j - 1} + \ldots + a_{jn_j}(t), \quad (2.15)$$

корнями которого являются функции λ_{jk}, $k=1,\dots,n_j$. Коэффициенты этого многочлена и степенные суммы (2.5) выражаются друг через друга следующими формулами Варинга (см. [13], гл. III, § 5, с. 245 – 246):

$$a_{jm}(t) = \sum \frac{(-1)^{\mu_1+\ldots+\mu_{n_j}}}{1^{\mu_1}2^{\mu_2}\ldots n_j^{\mu_j}\mu_1!\ldots\mu_{n_j}!}\left[s_{j1}(t)\right]^{\mu_1}\ldots\left[s_{jn_j}(t)\right]^{\mu_{n_j}}, \quad m = 1,\dots,n_j,$$

$$s_{jm}(t) = m\sum (-1)^{\mu_1+\ldots+\mu_{n_j}}\frac{(\mu_1+\ldots+\mu_{n_j}-1)!}{\mu_1!\ldots\mu_{n_j}!}\left[a_{j1}(t)\right]^{\mu_1}\ldots\left[a_{jn_j}(t)\right]^{\mu_j},$$

$$m = 1,2,\dots,$$

где суммирование распространяется на все наборы целых неотрицательных чисел $\left(\mu_1,\dots,\mu_{n_j}\right)$, для которых $\mu_1+2\mu_2+\ldots+n_j\mu_{n_j}=m$.

Из теоремы 2 в качестве следствий вытекают следующие известные результаты.

Следствие 1 (N. Levinson [4]). *Пусть многочлен* (2.3) *имеет различные корни* λ_j, $j=1,\dots,n$. *Тогда существует* $t_0\ge a$ *такое, что при* $t\ge t_0$ *многочлен* (2.1) *имеет корни* $\lambda_{j1}(t)$, $j=1,\dots,n$, *которые являются локально абсолютно непрерывными на* $[t_0,+\infty[$ *комплекснозначными функциями и удовлетворяют условиям*:

1) $\lim\limits_{t\to+\infty}\lambda_{j1}(t) = \lambda_j$, $j=1,\dots,n$;

2) *в точках дифференцируемости всех функций* c_k, $k=1,\dots,n$,

$$\lambda'_{j1}(t) = O\left(\sum_{k=1}^{n}\left|c'_k(t)\right|\right) \quad \textit{при} \quad t\to+\infty.$$

Следствие 2 (Н. И. Шкиль [6], A. Devinatz [7]). *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и многочлен* (2.1) *имеет корень* $\lambda_{j1}(t)$, $j\in\{1,\dots,s\}$, *постоянной кратности* n_j, *стремящийся к* λ_j *при* $t\to+\infty$. *Тогда на некотором промежутке* $[t_0,+\infty[\,\subset[a,+\infty[$ *функция* λ_{j1} *является локально абсолютно непрерывной и в точках дифференцируемости всех функций* c_k, $k=1,\dots,n$, *имеет место оценка* $\lambda'_{j1}(t)=O\left(\sum_{k=1}^{n}\left|c'_k(t)\right|\right)$ *при* $t\to+\infty$.

Установим теперь результат, позволяющий при некоторых дополнительных ограничениях уточнить теорему 2 и охватить ряд случаев, отличных от указанных в следствиях 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть* $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ — *корни кратности* $n_1,\dots,n_s$ *(соответственно) многочлена* (2.3) *и для некоторого* $p\in\{1,\dots,s\}$ *существует локально абсолютно непрерывная функция* $\alpha_p:[a,+\infty[\,\to\,]0,+\infty[$ *такая, что*

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha_p(t) = 0, \tag{2.16}$$

$$\lim_{t\to+\infty}\alpha_p^{k-n_p}(t)\frac{\partial^k h(\lambda_p,t)}{\partial\lambda^k} = k!d_{n_p-k} = \text{const}, \quad k=0,\dots,n_p^{*}. \tag{2.17}$$

Пусть, кроме того, многочлен

$$g_{0p}(\mu) = d_0\mu^{n_p} + d_1\mu^{n_p-1}+\ldots+d_{n_p} \tag{2.18}$$

* При $k=n_p$ это условие выполнено, причем $d_0\ne 0$.

имеет корни $\mu_{p1}, \ldots, \mu_{ps_p}$ *кратности* $n_{p1}, \ldots, n_{ps_p}$ *(соответственно). Тогда найдется* $t_0 \geq a$ *такое, что при* $t \geq t_0$ *многочлен* (2.1) *имеет* n_k *корней* $\lambda_{pjk} : [t_0, +\infty[\to \mathbf{C}$, $k = 1, \ldots, n_{pj}$, $j = 1, \ldots, s_p$, *которые при каждом* $j \in \{1, \ldots, s_p\}$ *удовлетворяют условиям:*

1) $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{\lambda_{pjk}(t) - \lambda_p}{\alpha_p(t)} = \mu_{pj}, \quad k = 1, \ldots, n_{pj};$

2) *степенные суммы*

$$s_{pjm}(t) = \sum_{k=1}^{n_{pj}} \left(\frac{\lambda_{pjk}(t) - \lambda_p}{\alpha_p(t)} \right)^m, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

представимы в виде

$$s_{pjm}(t) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\mu - \mu_{pj}| = \delta_p} \mu^m \frac{\left[g_p(\mu, t) \right]'_\mu}{g_p(\mu, t)} d\mu, \quad m = 1, 2, \ldots,$$

где

$$\delta_p = \frac{\min\left\{ |\mu_{pj} - \mu_{pk}| : 1 \leq j < k \leq s_p \right\}}{2},$$

$$g_p(\mu, t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha_p^{k - n_p}(t)}{k!} \frac{\partial^k h(\lambda_p, t)}{\partial \lambda^k} \mu^k, \tag{2.19}$$

и являются локально абсолютно непрерывными функциями на промежутке $[t_0, +\infty[$;

3) *в точках дифференцируемости функций* α_p *и* c_k, $k = 1, \ldots, n$,

$$s'_{pjm}(t) = O\left(\sum_{k=0}^{n} \left| \left(\alpha_p^{k - n_p}(t) \frac{\partial^k h(\lambda_p, t)}{\partial \lambda^k} \right)' \right| \right) \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad m = 1, 2, \ldots. \tag{2.20}$$

Доказательство. Разлагая многочлен (2.1) по степеням $\lambda - \lambda_p$, получаем

$$h(\lambda, t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k h(\lambda_p, t)}{\partial \lambda^k} (\lambda - \lambda_p)^k. \tag{2.21}$$

Поскольку выполняются условия (2.2) и λ_p — корень кратности n_p многочлена (2.3), то

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k h(\lambda_p, t)}{\partial \lambda^k} = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 0, \ldots, n_p - 1, \\ d_0 \neq 0 & \text{при } k = n_p, \\ \text{const} & \text{при } k = n_p + 1, \ldots, n. \end{cases} \tag{2.22}$$

Полагая в (2.21)

$$\lambda = \lambda_p + \alpha_p(t) \mu, \tag{2.23}$$

получаем после деления на $\alpha_p^{n_p}(t)$ многочлен (2.19). Согласно (2.16), (2.17) и (2.22) предельным для (2.19) при $t \to +\infty$ является многочлен (2.18). В силу условий теоремы он имеет корни $\mu_{p1},\ldots,\mu_{ps_p}$ кратности $n_{p1},\ldots,n_{ps_p}$ (соответственно).

