УДК 519.21

С. А. Мельник (Донец. ун-т)

ВЕРХНЯЯ И НИЖНЯЯ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СТЕПЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ (СЛАБЫЙ ИСТОЧНИК)

We study the evolution in time of a solution of the Cauchy problem for a stochastic differential parabolic type equation with power nonlinearities. We construct an upper and a lower bounds of the solution.

Вивчається еволюція за часом розв'язку задачі Коші для стохастичного диференціального рівняння параболічного типу зі степеневими нелінійностями. Побудовано верхню та нижню оцінки розв'язку.

Рассмотрим задачу Коши

$$du(t,x) = (a(u^{\sigma+1})_{xx} + bu^{\beta})dt + cudw(t),$$

$$t \in [0; T), \quad x \in R^1, \quad u(0; x) = u_0(x). \tag{1}$$

Здесь $w(t)$ — стандартный винеровский процесс, σ, a, b, c — положительные числа, $1 < \beta < \sigma + 1$, $u_0(x)$ — ограниченная четная функция, равная нулю вне некоторого интервала $(-l_0; l_0)$ и положительная на этом интервале.

Под решением задачи (1) будем понимать случайный процесс $u(t; x)$, определенный на полном вероятностном пространстве (Ω, F, P), подчиненный потоку σ-алгебр $\{F_t\}_{t \ge 0}$, согласованному с $w(t)$, и такой, что

$$u^{\sigma/2+1} \in C((0,T); L_2(R^1 \times \Omega)), \qquad u^{\sigma+1} \in L_2((0,T) \times \Omega;\, W_2^1(R^1))$$

и $\forall v \in W_2^1(R^1)$, $\forall t \in [0; T)$ с вероятностью 1 справедливо равенство

$$\int\limits_{R^1} u(t;x)v(x)dx - \int\limits_{R^1} u_0(x)v(x)dx = \int\limits_0^t \int\limits_{R^1} \left[\pm a(u^{\sigma+1})_x v_x + bu^{\beta} v\right] dx\, ds +$$

$$+ c\int\limits_0^t \int\limits_{R^1} uv\, dx\, dw(s).$$

Будем рассматривать симметричные относительно точки $x = 0$ решения, удовлетворяющие требованиям

$$\forall t \in [0; T): u_x(t; 0) = 0, \quad u(t; x_f(t)) = 0, \quad (u^{\sigma+1})_x\big|_{x = x_f(t)} = 0, \tag{2}$$

где $x_f(t) = \inf\limits_{x \ge 0} \{x : u(t; x) = 0\}$, $x_f(0) = l_0$. Процесс $x_f(t)$ называют фронтом решения. В силу сказанного будем рассматривать решение задачи (1), (2) лишь на полуоси $x \ge 0$.

Замечание. В работе [1] показано, что если решение задачи (1) существует и единственно, то при указанных выше начальных условиях оно с вероятностью 1 неотрицательно при всех t и x. Поэтому степенные выражения в (1) и (2) определены.

Существование и единственность решения будет рассматриваться ниже.

Уравнение (1) является нелинейным. В детерминированном случае ($c = 0$) для исследования поведения решения строят верхние или нижние оценки ([2], гл. IV). В данной работе построена пара случайных процессов, которые с вероятностью не меньше $1-\alpha$, $0<\alpha<1$, ограничивают решение задачи (1), (2) сверху и снизу $\forall t\in[0;T)$, $\forall x\in R^1$. За основу взяты методы, изложенные в ([2], гл. IV). С помощью построенных оценок изучено поведение решения при росте времени.

1. Верхняя оценка решения. Обозначим $\xi(t)=-c^2t/2+cw(t)$, $g(t)=$ $=e^{\xi(t)}$. Перейдем к новой неизвестной функции с помощью замены $u(t;x)=$ $=g(t)v(t;x)$. Тогда новая неизвестная функция $v(t;x)$ является решением задачи

$$v_t=p(t)(v^{\sigma+1})_{xx}+q(t)v^{\beta},\quad t\in[0;T),\quad x\in R^1,\quad v(0;x)=u_0(x). \tag{3}$$

Здесь $p(t)=ag^{\sigma}(t)$, $q(t)=bg^{\beta-1}(t)$. Условия (2) для $v(t;x)$ имеют вид

$$\forall t\in[0;T):v_x(t;0)=0,\quad v(t;x_f(t))=0,\quad (v^{\sigma+1})_x\big|_{x=x_f(t)}=0. \tag{4}$$

Существование и единственность решения задачи (3), (4) почти при всех $\omega\in$ $\in\Omega$ следует из результатов [2, с. 37-38]. Поскольку задачи (1), (2) и (3), (4) равносильны, то тем самым обеспечено существование и единственность решения задачи (1), (2).

