УДК 517.5

К. М. Жигалло, Ю. І. Харкевич (Волин. ун-т, Луцьк)

ПОВНА АСИМПТОТИКА ВІДХИЛЕННЯ ВІД КЛАСУ ДИФЕРЕНЦІЙОВНИХ ФУНКЦІЙ МНОЖИНИ ЇХ ГАРМОНІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ПУАССОНА

In a class of differentiable functions W^r and a class of their conjugate functions $\overline{W}^r$, we obtain the total asymptotic decomposition of quantities $\mathscr{E}(\mathfrak{N}, A_\rho)_C$ which are upper bounds of deviations of the Poisson harmonic integrals of considered functions.

Отримано повний асимптотичний розклад величин $\mathscr{E}(\mathfrak{N}, A_\rho)_C$ — верхніх меж відхилень, на класі диференційовних функцій W^r та класі $\overline{W}^r$ спряжених до них, їх гармонійних інтегралів Пуассона.

1. Постановка задачі та деякі допоміжні твердження. Нехай W^r, $r \in N$, множина 2π-періодичних функцій, які мають абсолютно неперервні похідні до $(r-1)$-го порядку включно, а $\operatorname*{ess\,sup}\limits_{x \in R} |f^r(x)| \le 1$; $\overline{W}^r$ — клас функцій, спряжених до функцій із класу W^r, тобто

$$\overline{W}^r = \left\{ \bar{f} : \bar{f}(x) := \pm \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\pm\pi}^{\pi} f(x+t) \operatorname{ctg} \frac{t}{2} dt, \ f \in W^r \right\}.$$

Для 2π-періодичної сумовної на періоді функції f через $A_\rho(f, x)$ і $\overline{A}_\rho(f, x)$ будемо позначати відповідно гармонійний і спряжений гармонійний інтеграли Пуассона, тобто

$$A_\rho(f, x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pm\pi}^{\pi} f(x+t) P(\rho, t) dt, \quad 0 \le \rho < 1,$$

де

$$P(\rho, t) = \frac{1}{2} \frac{1 \pm \rho^2}{1 \pm 2\rho \cos t + \rho^2} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \cos kt$$

— ядро Пуассона, і

$$\overline{A}_\rho(f, x) = A_\rho(\bar{f}, x) = \pm \frac{1}{\pi} \int\limits_{\pm\pi}^{\pi} f(x+t) Q(\rho, t) dt, \tag{1}$$

де

$$Q(\rho, t) = \frac{\rho \sin t}{1 \pm 2\rho \cos t + \rho^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \rho^k \sin kt \tag{2}$$

— спряжене ядро Пуассона.

Відомо (див., наприклад, [1], гл. 1), що коли f неперервна на R, тоді для будь-якого $x \in R$: $\lim\limits_{\rho \to 1\pm} \overline{A}_\rho(f; x) = \bar{f}(x)$.

У даній роботі вивчається поведінка величини

$$\mathscr{E}(\mathfrak{N}, A_\rho)_C = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \| f(x) \pm A_\rho(f, x) \|_C$$

при $\rho \to 1-$ у випадках $\mathfrak{N} \equiv W^r$ і $\mathfrak{N} \equiv \overline{W}^r$ (тут $\|f\|_C = \max\limits_{x \in R} |f(x)|$).

$$b_i^j \;=\; \begin{cases} 0, & i > j, \\ (\pm 1)^j (j \pm 1)!, & i = 1, \\ b_{i\pm 1}^{j\pm 1} \pm b_i^{j\pm 1}(j \pm 1), & i \le j \le n, \\ b_{i\pm 1}^{j\pm 1} \pm b_i^{j\pm 1}(j \pm 2), & n+1 = i \le j, \\ \pm 2(i \pm n \pm 1) b_{i\pm 1}^{j\pm 1} \pm b_i^{j\pm 1}(j \pm 2i + 2n), & n+1 < i \le j. \end{cases} \tag{21}$$

Доведення. У повному асимптотичному розкладі функції $\psi_n(\rho)$ у вигляді

$$\psi_n(\rho) \;\cong\; \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k^n (1 \pm \rho)^k$$