Для каждого фиксированного $j\in\{1,\ldots,s_p\}$ введем на комплексной μ-плоскости замкнутую окрестность $|\mu-\mu_{pj}|\le\delta_p$ точки μ_{pj}, где

$$\delta_p = \frac{\min\{|\lambda_{pm}-\lambda_{pk}|: 1\le p<k\le s_p\}}{2}.$$

Аналогично тому, как при доказательстве теоремы 2, нетрудно показать, используя теорему Руше и обобщение принципа аргумента, что для некоторого $t_0\ge a$ многочлен (2.19) при $t\ge t_0$ имеет в каждой окрестности $|\mu-\mu_{pj}|<\delta_p$, $j\in\{1,\ldots,s_p\}$, n_{pj} корней $\mu_{pjk}:[t_0,+\infty[\to\mathbf{C}$, $k=1,\ldots,n_{pj}$, которые имеют свойства:

1) $\lim\limits_{t\to+\infty}\mu_{pjk}(t) = \mu_{pj}$, $k=1,\ldots,n_{pj}$;

2) степенные суммы

$$s_{pjm}(t) = \sum_{k=1}^{n_{pj}}\mu_{pjk}^m(t),\quad m=1,2,\ldots,$$

представимы в виде

$$s_{pjm}(t) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|\mu-\mu_{pj}|=\delta_p}\mu^m\frac{[g_p(\mu,t)]'_\mu}{g_p(\mu,t)}\,d\mu,\quad m=1,2,\ldots,$$

и являются локально абсолютно непрерывными на $[t_0,+\infty[$ функциями;

3) в точках дифференцируемости функций α_p и c_k, $k=1,\ldots,n$, имеют место оценки (2.20).

Отсюда с учетом (2.23) вытекает справедливость утверждений теоремы.

Следствие 3. *Пусть выполняются условия теоремы* 3 *и многочлен* (2.18) *имеет различные корни* $\mu_{p1},\ldots,\mu_{pn_p}$. *Тогда найдется* $t_0\ge a$ *такое, что при* $t\ge t_0$ *многочлен* (2.1) *имеет* n_p *локально абсолютно непрерывных на* $[t_0,+\infty[$ *корней вида*

$$\lambda_{pj1}(t) = \lambda_p + \alpha_p(t)[\mu_{pj}+o(1)],\qquad t\to+\infty,\quad j=1,\ldots,n_p,$$

производные которых в точках дифференцируемости функций α_p *и* c_k, $k=1,\ldots,n$, *удовлетворяют при* $t\to+\infty$ *оценкам*

$$\lambda'_{pj1}(t) = O\left(|\alpha'_p(t)| + \alpha_p(t)\sum_{k=0}^{n}\left|\left(\alpha_p^{k-n_p}(t)\frac{\partial^k h(\lambda_p,t)}{\partial\lambda^k}\right)'\right|\right),\quad j=1,\ldots,n_p. \qquad (2.24)$$

Следствие 4. *Пусть выполняются условия теоремы* 2 *и многочлен* (2.19) *имеет корень* $\mu_{pj1}(t)$, $j\in\{1,\ldots,s_p\}$, *постоянной кратности* n_{pj}, *стремящийся к* μ_{pj} *при* $t\to+\infty$. *Тогда функция*

$$\lambda_{pj1}(t) = \lambda_p + \alpha_p(t)\mu_{pj1}(t)$$

является локально абсолютно непрерывным на некотором промежутке $[t_0,+\infty[\subset[a,+\infty[$ *корнем постоянной кратности* n_{pj} *многочлена* (2.1) *и производная этого корня в точках дифференцируемости функций* α_p *и* c_k, $k=1,\ldots,n$, *удовлетворяет оценке* (2.24).

***Замечание* 2.** В случаях, отличных от указанных в следствиях 3 и 4, процесс уточнения вида корней многочлена (2.1), стремящихся к λ_p при $t \to +\infty$, и оценок для их производных может быть при некоторых условиях продолжен путем применения описанной в теореме 3 методики к многочлену (2.19).

***Пример* 1.** Рассмотрим многочлен

$$h(\lambda, t) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{\alpha_{n-k}}{t} \right] \lambda^{n-k}, \tag{2.25}$$

где α_m, $m = 0, \ldots, n-1$, — вещественные числа, не все равные нулю. Предельным для $h(\lambda, t)$ при $t \to +\infty$ является многочлен

$$h(\lambda, +\infty) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{n!}{k!(n-k)!} \lambda^{n-k}.$$

Легко видеть, что $\lambda = 1$ — его корень кратности n. Поэтому согласно теореме 2 многочлен $h(\lambda, t)$ имеет n корней вида $\lambda_k(t) = 1 + o(1)$, $t \to +\infty$, $k = 1, \ldots, n$, для которых степенные суммы

$$s_m(t) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m(t), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

непрерывно дифференцируемы в окрестности $+\infty$ и удовлетворяют соотношениям

$$s_m'(t) = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad \text{при} \quad t \to +\infty, \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Уточним вид этих корней и оценку для их производных, используя теорему 3. Для этого запишем соответствующий $\lambda = 1$ многочлен (2.19). Нетрудно проверить, что он имеет вид

$$g(\mu, t) = \frac{\beta_0}{t\alpha^n(t)} + \frac{\beta_1}{t\alpha^{n-1}(t)} \mu + \ldots + \frac{\beta_{n-1}}{t\alpha(t)} \mu^{n-1} + \mu^n,$$

где

$$\beta_k = \sum_{m=k}^{n-1} \frac{m!}{k!(n-k)!} \alpha_m, \quad k = 0, \ldots, n-1.$$

Корни $h(\lambda, t)$ и $g(\mu, t)$ связаны между собой соотношением $\lambda(t) = 1 + \alpha(t)\mu(t)$.

Пусть $\beta_0 \neq 0$. Тогда, полагая $\alpha(t) = t^{-1/n}$, замечаем, что предельным для $g(\mu, t)$ при $t \to +\infty$ является многочлен $g(\mu, +\infty) = \beta_0 + \mu^n$, который имеет n различных корней $\mu_1, \ldots, \mu_n$. В этом случае в силу следствия 3 $h(\lambda, t)$ имеет n непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности $+\infty$ корней $\lambda_k(t)$, $k = 1, \ldots, n$, допускающих при $t \to +\infty$ представления вида

$$\lambda_k(t) = 1 + t^{-1/n}(\mu_k + o(1)), \qquad \lambda_k'(t) = O\left(t^{-(n+1)/n}\right), \quad k = 1, \ldots, n.$$

Пусть теперь для некоторого $m \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$\beta_0 = \ldots = \beta_{m-1} = 0, \quad \beta_m \neq 0.$$

В этом случае, выбирая $\alpha(t) = t^{-1/(n-m)}$, получаем

$$g(\mu, +\infty) = \beta_m \mu^m + \mu^n.$$

Данный многочлен имеет корень $\mu_0 = 0$ кратности m и $n-m$ отличных от нуля различных корней $\mu_1, \ldots, \mu_{n-m}$. При этом заметим, что $g(\mu, t)$ также имеет корень $\mu_0(t) \equiv 0$ кратности m. Отсюда с учетом теоремы 3 следует, что многочлен $h(\lambda, t)$ имеет корень $\lambda_0(t) \equiv 1$ кратности m и $n-m$ непрерывно дифференцируемых в некоторой окрестности $+\infty$ корней, допускающих при $t \to +\infty$ асимптотические представления

$$\lambda_k(t) = 1 + t^{-1/(n-m)}(\mu_k + o(1)), \qquad \lambda_k'(t) = O\left(t^{-(n-m+1)/(n-m)}\right),$$

$$k = 1, \ldots, n-m.$$

Для изучения свойств корней многочлена (2.1) может быть также использовано и понятие его дискриминанта.