В задаче (3), (4) произведем замену переменной

$$\hat\tau=\hat\tau(t)=b\int_0^t g^{\beta\pm1}(s)ds.$$

Тогда новая неизвестная функция $\hat v(\hat\tau;x)=\hat v(\hat\tau(t);x)=v(t;x)$ является решением задачи

$$\hat U(\hat v)\equiv\hat v_{\hat\tau}-\frac{a}{b}g^{\sigma+1\pm\beta}(t)(\hat v^{\sigma+1})_{xx}-\hat v^{\beta}=0,$$

$$\hat\tau\in[0;+\infty),\quad x\in R^1,\quad \hat v(0;x)=u_0(x); \tag{5}$$

$$\forall\hat\tau\in[0;+\infty):\hat v_x(\hat\tau;0)=0,\quad \hat v(\hat\tau;x_f(\hat\tau))=0,\quad (\hat v^{\sigma+1})_x\big|_{x=x_f(\hat\tau)}=0. \tag{6}$$

Для построения оценки сверху решения задачи (5), (6) воспользуемся теоремой сравнения ([2], гл. 1, теорема 3). Пусть $\alpha\in(0;1)$. Построим функцию $\hat V(\hat\tau;x)$ такую, что $\forall\hat\tau\ge0$, $\forall x\ge0$ с вероятностью не меньше $1-\alpha$ имеет место система неравенств

$$\begin{cases}\hat U(\hat V(\hat\tau;x))\ge0,\\ \hat V(0;x)\ge u_0(x).\end{cases} \tag{7}$$

Положим $\hat V(\hat\tau;x)=\hat L(\hat T\pm\hat\tau)_+^{1/(1\pm\beta)}z^{1/\sigma}$, где

$$z=\left(1\pm\frac{x^2}{\hat l^2}(\hat T\pm\hat\tau)_+^{\frac{\sigma+1\pm\beta}{\beta\pm1}}\right)_+,\quad (f)_+=\max\{f;0\}.$$

Здесь $\hat L$, $\hat l$, $\hat T$ — некоторые положительные константы, которые подберем таким образом, чтобы неравенства (7) выполнялись с вероятностью не меньше $1-\alpha$. Тогда

$$\hat{U}(\hat{V}) = (\hat{T} \pm \hat{\tau})_+^{\frac{\beta}{1\pm\beta}} \frac{\hat{L}}{\sigma} z^{\frac{1\pm\sigma}{\sigma}} \hat{G}(t; z),$$

где

$$\hat{G}(t; z) = \frac{\sigma + 1 \pm \beta}{\beta \pm 1} - \frac{4a(\sigma + 1)}{b\sigma} \frac{\hat{L}^\sigma}{\hat{l}^2} g^{\sigma+1\pm\beta}(t) +$$

$$+ \left(1 + \frac{2a(\sigma + 1)(\sigma + 2)}{b\sigma} \frac{\hat{L}^\sigma}{\hat{l}^2} g^{\sigma+1\pm\beta}(t)\right) z - \sigma \hat{L}^{\beta\pm1} z^{\frac{\sigma+\beta\pm1}{\sigma}}, \quad z \in [0; 1].$$

Поскольку первые три сомножителя в выражении для $\hat{U}(\hat{V})$ неотрицательны, то знак $\hat{U}(\hat{V})$ совпадает со знаком $\hat{G}(t; z)$. Отметим, что

$$\hat{G}_{zz}(t; z) = \pm \frac{(\sigma + \beta \pm 1)(\beta \pm 1)}{\sigma} \hat{L}^{\beta\pm1} z^{\frac{\beta\pm\sigma\pm1}{\sigma}} \le 0.$$