коефіцієнти γ_k^n необхідно пов'язані з функцією $\psi_n(\rho)$ співвідношеннями

$$\gamma_k^n \;=:\; \lim_{r \to 1\pm} \frac{1}{(1 \pm \rho)^k} \left\{ \psi_n(\rho) \pm \sum_{j=1}^{k\pm 1} \gamma_j^n (1 \pm \rho)^j \right\}. \tag{22}$$

Отже, для доведення леми 2 достатньо лише показати, що γ_k^n, знайдені з (22), мають вигляд (20).

Застосовуючи правило Лопіталя k разів до невизначеностей вигляду $0/0$ і враховуючи, що

$$\frac{d^k \psi_n(\rho)}{d\rho^k} \;=\; \frac{b_1^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \int_0^{t_{n\pm 1}} \cdots \int_0^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 \ldots t_{n\pm 1}} dt_1 \ldots dt_{n\pm 1} \;+$$

$$+\; \frac{b_2^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \int_0^{t_{n\pm 2}} \cdots \int_0^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 \ldots t_{n\pm 2}} dt_1 \ldots dt_{n\pm 2} + \ldots + \frac{b_{n\pm 1}^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1} dt_1 \;+$$

$$+\; \frac{b_n^k}{\rho^k} \operatorname{arctg} \rho + \frac{b_{n+1}^k}{\rho^{k\pm 1}} \frac{1}{1+\rho^2} + \frac{b_{n+2}^k}{\rho^{k\pm 2}} \frac{1}{(1+\rho^2)^2} + \ldots + \frac{b_k^k}{\rho^{k\pm 2(k\pm n)+1}} \frac{1}{(1+\rho^2)^{k\pm n}},$$

де через b_i^k, $i = \overline{1,k}$, позначено коефіцієнти, що визначаються послідовно за рекурентними формулами (21), отримуємо

$$\gamma_k^n \;=\; \lim_{\rho \to 1\pm} \frac{1}{(\pm 1)^k (k)!} \left\{ \frac{b_1^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \int_0^{t_{n\pm 1}} \cdots \int_0^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 \ldots t_{n\pm 1}} dt_1 \ldots dt_{n\pm 1} \;+\right.$$

$$+\; \frac{b_2^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \int_0^{t_{n\pm 2}} \cdots \int_0^{t_2} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1 \ldots t_{n\pm 2}} dt_1 \ldots dt_{n\pm 2} + \ldots + \frac{b_{n\pm 1}^k}{\rho^k} \int_0^{\rho} \frac{\operatorname{arctg} t_1}{t_1} dt_1 \;+$$

$$\left. +\; \frac{b_n^k}{\rho^k} \operatorname{arctg} r + \frac{b_{n+1}^k}{\rho^{k\pm 1}} \frac{1}{1+\rho^2} + \frac{b_{n+2}^k}{\rho^{k\pm 2}} \frac{1}{(1+\rho^2)^2} + \frac{b_k^k}{\rho^{k\pm 2(k\pm n)+1}} \frac{1}{(1+\rho^2)^{k\pm n}} \right\}.$$

Лему 2 доведено.

2. Основні результати для класів $\overline{W}^r$.

Теорема 1. *Якщо* $r = 2l$, $l \in N$, *то має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C \;\cong\; \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \alpha_k^r (1 \pm \rho)^k \ln \frac{1}{1 \pm r} + \beta_k^r (1 \pm \rho)^k \right\}, \tag{23}$$

де коефіцієнти α_k^r *та* β_k^r *обчислюються за допомогою формул* (10) – (12).