Согласно теореме 2 многочлен (2.1) имеет n корней $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)$, которые при $t \to +\infty$ стремятся к корням $\mu_{01}, \ldots, \mu_{0n}$ (с учетом кратных) многочлена

$$h_0(\lambda) = \lambda^n + c_{01}\lambda^{n-1} + \ldots + c_{0n}.$$

Степенные суммы этих корней

$$s_m(t) = \mu_1^m(t) + \ldots + \mu_n^m(t), \quad m = 1, 2, \ldots,$$

с помощью формул Варинга легко могут быть выражены через коэффициенты многочлена (2.1).

Определитель

$$D(h)(t) = \begin{vmatrix} n & s_1(t) & \ldots & s_{n-1}(t) \\ s_1(t) & s_2(t) & \ldots & s_n(t) \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ s_{n-1}(t) & s_n(t) & \ldots & s_{2n-2}(t) \end{vmatrix}$$

называется (см. [14], гл. VI, § 2, с. 265–266) дискриминантом многочлена (2.1). Он вычисляется через коэффициенты (2.1) и отражает некоторые важные свойства его корней, поскольку (см., [14], гл. VI, § 2, с. 265–266)

$$D(h)(t) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\mu_i(t) - \mu_j(t)\right)^2. \tag{2.26}$$

Отсюда, в частности, следует, что (2.1) при $t = t_*$ имеет кратные корни тогда и только тогда, когда $D(h)(t_*) = 0$.

В силу (2.2), формул Варинга и (2.26)

$$\lim_{t \to +\infty} D(h)(t) = D(h_0) = \prod_{1 \le i < j \le n} \left(\mu_{0i} - \mu_{0j}\right)^2, \tag{2.27}$$

где $D(h_0)$ — дискриминант многочлена (2.3), вычисленный через его коэффициенты.

Из (2.27) и теоремы 2 непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 5. *Если* $D(h_0) \ne 0$, *то справедливы утверждения следствия* 1.

Это утверждение является частным случаем следующего более общего утверждения.

Теорема 4. *Пусть* $D(h)(t) \ne 0$ *в некоторой окрестности* $+\infty$. *Тогда существует* $t_0 \ge a$ *такое, что при* $t \ge t_0$ *многочлен* (2.1) *имеет* n *различных* *корней* $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)$, *которые являются локально абсолютно непрерывными на* $[t_0, +\infty[$ *функциями, стремящимися при* $t \to +\infty$ *к корням многочлена* (2.3) *и в точках дифференцируемости функций* c_k, $k = 1, \ldots, n$, *удовлетворяют соотношениям*

$$\lambda_j'(t) = -\frac{h_t'(\lambda_j(t), t)}{h_\lambda'(\lambda_j(t), t)} = O\left(\frac{\sum_{k=1}^n |c_k'(t)|}{\sqrt{D(h)(t)}}\right), \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.28}$$

Доказательство. В силу условий теоремы $D(h)(t) \neq 0$ на некотором промежутке $[t_0, +\infty[\subset [a, +\infty[$. Следовательно, при любом $t \geq t_0$ многочлен (2.1) имеет n различных корней $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)$. Более того, согласно (2.2), (2.26) и лемме о старшем члене (см. [14], гл. VI, § 3, с. 273)

$$|D(h)(t)| \leq [2(1+C)]^{n(n-1)-2} \min_{1 \leq i < j \leq n} \left|\mu_i(t) - \mu_j(t)\right|^2 \quad \text{при} \quad t \geq t_0, \tag{2.29}$$

где

$$C = \max_{1 \leq i \leq n} \sup\{|c_i(t)|: t \geq t_0\} < +\infty.$$

Выберем теперь произвольным образом число $A > t_0$ и покажем, что на отрезке $[t_0, A]$ многочлен (2.1) имеет n различных абсолютно непрерывных корней.

Положим

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}[2(1+C)]^{1-n(n-1)/2}\sqrt{|D(h)(t)|} \tag{2.30}$$

и при каждом фиксированном $t \in [t_0, A]$ введем на комплексной λ-плоскости n ε_t-окрестностей $V_{\varepsilon_t}(\mu_j(t))$, $j = 1, \ldots, n$, корней $\mu_1(t), \ldots, \mu_n(t)$ многочлена (2.1). В силу (2.29) и (2.30) никакие две из этих окрестностей не пересекаются. Поэтому, используя теорему Руше, нетрудно показать аналогично тому, как при доказательстве теоремы 2, что существует δ_t-окрестность U_{δ_t} точки t, в которой многочлен (2.1) имеет n различных локально абсолютно непрерывных корней $\lambda_{jt}: U_{\delta_t}(t) \to V_{\varepsilon_t}(\mu_j(t))$, $j = 1, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям $\lambda_{jt}(t) = \mu_j(t)$, $j = 1, \ldots, n$. В силу произвольности точки $t \in [t_0, A]$ получаем систему открытых множеств $\Omega = \bigcup_{t \in [t_0, A]} U_{\delta_t}(t)$, которая образует открытое покрытие отрезка $[t_0, A]$. Из этого покрытия согласно лемме Гейне – Бореля можно выделить конечное подсемейство окрестностей $U_{\delta_{t_1}}(t_1), \ldots, U_{\delta_{t_k}}(t_k)$, покрывающее $[t_0, A]$. Не ограничивая общности, можно считать, что $t_1 < t_2 < \ldots < t_k$ и никакая последующая окрестность не содержит в себе предыдущей. В окрестности $U_{\delta_{t_1}}(t_1)$, содержащей точку t_0, многочлен (5.1) имеет n различных локально абсолютно непрерывных корней $\lambda_{jt_1}: U_{\delta_{t_1}}(t_1) \to V_{\varepsilon_{t_1}}(\mu_j(t_1))$, $j = 1, \ldots, n$, а в окрестности $U_{\delta_{t_2}}$ — n различных локально абсолютно непрерывных корней $\lambda_{mt_2}: U_{\delta_{t_2}}(t_2) \to V_{\varepsilon_{t_2}}(\mu_m(t_2))$, $m = 1, \ldots, n$. Для любого фиксированного $j \in \{1, \ldots, n\}$ среди корней λ_{mt_2}, $m = 1, \ldots, n$, многочлена (2.1) найдется один и только один, который на $U_{\delta_{t_1}}(t_1) \cap U_{\delta_{t_2}}(t_2)$ совпадает с корнем λ_{jt_1}. Склеивая эти два корня, получаем локально абсолютно непрерывный на $U_{\delta_{t_1}}(t_1) \cup U_{\delta_{t_2}}(t_2)$ корень λ_{j12}, $j = 1, \ldots, n$, многочлена (2.1). Ясно, что таким образом могут быть построены n различных локально абсолютно непрерывных на $U_{\delta_{t_1}}(t_1) \cup U_{\delta_{t_2}}(t_2)$ корней λ_{j12}, $j = 1, \ldots, n$. Склеивая их теперь аналогично предыдущему последовательно с корнями, локально абсолютно непрерывными на $U_{\delta_{t_3}}(t_3), \ldots, U_{\delta_{t_k}}(t_k)$, получаем n различных локально абсолютно непрерывных на $\Omega_k = \bigcup_{i=1}^k U_{\delta_{t_i}}(t_i)$ корней λ_j, $j = 1, \ldots, n$, многочлена (2.1). Так как Ω_k — открытое покрытие отрезка $[t_0, A]$, то функции λ_j, $j = 1, \ldots, n$, являются абсолютно непрерывными на $[t_0, A]$. Отсюда ввиду произвольности выбора $A > t_0$ следует, что многочлен (2.1) при $t \geq t_0$ имеет n различных локально абсолютно непрерывных корней $\lambda_j : [t_0, +\infty[\to \mathbf{C}$, $j = 1, \ldots, n$. Все они согласно теореме 2 стремятся при $t \to +\infty$ к корням многочлена (2.3). Более того, для каждого $j \in \{1, \ldots, n\}$ в точках дифференцируемости функций c_k, $k = 1, \ldots, n$,

$$\lambda'_j(t) = -\frac{h'_t(\lambda_j(t), t)}{h'_\lambda(\lambda_j(t), t)}.$$

Из этого равенства, учитывая, что при $t \geq t_0$

$$h'_\lambda(\lambda_j(t), t) = \frac{\partial}{\partial \lambda}\left[(\lambda - \lambda_1(t)) \ldots (\lambda - \lambda_n(t))\right]\Big|_{\lambda = \lambda_j(t)} = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \left(\lambda_j(t) - \lambda_i(t)\right)$$