Значит, функция $\hat{G}(t; z)$ выпукла вверх по z и может достигать минимального значения только на концах отрезка $z \in [0; 1]$;

$$\hat{G}(t; 0) = \frac{\sigma + 1 \pm \beta}{\beta \pm 1} - \frac{4a(\sigma + 1)}{b\sigma} \frac{\hat{L}^\sigma}{\hat{l}^2} g^{\sigma+1\pm\beta}(t),$$

$$\hat{G}(t; 1) = \frac{\sigma + 1 \pm \beta}{\beta \pm 1} - \frac{4a(\sigma + 1)}{b\sigma} \frac{\hat{L}^\sigma}{\hat{l}^2} g^{\sigma+1\pm\beta}(t) + 1 +$$

$$+ \frac{2a(\sigma + 1)(\sigma + 2)}{b\sigma} \frac{\hat{L}^\sigma}{\hat{l}^2} g^{\sigma+1\pm\beta}(t) \pm \sigma \hat{L}^{\beta\pm1}.$$

Если $\hat{L}$ выбрать так, чтобы $\sigma \hat{L}^{\beta\pm1} \le 1$, то $\hat{G}(t; 0) \le \hat{G}(t; 1)$ и $\min\limits_{z\in[0;1]} \hat{G}(t; z) = \hat{G}(t; 0)$. Теперь выберем $\hat{l}$ такое, что выполняется неравенство $\hat{G}(t; 0) \ge 0$. Прежде всего выберем $\hat{l}$ такое, что $\hat{G}(0; 0) \ge 0$, т. е. выполняется неравенство

$$\frac{\sigma + 1 \pm \beta}{\beta \pm 1} - \frac{4a(\sigma + 1)}{b\sigma} \frac{\hat{L}^\sigma}{\hat{l}^2} > 0. \tag{8}$$

Поскольку $\hat{L}$ выбрано раньше, то желаемого можно добиться увеличением $\hat{l}$. Итак, при выбранных $\hat{L}$ и $\hat{l}$ $\forall t \ge 0$, $\forall z \in [0; 1]$ с вероятностью 1 справедливо неравенство

$$\hat{G}(t; z) \ge \frac{\sigma + 1 \pm \beta}{\beta \pm 1} - \frac{4a(\sigma + 1)}{b\sigma} \frac{\hat{L}^\sigma}{\hat{l}^2} g^{\sigma+1\pm\beta}(t).$$

Поскольку процесс $g(t)$ может принимать любые положительные значения, то правая часть последнего неравенства может принимать положительные значения лишь с некоторой вероятностью, которая легко находится с помощью результатов работы [3, с. 388] следующим образом:

$$P\left\{\sup_{0\le t<+\infty} g^{\sigma+1\pm\beta}(t) < \frac{b\sigma(\sigma + 1 \pm \beta)}{4a(\sigma + 1)(\beta \pm 1)} \frac{\hat{l}^2}{\hat{L}^\sigma}\right\} =$$

$$= P\left\{\sup_{0\le t<+\infty} \xi(t) < \ln\left(\frac{b\sigma(\sigma + 1 \pm \beta)}{4a(\sigma + 1)(\beta \pm 1)} \frac{\hat{l}^2}{\hat{L}^\sigma}\right)^{\frac{1}{\sigma+1\pm\beta}}\right\} =$$

$$= 1 - \left(\frac{4a(\sigma+1)(\beta\pm1)}{b\sigma(\sigma+1\pm\beta)}\frac{\hat{L}^{\sigma}}{\hat{l}^{2}}\right)^{\frac{1}{\sigma+1\pm\beta}} = p^{*}. \tag{9}$$

Итак, с вероятностью не меньше p^* первое неравенство системы (7) выполнено.

Рассмотрим второе неравенство. Функция $\hat{V}^{\sigma}(\hat{\tau};x)$ как функция от x представляет собой положительную часть параболы с ветвями, направленными вниз, вершиной в точке $x=0$ и корнями $x_{1,2} = \hat{l}(\hat{T}\pm\hat{\tau})_{+}^{\pm(\sigma+1\pm\beta)/2(\beta\pm1)}$. Ордината вершины этой параболы $\hat{V}(\hat{\tau},0) = \hat{L}(\hat{T}\pm\hat{\tau})_{+}^{1/(1\pm\beta)}$ является убывающей функцией переменной $\hat{T}$. Модуль корней параболы также убывает с ростом $\hat{T}$. Поскольку $u_0(x)$ — ограниченная неотрицательная функция, отличная от нуля при $x\in(-l_0;l_0)$, то существует такое $\hat{T}$, что $\forall k\in R^1$: $\hat{V}(0;x)\geq u_0(x)$ и выполняется второе неравенство системы (7).