Доведення. Враховуючи (1), (2), можна записати

$$\bar{f}(x) - A_\rho(\bar{f}, x) = \pm\frac{1}{\pi}\int_{\pm\pi}^{\pi} f(t+x)\left\{\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{t}{2} \pm \sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \sin kt\right\}dt.$$

Звідси, в результаті r-кратного інтегрування за частинами, отримуємо

$$\bar{f}(x) - A_\rho(\bar{f}, x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pm\pi}^{\pi} f^{(r)}(t+x)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\pm\rho^k}{k^r}\cos\left[kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right]dt.$$

Тому

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^r}\left|\int_{\pm\pi}^{\pi} f^{(r)}(t)\overline{F}_{r,\rho}(t)\,dt\right|,$$

де

$$\overline{F}_{r,\rho}(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\pm\rho^k}{k^r}\cos\left(kt + \frac{(r+1)\pi}{2}\right).$$

Оскільки $f\in W^r$, $F_{r,\rho}(t)$ непарна при $r = 2l$, $l\in N$, то

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\overline{F}_{r,\rho}(t)|\,dt.$$

З іншого боку, якщо $\operatorname{sign}\overline{F}_{r,\rho}(t) = \pm\operatorname{sign}\sin t$, то функція f така, що

$$f^{(r)}(t) = \operatorname{sign}(\overline{F}_{r,\rho}(t)), \quad t\in[-\pi,\pi],$$

неперервно і періодично продовжується на R і належить до класу W^r [7, с. 104 – 106]. А отже, при $r = 2l$, $l\in N$

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C \ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\overline{F}_{r,\rho}(t)|\,dt$$

і, таким чином,

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}|\overline{F}_{r,\rho}(t)|\,dt = \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi}\overline{F}_{r,\rho}(t)\,dt\right|. \tag{24}$$

Знакозмінність функції $\overline{F}_{r,\rho}(t)$ при $r = 2l$, $l\in N$ на $(0,\pi)$ (тобто $\operatorname{sign}\overline{F}_{r,\rho}(t) = \pm\operatorname{sign}\sin t$) випливає з наступних міркувань.

Очевидно, що при $r = 2l$, $l\in N$ $\overline{F}_{r,\rho}(0) = \overline{F}_{r,\rho}(\pi) = 0$. А отже, в припущенні, що $\overline{F}_{r,\rho}(t) = 0$ ще при деякому $t_0\in(0,\pi)$, згідно з теоремою Ролля існують $t_0^{(1)}\in(0,t_0)$, $t_0^{(2)}\in(t_0,\pi)$ такі, що $\overline{F}'_{r,\rho}(t_0^{(1)}) = \overline{F}'_{r,\rho}(t_0^{(2)}) = 0$, звідки

$$\overline{F}_{r\pm1,\rho}(t_0^{(1)}) = \overline{F}_{r\pm1,\rho}(t_0^{(2)}) = 0$$

і як наслідок існує $t_1\in(t_0^1, t_0^2)$ таке, що $\overline{F}'_{r\pm1,\rho}(t_1) = 0$, тобто $\overline{F}_{r\pm2,\rho}(t_1) = 0$. А отже, аналогічно попередньому, знайдуться $t_1^{(1)}\in(0,t_1)$, $t_1^{(2)}\in(t_1,\pi)$ такі, що

$$\overline{F}_{r\pm3,\rho}(t_1^{(1)}) = \overline{F}_{r\pm3,\rho}(t_1^{(2)}) = 0$$

і так далі. Повторюючи вказану процедуру необхідну кількість разів, приходимо до висновку, що при вихідному припущенні для функції

$$\overline{F}_{1,\rho}(t) = \pm\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1\pm\rho^k}{k}\cos kt$$

існують $t_{l\pm1}^{(1)}, t_{l\pm1}^{(2)} \in (0,\pi)$, $t_{l\pm1}^{(1)} \neq t_{l\pm1}^{(2)}$ такі, що

$$\overline{F}_{1,\rho}(t_{l\pm1}^{(1)}) = \overline{F}_{1,\rho}(t_{l\pm1}^{(2)}) = 0.$$

Але це суперечить тому, що згідно з співвідношеннями (1.441.2), (1.448.2) з [8] функцію $\overline{F}_{1,\rho}(t)$ можна подати у вигляді

$$\overline{F}_{1,\rho}(t) = \frac{1}{2}\ln\frac{2(1\pm\cos t)}{1\pm2\rho\cos t+\rho^2}, \quad t\in(0,\pi),$$

і легко перевірити, що на інтервалі $(0,\pi)$ рівняння $\overline{F}_{1,\rho}(t) = 0$ має лише один корінь.