и

$$|D(h)(t)| = \prod_{1 \leq i < k \leq n} |\lambda_k(t) - \lambda_i(t)|^2 \leq \left|h'_\lambda(\lambda_j(t), t)\right|^2 (2(1 + C))^{(n-1)(n-2)},$$

получаем второе из соотношений (2.28). Теорема полностью доказана.

Аналогично может быть также установлена следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть* $D(h)(t) = 0$ *на промежутке* $[t_0, +\infty[\subset [a, +\infty[$ *и при* $t \geq t_0$ *многочлен* (5.1) *имеет* k *корней* $\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t)$ *постоянной кратности* $m_1, \ldots, m_k$ *соответственно. Пусть, кроме того,*

$$h(\lambda, t) = (\lambda - \mu_1(t))^{m_1 - 1} \ldots (\lambda - \mu_k(t))^{m_k - 1} g(\lambda, t)$$

и $D(g)(t) \neq 0$ *при* $t \geq t_0$. *Тогда существует* k *локально абсолютно непрерывных на* $[t_0, +\infty[$ *корней* $\lambda_1(t), \ldots, \lambda_k(t)$ *многочлена* (2.1) *постоянной кратности* $m_1, \ldots, m_k$ *соответственно, стремящихся при* $t \to +\infty$ *к корням* $\lambda_{01}, \ldots, \lambda_{0k}$ (*не обязательно различным*) *многочлена* (2.3) *и удовлетворяющих в точках дифференцируемости функций* c_p, $p = 1, \ldots, n$, *соотношениям*

$$\lambda'_j(t) = -\frac{\partial^{m_j} h(\lambda_j(t), t) / \partial t \partial \lambda^{m_j - 1}}{\partial^{m_j} h(\lambda_j(t), t) / \partial \lambda^{m_j - 1}} = O\left(\frac{\sum_{k=1}^{n - m_j + 1} |c'_k(t)|}{\sqrt{|D(g)(t)|}}\right), \quad j = 1, \ldots, k.$$

Замечание 3. Теоремы 4 и 5 могут быть так же, как и теорема 3, использованы для уточнения утверждений теоремы 2. Действительно, вычислив при каждом фиксированном $j \in \{1, \ldots, s\}$ степенные суммы s_{jm}, $m = 1, \ldots, n_j$, по формулам (2.6) получим (см. замечание 1) многочлен (2.15), корнями которого являются функции $\lambda_{jm} : [t_0, +\infty[\to \mathbf{C}$, $m = 1, \ldots, n_j$. Если $D(h_j)(t) \neq 0$ при $t \geq t_0$, то согласно теореме 4 в качестве λ_{jm}, $m = 1, \ldots, n_j$, могут быть выбраны локально абсолютно непрерывные на $[t_0, +\infty[$ функции. Если же $D(h_j)(t) = 0$ при $t \geq t_0$ и $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jk}$, $k \leq n_j$, — корни постоянной кратности $m_1, \ldots, m_k$ (соответственно) многочлена (2.15), причем

$$h_j(\lambda, t) = \left(\lambda - \lambda_{j1}(t)\right)^{m_1 - 1} \ldots \left(\lambda - \lambda_{jk}(t)\right)^{m_k - 1} g_k(\lambda, t) \quad \text{и} \quad D(g_k)(t) \neq 0$$

при $t \geq t_0$, то на основании теоремы 5 в качестве $\lambda_{j1}, \ldots, \lambda_{jk}$ могут быть выбраны локально абсолютно непрерывные на $[t_0, +\infty[$ функции.

3. Приведение некоторых матриц с почти постоянными элементами к квазижордановой нормальной форме. Предположим, что для функций $a_k, b_k : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, определенных в формулировке теоремы 1, выполняются следующие условия:

1) существуют конечные пределы

$$\lim_{t \to +\infty} a_k(t) = a_{0k}, \qquad \lim_{t \to +\infty} b_k(t) = b_{0k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{3.1}$$

2) уравнение (1.3) имеет корни $\lambda_{im}(t)$, $m = 1, \ldots, n_i$, $i = 1, \ldots, s$; $\sum_{i=1}^{s} n_i = n$, которые являются локально абсолютно непрерывными на некотором промежутке $[t_0, +\infty[\subset [a, +\infty[$ комплекснозначными функциями такими, что

$$\lim_{t \to +\infty} \lambda_{im}(t) = \lambda_i, \quad m = 1, \ldots, n_i, \quad i = 1, \ldots, s, \tag{3.2}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — корни кратности $n_1, \ldots, n_s$ (соответственно) предельного уравнения (1.2).

При этих условиях найдем для матрицы A из (1.7), характеристическим уравнением которой является (1.3), локально абсолютно непрерывную на промежутке $[t_0, +\infty[$ и невырожденную при $t \to +\infty$ матрицу $Q(t) = (q_{km}(t))_{k,m=1}^{n}$, удовлетворяющую матричному уравнению

$$Q^{-1}(t) A(t) Q(t) = \operatorname{diag}[\Lambda_1(t), \ldots, \Lambda_s(t)], \tag{3.3}$$

где

$$\Lambda_i(t) = \begin{pmatrix} \lambda_{i1}(t) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_{i2}(t) & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_{in_i}(t) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \ldots, s.$$

Матрицу, стоящую в (3.3) справа, будем называть квазижордановой нормальной формой матрицы A.

Если существует какое-либо решение $Q = G(t)$ с указанными выше свойствами матричного уравнения (3.3), то система дифференциальных уравнений (1.6) с помощью преобразования (1.9) сводится к системе линейных дифференциальных уравнений, главная матрица коэффициентов которой имеет структуру квазижордановой нормальной формы. Для такого типа систем линейных дифференциальных уравнений вопрос об асимптотике при $t \to +\infty$ всех решений исследовался в [15].

Выбор уравнения (3.3) для нахождения матрицы преобразования G, на наш взгляд, представляется наиболее естественным.