Теорема 1. *Пусть* $\alpha\in(0;1)$. *Существуют константы* $\hat{L}$, $\hat{l}$ *и* $\hat{T}$ *такие, что*

$$P\left\{\forall t\geq 0,\ \forall x\in R^1 : u(t;x)\leq g(t)\hat{V}(\hat{\tau}(t);x)\right\} \geq 1-\alpha.$$

Доказательство. Из равенства $p^* = 1-\alpha$ находим

$$\frac{\hat{L}^{\sigma}}{\hat{l}^{2}} = \frac{b\alpha^{\sigma+1\pm\beta}\sigma(\sigma+1\pm\beta)}{4a(\sigma+1)(\beta\pm1)}.$$

Положим $\hat{L} = \sigma^{1/(1-\beta)}$. Тогда

$$\hat{l} = \sqrt{\frac{4a(\sigma+1)(\beta\pm1)}{b\alpha^{\alpha+1\pm\beta}\sigma^{\beta(\beta\pm1)^{\mp1}}(\sigma+1\pm\beta)}}.$$

Теперь выберем наибольшее $\hat{T}$, удовлетворяющее требованию

$$\forall x\in R^1 : \hat{T}^{\frac{1}{1\pm\beta}}\hat{L}\left(1\pm\frac{x^2}{\hat{l}^2}\hat{T}^{\frac{\sigma+1\pm\beta}{\beta\pm1}}\right)_{+}^{\frac{1}{\sigma}} \geq u_0(x).$$

При выбранных $\hat{L}$, $\hat{l}$ и $\hat{T}$ система неравенств (7) выполнится с вероятностью не меньше $1-\alpha$. Тогда согласно теореме сравнения ([2], гл. 1) имеем

$$P\left\{\forall t\geq 0,\ \forall x\in R^1 : \hat{v}(\hat{\tau}(t);x)\leq \hat{V}(\hat{\tau}(t);x)\right\} \geq 1-\alpha.$$

Поскольку $u(t;x) = g(t)v(t;x) = g(t)\hat{v}(\hat{\tau}(t);x)$, то

$$P\left\{\forall t\geq 0,\ \forall x\in R^1 : u(t;x)\leq g(t)\hat{V}(\hat{\tau}(t);x)\right\} \geq 1-\alpha$$

и теорема доказана.

2. Нижняя оценка решения. В задаче (3), (4) перейдем к новой переменной

$$\check{\tau}(t) = a\int_0^t g^{\sigma}(s)\,ds.$$

Тогда новая неизвестная функция $\check{v}(\check{\tau};x) = \check{v}(\check{\tau}(t);x) = v(t;x)$ является решением задачи

$$\breve{U}(\breve{v}) \equiv \breve{v}_{\breve{\tau}} - (\breve{v}^{\sigma+1})_{xx} - \frac{b}{a} g^{\beta\pm\sigma\pm1}(t)\breve{v}^{\beta} = 0, \tag{10}$$

$$\breve{\tau} \in [0; +\infty), \quad x \in R^1, \quad \breve{v}(0; x) = u_0(x);$$

$$\forall \breve{\tau} \in [0; +\infty): \breve{v}_x(\breve{\tau}; 0) = 0, \quad \breve{v}(\breve{\tau}; x_f(\breve{\tau})) = 0, \quad (\breve{v}^{\sigma+1})_x\Big|_{x=x_f(\breve{\tau})} = 0. \tag{11}$$

Пусть $\alpha \in (0; 1)$. Построим функцию $\breve{V}(\breve{\tau}; x)$ такую, чтобы $\forall \breve{\tau} \geq 0$, $\forall x \geq$ ≥ 0 с вероятностью не меньше $1 - \alpha$ имела место система неравенств

$$\begin{cases} \breve{U}\big(\breve{V}(\breve{\tau}; x)\big) \leq 0, \\ \breve{V}(0; x) \leq u_0(x). \end{cases} \tag{12}$$

Положим $\breve{V}(\breve{\tau}; x) = \breve{L}(\breve{T} \pm \breve{\tau})_+^{1/(1\pm\beta)} z^{1/\sigma}$, где

$$z = \left(1 \pm \frac{x^2}{\breve{l}^2} (\breve{T} \pm \breve{\tau})_+^{\frac{\sigma+1\pm\beta}{\beta\pm1}}\right)_+.$$