Таким чином, виходячи із співвідношення (24), при $r = 2l$, $l\in N$ одержуємо

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\pm\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Звідси, враховуючи, що [5]

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1\pm\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}} = \varphi_n(\rho),$$

де $\varphi_n(\rho)$ — функція, визначена формулою (8), та застосовуючи лему 1, одержуємо твердження теореми 1.

***Зауваження* 1.** При $r=1$ розклад (23) є уточненням асимптотичної рівності (7).

Теорема 2. *Якщо* $r = 2l-1$, $l\in N$, *то має місце повний асимптотичний розклад*

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C \cong \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k^r(1\pm\rho)^k,$$

де коефіцієнти γ_k^r *обчислюються за допомогою формул* (20), (21).

Доведення. Згідно з [6, с 187]

$$\mathscr{E}(\overline{W}^1, A_\rho)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm1)^k\frac{1\pm\rho^{2k+1}}{(2k+1)^2}.$$

Нехай $r = 2l+1$, $l\in N$. Тоді аналогічно, як і при доведенні попередньої теореми, можна показати, що

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^r}\left|\int_{\pm\pi}^{\pi}f^{(r)}(t)\overline{F}_{r,\rho}(t)dt\right| = \frac{1}{\pi}\sup_{f\in W^r}\left|\int_{\pm\pi}^{\pi}f^{(r)}(t)\left(\overline{F}_{r,\rho}(t)\pm\overline{F}_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)dt\right|.$$

Оскільки $f\in W^r$, $\overline{F}_{r,\rho}(t)$ парна при $r=2l+1$, $l\in N$, то

$$\mathscr{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C \le \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left|\overline{F}_{r,\rho}(t)\pm\overline{F}_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right|dt.$$

З іншого боку, якщо $\operatorname{sign}(\overline{F}_{r,\rho}(t)\pm\overline{F}_{r,\rho}(\pi/2)) = \pm\operatorname{sign}\cos t$, то функція f така, що $f^{(r)}(t) = \operatorname{sign}(\overline{F}_{r,\rho}(t) \pm \overline{F}_{r,\rho}(\pi/2))$, $t \in [-\pi, \pi]$, неперервно і періодично продовжується на R і належить до класу W^r [7, с. 187-188]. А отже, при $r = 2l + 1$, $l \in N$

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C \geq \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\overline{F}_{r,\rho}(t) \pm \overline{F}_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| dt$$

і, таким чином,

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \left|\overline{F}_{r,\rho}(t) \pm \overline{F}_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right| dt =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2} \left(\overline{F}_{r,\rho}(t) \pm \overline{F}_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dt \pm \int_0^{\pi/2} \left(\overline{F}_{r,\rho}(\pi \pm t) \pm \overline{F}_{r,\rho}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) dt\right| =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2} (\overline{F}_{r,\rho}(t) \pm \overline{F}_{r,\rho}(\pi \pm t))\, dt\right|. \tag{25}$$

Рівність $\operatorname{sign}(\overline{F}_{r,\rho}(t) \pm \overline{F}_{r,\rho}(\pi/2)) = \pm \operatorname{sign}\cos t$ випливає з наступних міркувань.

У припущенні, що $\overline{F}_{r,\rho}(t) - \overline{F}_{r,\rho}(\pi/2) = 0$, $r = 2l + 1$, $l \in N$, при деякому $t_0 \in (0, \pi)$, $t_0 \neq \pi/2$, згідно з теоремою Ролля існує $t_0^{(1)} \in (0, \pi)$ таке, що $\overline{F}'_{r,\rho}(t_0^{(1)}) = 0$, звідки

$$\overline{F}_{r\pm 1,\rho}(t_0^{(1)}) = 0.$$

Але це суперечить тому, що $\operatorname{sign}\overline{F}_{r\pm 1,\rho}(t) = \pm \operatorname{sign}\sin t$ при $r = 2l + 1$, $l \in N$. Отже, $t = \pi/2$ — єдиний розв'язок рівняння $\overline{F}_{r,\rho}(t) - \overline{F}_{r,\rho}(\pi/2) = 0$ на проміжку $[0, \pi]$. І, оскільки $\operatorname{sign}\overline{F}'_{r,\rho}(t) = \pm \operatorname{sign}\sin t$ при $r = 2l + 1$, $l \in N$, то функція $\overline{F}_{r,\rho}(t) - \overline{F}_{r,\rho}(\pi/2)$ монотонна на $(0, \pi)$.