Положим

$$N_1 = 0, \quad N_i = \sum_{\nu=1}^{i-1} n_\nu, \quad i = 1, \dots, s, \tag{3.4}$$

и введем следующие функции:

$$f_1(\lambda, t) \equiv 1, \quad f_k(\lambda, t) = \prod_{j=0}^{k-2} \big(\lambda + a_j(t)\big), \quad k = 2, \dots, n; \tag{3.5}$$

$$g_{kN_i+1}(t) = f_k(\lambda_{i1}(t), t), \quad k = 1, \dots, n, \quad i = 1, \dots, s,$$

$$g_{1N_i+j}(t) = \dots = g_{j-1N_i+j}(t) = 0,$$

$$g_{kN_i+j}(t) =$$

$$= \sum_{m=j-1}^{k-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_k(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \sum_{\substack{r_2 + \dots + r_j = m-j+1 \\ r_2, \dots, r_j \in N \cup \{0\}}} [\lambda_{i2}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_2} \dots [\lambda_{ij}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_j}, \tag{3.6}$$

$$j = 2, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, s, \quad k = j, \dots, n.$$

***Замечание* 4.** Обратим внимание, что если при некотором значении $i \in \{1, \dots, s\}$

$$\lambda_{i1}(t) = \dots = \lambda_{im}(t), \quad i \in \{1, \dots, n_i\},$$

то функции g_{kN_i+j}, $k = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, m$, имеют вид

$$g_{kN_i+j}(t) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1} f_k(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^{j-1}}.$$

Теперь непосредственно займемся построением решения матричного уравнения (3.3).

Из (3.3) имеем

$$A(t)Q(t) = Q(t)\operatorname{diag}[\Lambda_1(t), \dots, \Lambda_s(t)]. \tag{3.7}$$

Зафиксировав произвольным образом число $i \in \{1, \dots, s\}$ и приравняв соответствующие элементы $(N_i + j)$-х ($j = 1, \dots, n_i$, N_i из (3.4)) столбцов матриц, стоящих в (3.7) слева и справа, получим следующие системы алгебраических уравнений для нахождения элементов $(N_i + j)$-х ($j = 1, \dots, n_i$) столбцов матрицы Q:

$$\begin{cases} [\lambda_{i1}(t) - a_{m-1}(t)] q_{mN_i+1} - q_{m+1N_i+1} = 0, & m = 1, \dots, n-1, \\ \sum\limits_{k=0}^{n-2} b_k(t) q_{k+1N_i+1} + [b_{n-1}(t) - a_{n-1}(t) - \lambda_{i1}(t)] q_{nN_i+1} = 0, & \end{cases} \tag{3.8$_1$}$$

$$\begin{cases} [\lambda_{ij}(t) + a_{m-1}(t)] q_{mN_i+j} - q_{m+1N_i+j} = -q_{mN_i+j-1}, & m = 1, \dots, n-1, \\ \sum\limits_{k=0}^{n-2} b_k(t) q_{k+1N_i+j} + [b_{n-1}(t) - a_{n-1}(t) - \lambda_{ij}(t)] q_{nN_i+j} = q_{nN_i+j-1}, & \end{cases} \tag{3.8$_j$}$$

где $j = 2, \dots, n_i$ (если $n_i > 1$).

Система (3.8$_1$) является линейной однородной системой уравнений относительно элементов q_{kN_i+1}, $k = 1, \dots, n$, $(N_i + 1)$-го столбца матрицы Q. Так как $\lambda_{i1}(t)$ — корень уравнения (1.3), то определитель матрицы коэффициентов системы (3.8$_1$) тождественно равен нулю на промежутке $[t_0, +\infty[$. Более того, минор $(n-1)$-го порядка этой матрицы, полученный вычеркиванием первого столбца и последней строки, равен $(-1)^{n-1}$.

Поэтому, полагая $q_{kN_i+1}(t) \equiv 1$, из первых $(n-1)$ уравнений системы (3.8_1) получаем ее нетривиальное решение вида

$$q_{kN_i+1}(t) = f_k(\lambda_{i1}(t), t) = g_{kN_i+1}(t), \quad k = 1, \ldots, n, \tag{3.9$_1$}$$

где f_k и g_{kN_i+1}, $k = 1, \ldots, n$, — функции из (3.5) и (3.6). Предполагая теперь, что $n_i > 1$, найдем из систем (3.8_j), $j = 2, \ldots, n_i$, элементы $(N_i + j)$-х $(j = 2, \ldots, n_i)$ столбцов матрицы Q.

Положим для каждого $j \in \{2, \ldots, n_i\}$

$$q_{1N_i+j}(t) \equiv 0, \ldots, q_{j-1N_i+j}(t) \equiv 0. \tag{3.10$_j$}$$

Тогда первые $j-2$ (если $j > 2$) уравнений системы (3.8_j) обратятся в тождества, а из $(j-1)$-го, … , $(n-1)$-го ее уравнений получим

$$q_{kN_i+j}(t) = q_{k-1N_i+j-1}(t) + \left[\lambda_{ij}(t) + a_{k-2}(t)\right] q_{k-1N_i+j}(t), \quad k = j, \ldots, n. \tag{3.11$_j$}$$

При этом последнее уравнение системы (3.8_j) в силу (3.10_j) принимает вид

$$\sum_{k=j-1}^{n-1} b_k(t) q_{k+1N_i+j} - \left[\lambda_{ij}(t) + a_{n-1}(t)\right] q_{nN_i+j} = q_{nN_i+j-1}. \tag{3.12$_j$}$$

Рекуррентные соотношения (3.11_j), $j = 2, \ldots, n_i$, с учетом (3.10_j) и (3.9_1) однозначно определяют локально абсолютно непрерывные на $[t_0, +\infty[$ функции q_{kN_i+j}, $j = 2, \ldots, n_i$, $k = j, \ldots, n$. Остается лишь получить явный вид этих функций и показать, что они удовлетворяют соотношениям (3.12_j), $j = 2, \ldots, n_i$.

Лемма 1. *Если $n_i > 1$, то функции q_{kN_i+j}, $j = 2, \ldots, n_i$, $k = j, \ldots, n$, определяемые рекуррентными соотношениями (3.11_j), (3.10_j) и (3.9_1), представимы в виде*

$$q_{kN_i+j}(t) = q_{kN_i+j}(t), \tag{3.13$_{kj}$}$$

где q_{kN_i+j}, $k = j, \ldots, n$, $j = 2, \ldots, n_i$, — функции из (3.6).

Доказательство. Прежде всего заметим, что согласно (3.5) для любого $k \in \{1, \ldots, n-1\}$

$$f_{k+1}(\lambda, t) = \left[\lambda + a_{k-1}(t)\right] f_k(\lambda, t), \qquad \frac{\partial^k f_{k+1}(\lambda, t)}{\partial \lambda^k} = k!,$$
$$\frac{\partial^m f_{k+1}(\lambda, t)}{\partial \lambda^m} = m \frac{\partial^{m-1} f_k(\lambda, t)}{\partial \lambda^{m-1}} + \left[\lambda + a_{k-1}(t)\right] \frac{\partial^m f_k(\lambda, t)}{\partial \lambda^m}, \tag{3.14}$$
$$m = 1, \ldots, k-1.$$

Представления (3.13_{kj}) установим индукцией по j. Для этого сначала докажем, учитывая (3.6), что при любом $k \in \{2, \ldots, n\}$

$$q_{kN_i+2}(t) = \sum_{m=1}^{k-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_k(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \left[\lambda_{i2}(t) + \lambda_{i1}(t)\right]^{m-1}. \tag{3.13$_{k2}$}$$

Доказательство проведем индукцией по k. При $k = 2$ в силу (3.11_2), (3.10_2), (3.9_1), (3.5) и (3.14) имеем

$$q_{2N_i+2}(t) = q_{1N_i+1}(t) = f_1(\lambda_{i1}(t),t) = 1 = \frac{\partial f_2(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda}.$$

Следовательно, при $k=2$ формула (3.13_{k2}) справедлива. Более того, если $n = 2$, то и лемма установлена.