Здесь $\breve{L}$, $\breve{l}$, $\breve{T}$ — некоторые положительные константы, при соответствующем подборе которых неравенства (12) выполняются с вероятностью не меньше $1 -$ $- \alpha$. Тогда

$$\breve{U}(\breve{V}) = (\breve{T} \pm \breve{\tau})_+^{\frac{\beta}{1\pm\beta}} \frac{\breve{L}}{\sigma} z^{\frac{1\pm\sigma}{\sigma}} \breve{G}(t; z),$$

где

$$\breve{G}(t; z) = \frac{\sigma + 1 \pm \beta}{\beta \pm 1} - \frac{4(\sigma+1)}{\sigma} \frac{\breve{L}^{\sigma}}{\breve{l}^2} + \left(1 + \frac{2(\sigma+1)(\sigma+2)}{\sigma} \frac{\breve{L}^{\sigma}}{\breve{l}^2}\right) z -$$

$$- \frac{b}{a} \sigma \breve{L}^{\beta\pm1} g^{\beta\pm\sigma\pm1}(t) z^{\frac{\sigma+\beta\pm1}{\sigma}}, \quad z \in [0; 1].$$

Поскольку первые три сомножителя в выражении для $\breve{U}(\breve{V})$ неотрицательны, то знак $\breve{U}(\breve{V})$ совпадет со знаком $\breve{G}(t; z)$. Заметим, что нелинейная по z часть функции $\breve{G}(t; z)$ неположительна. Проанализируем линейную часть. Обозначим $\breve{k} = \breve{L}^{\sigma} / \breve{l}^2$. Корнем линейной части является число

$$z_0 = \frac{1 + 4(\sigma+1)\sigma^{\pm1}\breve{k} \pm \sigma(\beta \pm 1)^{\pm1}}{1 + 4(\sigma+1)\sigma^{\pm1}\breve{k} + 2(\sigma+1)\breve{k}}.$$

Очевидно, $z_0 < 1$. Таким образом, линейная часть не может быть отрицательной при всех $z \in [0; 1]$. Выберем

$$\breve{k} > \frac{\sigma(\sigma + 1 \pm \beta)}{4(\sigma+1)(\beta \pm 1)}. \tag{13}$$

Тогда $z_0 > 0$ и с вероятностью 1 $\forall t \geq 0$, $\forall z \in [0; z_0]$ справедливо неравенство $\breve{G}(t; z) \leq 0$. Пусть теперь $z \in [z_0; 1]$. Поскольку коэффициент при z положителен, а при $z^{(\sigma+\beta\pm1)/\sigma}$ отрицателен, то, заменив в линейной части z на 1, а в нелинейной — z на z_0, получим

$$\breve{G}(t;z) \le \sigma\left(\frac{1}{\beta\pm1}+\frac{2(\sigma+1)}{\sigma}\breve{k} \pm \frac{b}{a}\breve{L}^{\beta\pm1}g^{\beta\pm\sigma\pm1}(t)z_0^{\frac{\sigma+\beta\pm1}{\sigma}}\right).$$

Теперь при $z \in [z_0; 1]$ событие $\{\forall t \ge 0 : \breve{G}(t;z) \le 0\}$ является следствием события

$$\left\{\sup_{0\le t<+\infty}\xi(t) \le \frac{1}{\sigma+1\pm\beta}\ln\left(\frac{b\breve{L}^{\beta\pm1}z_0^{(\sigma+\beta\pm1)\sigma^{\pm1}}}{a\left((\beta\pm1)^{\pm1}+2(\sigma+1)\sigma^{\pm1}\breve{k}\right)}\right)\right\}.$$

Заметим, что в силу (13) величина $\breve{k}$ фиксирована и, следовательно, z_0 тоже фиксировано. Чтобы последнее событие имело положительную вероятность, увеличим $\breve{L}$ (не меняя при этом $\breve{k}$) так, чтобы выполнялось неравенство

$$b\breve{L}^{\beta\pm1}z_0^{\frac{\sigma+\beta\pm1}{\sigma}} > a\left(\frac{1}{\beta\pm1}+\frac{2(\sigma+1)}{\sigma}\breve{k}\right). \tag{14}$$