Отже, виходячи із співвідношення (25), при $r = 2l + 1$, $l \in N$, одержуємо

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C = \frac{4}{\pi}\left|\int_0^{\pi/2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \pm \rho^{2k+1}}{(2k+1)^r} \cos(2k+1)t\, dt\right|.$$

Таким чином, при $r = 2l - 1$, $l \in N$,

$$\mathcal{E}(\overline{W}^r, A_\rho)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{1 \pm \rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}.$$

Звідси, враховуючи, що [5]

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\pm 1)^k \frac{1 \pm \rho^{2k+1}}{(2k+1)^{n+1}} = \psi_n(\rho),$$

де $\psi_n(\rho)$ — функція, визначена формулою (9), згідно з лемою 2 отримуємо твердження теореми 2.

3. Твердження для класів W^r.

Теорема 3. *Мають місце повні асимптотичні розклади*

$$\mathscr{E}(W^r, A_\rho)_C \cong \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left\{\alpha_k^r(1\pm\rho)^k \ln\dfrac{1}{1\pm r} + \beta_k^r(1\pm\rho)^k\right\}, & r = 2l\pm 1,\ l\in N, \\ \dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\gamma_k^r(1\pm\rho)^k, & r = 2l,\ l\in N, \end{cases}$$

де коефіцієнти α_k^r, β_k^r *і* γ_k^r *обчислюються відповідно за формулами* (10)-–(12) *і* (20), (21).

Доведення. Згідно з співвідношенням (7) із [5]

$$\mathscr{E}(W^r, A_\rho)_C = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(\pm 1)^{k(r+1)}\frac{1\pm\rho^{2k+1}}{(2k+1)^{r+1}}. \qquad (26$$

Права частина рівності (26) при $r = 2l$, $l \in N$, тотожно співпадає з функ цією $\psi_r(\rho)$, $0 \le \rho < 1$ (див. (8)), а при $r = 2l - 1$, $l \in N$, — з функцією $\varphi_r(\rho)$ $0 \le \rho < 1$ (див. (9)), а повний асимптотичний розклад цих функцій подано лемах 1 і 2 відповідно. Теорему 3 доведено.

Зауваження 2. У випадку $r = 1$ твердження теореми 3 встановлено в рс боті [9].

1. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H^p. – М.: Мир, 1984. – 368 с.
2. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – К.: Наук думка, 1987. – 268 с.
3. *Эрдейи А.* Асимптотические разложения. – М.: Физматиз, 1962. – 127 с.
4. *Натансон В. П.* О порядке приближения непрерывной 2π-периодической функции пр помощи ее интеграла Пуассона // Докл. АН СССР. – 1950. – **72**. – С. 11 – 14.
5. *Тиман А. Ф.* Точная оценка остатка при приближении периодических дифференцируемы функций интегралами Пуассона // Там же. – 1950. – **74**. – С. 17 – 20.
6. *Szökefalvi – Nagy B.* Sur l'ordre de l'approximation d'une fonction par son integrale de Poisson Acta Math. Acad. Sci Hungar. – 1950. – **1**. – P. 183 – 188.
7. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи приближения. – М.: Наука, 1976. – 320 с.
8. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М Физматиз, 1963. – 1100 с.
9. *Штарк Э. Л.* Полное асимптотическое разложение для верхней грани уклонения функци из Lip 1 от их сингулярного интеграла Абеля – Пуассона // Мат. заметки. – 1973. – **13**, № 1. С. 21 – 28.

Одержано 25.05.0