Далее, если $n>2$, то предположим, что формула (3.13_{k2}) справедлива при $k=l$, где $l\in\{2,\ldots,n-1\}$, и докажем ее справедливость при $k=l+1$. Из (3.11_2) с учетом (3.9_1) и предположения индукции находим

$$q_{l+1N_i+2}(t) = q_{lN_i+1}(t) + \big[\lambda_{i2}+a_{l-1}(t)\big]q_{lN_i+2}(t) =$$

$$= q_{lN_i+1}(t) + \big[\lambda_{i1}(t)+a_{l-1}(t)\big]q_{lN_i+2}(t) + \big[\lambda_{i2}(t)+\lambda_{i1}(t)\big]q_{lN_i+2}(t) =$$

$$= f_l(\lambda_{i1}(t),t) + \big[\lambda_{i1}(t)+a_{l-1}(t)\big]\sum_{m=1}^{k-1}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\big[\lambda_{i2}(t)-\lambda_{i1}(t)\big]^{m-1} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{l-1}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\big[\lambda_{i2}(t)-\lambda_{i1}(t)\big]^m =$$

$$= f_l(\lambda_{i1}(t),t) + \big[\lambda_{i1}(t)+a_{l-1}(t)\big]\frac{\partial f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda} +$$

$$+ \sum_{m=2}^{l-1}\left[\frac{\lambda_{i1}(t)+a_{l-1}(t)}{m!}\frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m} + \frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^{m-1}}\right]\times$$

$$\times\big[\lambda_{i2}(t)+\lambda_{i1}(t)\big]^{m-1} + \frac{1}{(l-1)!}\frac{\partial^{l-1} f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^{l-1}}\big[\lambda_{i2}(t)+\lambda_{i1}(t)\big]^{l-1}.$$

Отсюда согласно (3.14) получаем

$$q_{l+1N_i+2}(t) = \frac{\partial f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda} + \sum_{m=2}^{l-1}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\big[\lambda_{i2}(t)-\lambda_{i1}(t)\big]^{m-1} +$$

$$+ \frac{1}{l!}\frac{\partial^l f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^l}\big[\lambda_{i2}(t)-\lambda_{i1}(t)\big]^{l-1} =$$

$$= \sum_{m=1}^{l}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\big[\lambda_{i2}(t)-\lambda_{i1}(t)\big]^{m-1},$$

т. е. имеет место представление (3.13_{l+12}). Значит, в силу метода математической индукции формула (3.13_{k2}) справедлива при всех $k\in\{2,\ldots,n\}$. Более того, если $n_i=2$, то лемма установлена.

Допустим теперь, что в случае $n_i>2$ при $k=j-1,\ldots,n$ имеет место формула (3.13_{kj-1}), где $j\in\{3,\ldots,n_i\}$ и докажем справедливость формул (3.13_{kj}) при $k=j,\ldots,n$. Доказательство опять проведем индукцией по k.

При $k=j$ ввиду (3.11_j), (3.10_j), (3.13_{j-1j-1}), (3.6) и (3.14) получаем

$$q_{jN_i+j}(t) = q_{j-1N_i+j-1}(t) = q_{j-1N_i+j-1}(t) = \frac{1}{(j-2)!}\frac{\partial^{j-2} f_{j-1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^{j-2}} =$$

$$= 1 = \frac{1}{(j-1)!}\frac{\partial^{j-1} f_j(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^{j-1}} = q_{jN_i+j}(t).$$

Следовательно, при $k=j$ формула (3.13_{kj}) имеет место. Далее, предполагая, что она имеет место при $k=l$, где $l\in\{j,\ldots,n-1\}$, установим ее справедливость при $k=l+1$. Из (3.11_j) с учетом (3.13_{lj-1}), (3.13_{lj}) и (3.6) находим

$$q_{l+1N_i+j}(t) = q_{lN_i+j-1}(t) + \left[\lambda_{ij} + a_{l-1}(t)\right] q_{lN_i+j}(t) =$$

$$= \sum_{m=j-2}^{l-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}=m-j+2} \prod_{k=2}^{j-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} +$$

$$+ [\lambda_{i1}(t) + a_{l-1}(t)] \sum_{m=j-1}^{l-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1} \prod_{k=2}^{j} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} +$$

$$+ \left[\lambda_{ij}(t) - \lambda_{i1}(t)\right] \sum_{m=j-1}^{l-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1} \prod_{k=2}^{j} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k}.$$

Замечая, что

$$\sum_{m=j-1}^{l-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1} \prod_{k=2}^{j} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} =$$

$$= \sum_{m=j-1}^{l-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}=m-j+1} \prod_{k=2}^{j-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} +$$

$$+ \left[\lambda_{ij}(t) - \lambda_{i1}(t)\right] \sum_{m=j}^{l-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j} \prod_{k=2}^{j} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k},$$

записываем последнее равенство в виде

$$q_{l+1N_i+j}(t) = \sum_{m=j-1}^{l-1} \left[\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^{m-1}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda_{i1}(t) + a_{l-1}(t)}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \right] \sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}=m-j+1} \prod_{k=2}^{j-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} +$$

$$+ \frac{1}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1} f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^{l-1}} \sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}=l-j+1} \prod_{k=2}^{j-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} +$$

$$+ \sum_{m=j}^{l-1} \left(\frac{1}{(m-1)!} \frac{\partial^{m-1} f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^{m-1}} + \frac{\lambda_{i1}(t) + a_{l-1}(t)}{m!} \frac{\partial^m f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \right) \times$$

$$\times \left[\lambda_{ij}(t) - \lambda_{i1}(t)\right] \sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j} \prod_{k=2}^{j} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} +$$

$$+ \frac{1}{(l-1)!} \frac{\partial^{l-1} f_l(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^{l-1}} \left[\lambda_{ij} - \lambda_{i1}(t)\right] \sum_{r_2+\ldots+r_j=l-j} \prod_{k=2}^{j} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k}.$$

Отсюда с учетом (3.14) и (3.6) получаем

$$q_{l+1N_i+j}(t) = \sum_{m=j-1}^{l-1} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}=m-j+1} \prod_{k=2}^{j-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} +$$

$$+\sum_{m=j}^{l-1}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\left[\lambda_{ij}(t)-\lambda_{i1}(t)\right]\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j}\prod_{k=2}^{j}\left[\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\right]^{r_k}+$$

$$+\frac{1}{l!}\frac{\partial^l f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^l}\sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}=l-j+1}\prod_{k=2}^{j-1}\left[\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\right]^{r_k}+$$

$$+\frac{1}{l!}\frac{\partial^l f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^l}\left[\lambda_{ij}(t)-\lambda_{i1}(t)\right]\sum_{r_2+\ldots+r_j=l-j}\prod_{k=2}^{j}\left[\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\right]^{r_k}=$$

$$=\sum_{m=j-1}^{l}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_{l+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}\left[\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\right]^{r_k}=$$

$$=g_{l+1N_i+j}(t).$$

Таким образом, формула (3.13_{kj}) имеет место при $k=l+1$. Поэтому согласно методу математической индукции она справедлива при всех $k\in\{j,\ldots,n\}$. В силу индукции по j формула (3.13_{kj}) имеет место при всех $j\in\{2,\ldots,n_i\}$ и $k\in\{j,\ldots,n\}$. Лемма доказана.

Лемма 2. *Если* $n_i>1$, *то функции вида* (3.13_{kj}), $j=2,\ldots,n_i$, $k=j,\ldots,n$, *удовлетворяют на промежутке* $[t_0,+\infty[$ *соотношениям* (3.12_{kj}), $j=2,\ldots,n_i$.