Тогда

$$P\{\forall t\ge0,\ \forall z\in(z_0;1]: \breve{G}(t;z)\le0\} \ge$$

$$\ge P\left\{\sup_{0\le t<+\infty}\xi(t) \le \frac{1}{\sigma+1\pm\beta}\ln\left(\frac{b\breve{L}^{\beta\pm1}z_0^{(\sigma+\beta\pm1)\sigma^{\pm1}}}{a\left((\beta\pm1)^{\pm1}+2(\sigma+1)\sigma^{\pm1}\breve{k}\right)}\right)\right\} =$$

$$= 1-\left(\frac{a\left((\beta\pm1)^{\pm1}+2(\sigma+1)\sigma^{\pm1}\breve{k}\right)}{b\breve{L}^{\beta\pm1}z_0^{\frac{\sigma+\beta\pm1}{\sigma}}}\right)^{\frac{1}{\sigma+1\pm\beta}} = p_*. \tag{15}$$

Итак, с вероятностью не меньше p_* первое неравенство системы (12) выполнено.

Рассмотрим второе неравенство. Заметим, что $u_0(x)>0$ при $x\in(-l_0;l_0)$. Выберем $\breve{T}$ такое, чтобы $\forall x\in R^1: V(0;x)\le u_0(x)$ и выполнялось второе неравенство системы (12).

Теорема 2. *Пусть* $\alpha\in(0;1)$. *Существуют константы* $\breve{L}$, $\breve{l}$ *и* $\breve{T}$ *такие, что*

$$P\left\{\forall t\ge0,\ \forall x\in R^1: u(t;x)\ge g(t)\breve{V}(\breve{\tau}(t);x)\right\} \ge 1-\alpha.$$

Доказательство. Из равенства $p_*=1-\alpha$ находим

$$\breve{L} = \left(\frac{a}{b}\alpha^{\beta\pm\sigma\pm1}z_0^{\frac{1\pm\sigma\pm\beta}{\sigma}}\left(\frac{1}{\beta\pm1}+\frac{2(\sigma+1)}{\sigma}\breve{k}\right)\right)^{\frac{1}{\beta\pm1}}.$$

Тогда будет выполняться неравенство (14). Выберем какое-нибудь $\breve{k}$ согласно (13). Тогда $\breve{l}$ фиксировано и z_0 определяется однозначно. Теперь выберем наименьшее $\breve{T}$, удовлетворяющее требованию

$$\forall x\in R^1: \breve{T}^{\frac{1}{1\pm\beta}}\breve{L}\left(1\pm\frac{x^2}{\breve{l}^2}\breve{T}^{\frac{\sigma+1\pm\beta}{\beta\pm1}}\right)_+^{\frac{1}{\sigma}} \le u_0(x).$$

При выбранных $\check{L}$, $\check{l}$ и $\check{T}$ система неравенств (12) выполняется с вероятностью не меньше $1-\alpha$, и аналогично теореме 1 убеждаемся в справедливости теоремы 2.

3. Двусторонняя оценка.

Теорема 3. *Пусть* $\alpha \in (0;1)$. *Существуют константы* $\hat{L}$, $\hat{l}$, $\hat{T}$, $\check{L}$, $\check{l}$ *и* $\check{T}$ *такие, что*

$$P\left\{\forall t \geq 0,\ \forall x \in R^1:\ g(t)\check{V}(\check{\tau}(t);x) \leq u(t;x) \leq g(t)\hat{V}(\hat{\tau}(t);x)\right\} \geq 1-2\alpha .$$

Доказательство. Справедливость оценки сверху следует из (9), а оценки снизу — из (15). Поскольку мы выбираем $p^* = p_* = 1-\alpha$, то

$$\frac{1}{\sigma+1\pm\beta}\ln\frac{b(\sigma+1\pm\beta)\sigma}{4a\tilde{k}(\sigma+1)(\beta\pm1)} = \frac{1}{\sigma+1\pm\beta}\ln\frac{b\check{L}^{\beta\pm1}z_0^{\frac{\sigma+\beta\pm1}{\sigma}}}{a\left((\beta\pm1)^{\pm1}+2(\sigma+1)\sigma^{\pm1}\check{k}\right)} = L .$$

Следовательно, если наступит событие $\left\{\sup\limits_{0\leq t<+\infty}\xi(t)<L\right\}$, то, выбирая константы согласно теоремам 1 и 2, получаем выполнение двустороннего неравенства с вероятностью не меньше $1-2\alpha$. Теорема доказана.