Доказательство. Используя обозначения (3.5), введем многочлен

$$h(\lambda,t)=\sum_{k=0}^{n-1}b_k(t)f_{k+1}(\lambda,t)-\left[\lambda+a_{n-1}(t)\right]f_n(\lambda,t).\tag{3.15}$$

Согласно условиям на функции a_k, b_k, $k=0,1,\ldots,n-1$, этот многочлен имеет локально абсолютно непрерывные на промежутке $[t_0,+\infty[$ корни λ_{im}, $m=1,\ldots,n_i$, $i=1,\ldots,s$, со свойствами (3.2).

Покажем, что для данного фиксированного $i\in\{1,\ldots,s\}$ при любом $j\in\{2,\ldots,n_i\}$

$$h(\lambda,t)=\left[\lambda-\lambda_{i1}(t)\right]\ldots\left[\lambda-\lambda_{ij-1}(t)\right]h_j(\lambda,t),\tag{3.16_j}$$

где

$$h_j(\lambda,t)=$$

$$=\sum_{m=j-1}^{n}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}+q=m-j+1}\prod_{k=2}^{j-1}\left[\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\right]^{r_k}\left[\lambda-\lambda_{i1}(t)\right]^q.\tag{3.17_j}$$

Разлагая многочлен $h(\lambda,t)$ по степеням $\lambda-\lambda_{i1}(t)$ и учитывая, что $\lambda_{i1}\colon[t_0,+\infty[\,\to\mathbf{C}$ — корень $h(\lambda,t)$, получаем

$$h(\lambda,t)=\left[\lambda-\lambda_{i1}(t)\right]\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\left[\lambda-\lambda_{i1}(t)\right]^{m-1}=$$

$$=\left[\lambda-\lambda_{i1}(t)\right]h_2(\lambda,t)\quad\text{при}\quad t\ge t_0.$$

Следовательно, при $j=2$ формула (3.16_j) справедлива. Более того, она установлена при всех $j\in\{2,\ldots,n_i\}$, если $n_i=2$.

Теперь предположим, что в случае $n_i > 2$ формула (3.16_j) имеет место при $j = l$, где $l \in \{2, \ldots, n_i - 1\}$, и докажем ее справедливость при $j = l + 1$. В силу предположения индукции и (3.17_l) имеем

$$h(\lambda, t) = [\lambda - \lambda_{i1}(t)] \ldots [\lambda - \lambda_{il-1}(t)] \times$$

$$\times \left(\sum_{m=l-1}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2 + \ldots + r_{l-1} = m - l + 1} \prod_{k=2}^{l-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} + \right.$$

$$\left. + \sum_{m=l}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2 + \ldots + r_{l-1} + q = m - l} \prod_{k=2}^{l-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} [\lambda - \lambda_{i1}(t)]^{q+1} \right). \tag{3.18}$$

Так как многочлен $h(\lambda, t)$ имеет корни $\lambda_{im} \colon [t_0, +\infty[\to \mathbf{C}$, $m = 1, \ldots, n_i$, то $\lambda_{il}(t)$ является корнем многочлена, стоящего в круглых скобках формулы (3.18). Поэтому

$$\sum_{m=l-1}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2 + \ldots + r_{l-1} = m - l + 1} \prod_{k=2}^{l-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} =$$

$$= - \sum_{m=l}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \sum_{r_2 + \ldots + r_{l-1} + q = m - l} \prod_{k=2}^{l-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} [\lambda_{il}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{q+1}$$

$$\text{при} \quad t \ge t_0.$$

Учитывая это соотношение, из (3.18) находим

$$h(\lambda, t) = [\lambda - \lambda_{i1}(t)] \ldots [\lambda - \lambda_{il-1}(t)] \sum_{m=l}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \times$$

$$\times \sum_{r_2 + \ldots + r_{l-1} + q = m - l} \prod_{k=2}^{l-1} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} \left([\lambda - \lambda_{i1}(t)]^{q+1} - [\lambda_{il}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{q+1} \right) =$$

$$= [\lambda - \lambda_{i1}(t)] \ldots [\lambda - \lambda_{il}(t)] \sum_{m=l}^{n} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m h(\lambda_{i1}(t), t)}{\partial \lambda^m} \times$$

$$\times \sum_{r_2 + \ldots + r_l + q = m - l} \prod_{k=2}^{l} [\lambda_{ik}(t) - \lambda_{i1}(t)]^{r_k} [\lambda - \lambda_{i1}(t)]^{q} =$$

$$= [\lambda - \lambda_{i1}(t)] \ldots [\lambda - \lambda_{il}(t)] h_{l+1}(\lambda, t) \quad \text{при} \quad t \ge t_0.$$

Следовательно, представление (3.16_j) имеет место и при $j = l + 1$.

Значит, согласно методу математической индукции формула (3.16_j) справедлива при всех $j \in \{2, \ldots, n_i\}$.

Далее, используя представления (3.16_j), $j = 1, \ldots, n_i$, докажем, что функции q_{kN_i+j}, $k = j, \ldots, n$, $j = 2, \ldots, n_i$, определяемые формулами (3.13_{kj}), удовлетворяют на промежутке $[t_0, +\infty[$ соотношениям (3.12_j), $j = 2, \ldots, n_i$.

Так как многочлен $h(\lambda, t)$ имеет корни $\lambda_{im} \colon [t_0, +\infty[\to \mathbf{C}$, $m = 1, \ldots, n_i$, то для каждого $j \in \{2, \ldots, n_i\}$ в силу (5.42_j)

$$h_j\left(\lambda_{ij}(t), t\right) = 0 \quad \text{при} \quad t \ge t_0. \tag{3.19}$$

С другой стороны, из (3.17_j) согласно (3.15), (3.14) и (3.5) имеем

$$h_j(\lambda_{ij}(t),t) = \sum_{m=j-1}^{n}\frac{1}{m!}\left(\sum_{k=0}^{n-1} b_k(t)\frac{\partial^m f_{k+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m} - m\frac{\partial^{m-1} f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^{m-1}} -\right.$$

$$\left.-\,[\,\lambda_{i1}(t)+a_{n-1}(t)\,]\frac{\partial^m f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\right)\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k} =$$

$$= \sum_{k=j-1}^{n-1} b_k(t)\sum_{m=j-1}^{n}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_{k+1}(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k} -$$

$$-\left[\,\lambda_{ij}(t)+a_{n-1}(t)\,\right]\sum_{m=j-1}^{n}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k} -$$

$$-\sum_{m=j-1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^{m-1}}\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k} +$$

$$+\left[\,\lambda_{ij}(t)-\lambda_{i1}(t)\,\right]\sum_{m=j-1}^{n-1}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k}$$

$$\text{при}\quad t\ge t_0.$$

Отсюда, учитывая, что

$$\sum_{m=j-1}^{n}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\partial^{m-1} f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^{m-1}}\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k} =$$

$$= \sum_{m=j-2}^{n-1}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\sum_{r_2+\ldots+r_{j-1}=m-j+2}\prod_{k=2}^{j-1}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k} +^*$$

$$+\left[\,\lambda_{ij}(t)-\lambda_{i1}(t)\,\right]\sum_{m=j-1}^{n-1}\frac{1}{m!}\frac{\partial^m f_n(\lambda_{i1}(t),t)}{\partial\lambda^m}\sum_{r_2+\ldots+r_j=m-j+1}\prod_{k=2}^{j}[\,\lambda_{ik}(t)-\lambda_{i1}(t)\,]^{r_k}$$

и принимая во внимание формулы (3.6), получаем

$$h_j\left(\lambda_{ij}(t),t\right) = \sum_{k=j-1}^{n-1} b_k(t) g_{k+1N_i+j}(t) -$$

$$-\left[\,\lambda_{ij}(t)+a_{n-1}(t)\,\right]g_{nN_i+j}(t) - g_{nN_i+j-1}(t) \quad \text{при} \quad t\ge t_0.$$

Ввиду этого представления и (3.19) функции g_{kN_i+j}, $k=j,\ldots,n$, $j=2,\ldots,n_i$, определяемые формулами (3.13_{kj}), удовлетворяют на промежутке $[\,t_0,+\infty[$ соотношениям (3.12_j), $j=2,\ldots,n_i$. Лемма доказана.