4. Предельное поведение решения задачи (1), (2). Предельное поведение решения в детерминированном случае $(c=0)$ известно ([2], гл. IV): решение неограниченно растет в каждой точке пространства, причем время жизни решения конечно. Рассмотрим стохастический случай. Полученные оценки позволяют судить о динамике решения задачи (1), (2). Согласно ([4], теорема 1.1.5)

$$P\left\{\omega:\ \lim_{t\to+\infty}\hat{\tau}(t)=\hat{\eta}(\omega)\right\} = 1, \qquad P\left\{\omega:\ \lim_{t\to+\infty}\check{\tau}(t)=\check{\eta}(\omega)\right\} = 1,$$

где $\hat{\eta}(\omega)$ и $\check{\eta}(\omega)$ — случайные величины с известными распределениями. Кроме того, согласно закону повторного логарифма $P\left\{\lim\limits_{t\to+\infty}g(t)=0\right\}=1$. Таким образом, при $t\to+\infty$ оценка сверху с некоторой положительной вероятностью стремится к нулю, а оценка снизу, также с некоторой положительной вероятностью, стремится к $+\infty$ во всех точках пространства. Оценить поведение самого решения можно следующим образом. Обозначим

$$\hat{A} = \left\{\omega:\ \hat{\tau}(+\infty)<\hat{T}\right\}, \qquad \hat{B} = \left\{\omega:\ \forall t\geq0,\ \forall x\in R^1\ \ u(t;x)\leq\hat{u}(t;x)\right\},$$

$$C = \left\{\omega:\ \sup_{0\leq t<+\infty}\xi(t)<L\right\}.$$

Поскольку

$$\hat{A}\cap C \subseteq \hat{A}\cap\hat{B} \subseteq \left\{\omega:\forall x\in R^1\ \lim_{t\to+\infty}u(t;x)=0\right\},$$

то

$$P\left\{\omega:\forall x\in R^1\ \lim_{t\to+\infty}u(t;x)=0\right\} \geq P\{\hat{A}\cap C\}.$$

Таким образом, искомая вероятность не меньше вероятности того, что векторный процесс $(\xi(t),\hat{\tau}(t))$ не выйдет за пределы множества $(-\infty;L)\times[0;\hat{T})$.

В свою очередь, эта вероятность может быть найдена известным методом [5, с. 495].

Рассматривая события

$$\breve{A} = \left\{\omega: \breve{\tau}(+\infty) \geq \breve{T}\right\}, \qquad \breve{B} = \left\{\omega: \forall t \geq 0,\ \forall x \in R^1\ u(t;x) \geq \breve{u}(t;x)\right\},$$

аналогичными рассуждениями получаем

$$P\left\{\omega: \forall x \in R^1 \lim_{t \to +\infty} u(t;x) = +\infty\right\} \geq P\{\breve{A} \cap C\}.$$

Последняя вероятность может быть найдена методом, изложенным в [5, с. 495], как вероятность выхода процесса $(\xi(t), \bar{\tau}(t))$ за пределы множества $(-\infty; L) \times$ $\times [0; \bar{T})$ через верхнюю стенку.

5. Выводы. Полученные результаты показывают, что введениев уравнение (1) линейного стохастического слагаемого существенно меняет поведение процесса. В детерминированном случае $(c = 0)$ возможен лишь один сценарий жизни решения: неограниченное расширение пространственного носителя, неограниченный рост решения в каждой точке пространства, конечное время жизни. В стохастическом случае $c \neq 0$ такой сценарий также возможен, но лишь с некоторой положительной вероятностью. Кроме этого сценария с положительной вероятностью возможен иной: процесс в каждой точке пространства стремится к нулю, а носитель остается ограниченным. Из структуры оценок также видно, что иных сценариев нет.

1. *Мельник С. А.* Принцип максимума для стохастических уравнений горения. – К., 1992. – 5 с. – (Деп. в УкрИНТЭИ, № 434-Ук 92(06.04.92)).
2. *Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П.* Режимы с обострениями в задачах для квазилинейных параболических уравнений. – М.: Наука, 1987. – 480 с.
3. *Справочник* по теории вероятностей и математической статистике. – К.: Наук. думка, 1978. – 582 с.
4. *Царьков Е. Ф., Ясинский В. К.* Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения. – Рига: Ориентир, 1992. – 320 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. – М.: Наука, 1977. – 564 с.

Получено 26.04.2000