Из изложенного выше ясно, что при каждом фиксированном $i\in\{1,\ldots,s\}$ функции

$$q_{kN_i+j}(t) = q_{kN_i+j}(t), \quad k=1,\ldots,n, \quad j=1,\ldots,n_i,$$

---

* При $j=2$ в этой строке стоит $f_n(\lambda_{i1}(t),t)$.

где q_{kN_i+j} определены формулами (3.6), удовлетворяют на $[t_0, +\infty[$ системе уравнений (3.8$_j$), $j = 1, \ldots, n_i$. Эти функции согласно (3.6) и условиям на a_k, b_k, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, являются локально абсолютно непрерывными на промежутке $[t_0, +\infty[$ и имеют свойства:

$$q_{jN_i+j}(t) \equiv 1, \qquad g_{kN_i+j}(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, j-1 \quad (\text{если } j > 1),$$
$$\lim_{t \to +\infty} g_{kN_i+j}(t) = \frac{1}{(j-1)!} \frac{\partial^{j-1} f_k(\lambda_i, +\infty)}{\partial \lambda^{j-1}} \quad \text{при} \quad k = j+1, \ldots, n, \tag{3.20}$$

где

$$f_1(\lambda, +\infty) \equiv 1, \qquad f_k(\lambda, +\infty) \equiv \prod_{m=0}^{k-2} (\lambda + a_{0j}), \qquad k = 2, \ldots, n.$$

Таким образом, для каждого фиксированного $i \in \{1, \ldots, s\}$ найдены при любом $j \in \{1, \ldots, n_i\}$ элементы q_{kN_i+j}, $k = 1, \ldots, n$, $(N_i + j)$-го столбца матрицы Q, удовлетворяющей матричному уравнению (3.7).

В силу произвольности выбора $i \in \{1, \ldots, s\}$ для матричного уравнения (3.7) получено локально абсолютно непрерывное на $[t_0, +\infty[$ решение

$$Q = G(t), \quad G(t) = (G_1(t), \ldots, G_s(t)), \tag{3.21}$$

$$G_i(t) = \begin{pmatrix} g_{1N_i+1}(t) & \ldots & g_{1N_i+n_i}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{nN_i+1}(t) & \ldots & g_{nN_i+n_i}(t) \end{pmatrix}, \quad k = 1, \ldots, s. \tag{3.22}$$

Согласно (3.20)

$$\lim_{t \to +\infty} G(t) = (G_{01}, \ldots, G_{0s}),$$

где

$$G_{0i} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ f_2(\lambda_i, +\infty) & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ f_3(\lambda_i, +\infty) & \frac{\partial f_3(\lambda_i, +\infty)}{\partial \lambda} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n_i}(\lambda_i, +\infty) & \frac{\partial f_{n_i}(\lambda_i, +\infty)}{\partial \lambda} & \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f_{n_i}(\lambda_i, +\infty)}{\partial \lambda^2} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_n(\lambda_i, +\infty) & \frac{\partial f_n(\lambda_i, +\infty)}{\partial \lambda} & \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f_n(\lambda_i, +\infty)}{\partial \lambda^2} & \ldots & \frac{1}{n_i!}\frac{\partial^{n_i} f_n(\lambda_i, +\infty)}{\partial \lambda^{n_i}} \end{pmatrix},$$

$$i = 1, \ldots, s.$$

Учитывая структуру матриц G_{0i}, $i = 1, \ldots, s$, с помощью метода, изложенного в монографии Ф. Хартмана [16, с. 654], нетрудно доказать, что

$$\lim_{t \to +\infty} \det G(t) = \prod_{k=1}^{s-1} \prod_{j=k+1}^{s} (\lambda_j - \lambda_k)^{n_j n_k} \neq 0. \tag{3.23}$$

Следовательно, матрица $Q = G(t)$ невырождена на некотором промежутке $[t_1, +\infty[\subset [t_0, +\infty[$ и поэтому удовлетворяет на нем матричному уравнению (3.3). Более того, ясно, что G^{-1} является локально абсолютно непрерывной матрицей на промежутке $[t_1, +\infty[$ и имеет конечный предел при $t \to +\infty$.

Итак, в результате проведенного выше исследования установлена следующая теорема.

Теорема 6. *Пусть* $a_k, b_k : [a, +\infty[\to \mathbf{R}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, *— локально абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие условиям* 1 *и* 2, *приведенным в начале пункта. Тогда блочная матрица* $G(t) = (G_1(t), \ldots, G_s(t))$, *где* G_i, $i = 1, \ldots, s$, *из* (3.22), *элементы которой являются локально абсолютно непрерывными на промежутке* $[t_0, +\infty[$ *функциями, имеющими конечные пределы при* $t \to +\infty$, *удовлетворяет на некотором промежутке* $[t_1, +\infty[\subset [t_0, +\infty[$ *матричному уравнению* (3.3) *и условию* $\lim_{t \to +\infty} \det G(t) \neq 0$.

1. *Кигурадзе И. Т., Чантурия Т. А.* Асимптотические свойства решений неавтономных обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1990. – 430 с.
2. *Кигурадзе И. Т.* Об асимптотическом представлении решений линейных дифференциальных уравнений // Тр. Тбилис. ун-та. – 1964. – **102**. – С. 149–167.
3. *Matell M.* Asymptotic Eigenschaften gewisser linearer Differential-gleichungen. – Uppsala, 1924. – Appelbergs Boktryckeri Actiobolag. – 67 s.
4. *Levinson N.* The asymptotic nature of solutions of linear systems of differential equations // Duke Math. J. – 1948. – **15**. – P. 111–126.
5. *Коддингтон Э. Л., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – Изд-во иностр. лит., 1958. – 474 с.
6. *Шкиль Н. И.* Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения // Изв. вузов. Математика. – 1964. – **2** (39). – С. 176–185.
7. *Devinatz A.* The asymptotic natur of the solutions of certain linear systems of differential equations // Pacific. J. Math. – 1965. – **15**. – P. 75–83.
8. *Шкиль Н. И.* Приведение систем линейных дифференциальных уравнений к обобщенному *L*-диагональному виду // Дифференц. уравнения. – 1966. – **2**, № 11. – С. 1436–1443.
9. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – К.: Вища шк., 1971. – 226 с.
10. *Devinatz A.* An asymptotic theorem of systems of linear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. – 1971. – **160**. – P. 353–363.
11. *Devinatz A., Kaplan J. I.* Asymptotic estimates for solutions of linear systems of ordinary differential equations having multiple characteristic roots // Indiana Univ. Math. J. – 1972. – **22**, № 4. – P. 355–366.
12. *Привалов В. С.* Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1977. – 444 с.
13. *Мишина А. П., Проскуряков И. В.* Высшая алгебра. Линейная алгебра, многочлены, общая алгебра. – М.: Наука, 1965. – 300 с.
14. *Кострикин А. И.* Введение в алгебру. – М.: Наука, 1977. – 495 с.
15. *Евтухов В. М.* Асимптотическое интегрирование некоторых классов линейных дифференциальных уравнений // Нелинейн. колебания. – 2000. – **3**, № 3. – С. 334–357.
16. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1970. – 720 с.

Получено 31.01.2001