УДК 517.95

М. Б. Пташник (Львів. нац. ун-т)

ДЕЯКІ ПСЕВДОПАРАБОЛІЧНІ ВАРІАЦІЙНІ НЕРІВНОСТІ З ПОХІДНИМИ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

We consider a pseudoparabolic variational inequality with higher order derivatives. We prove the existence and uniqueness of a solution of this inequality with a zero initial condition.

Розглянуто псевдопараболічну варіаційну нерівність з похідними вищих порядків. Доведено існування та єдиність розв'язку даної нерівності з нульовою початковою умовою.

Процес фільтрації рідини в пористому середовищі з тріщинами [1], процес проходження тепла в гетерогенному середовищі [2] моделюються крайовими задачами для псевдопараболічних рівнянь. У роботі Е. Ді Бенедетто, Р. Е. Шовалтер [3] показано можливість зведення однофазної задачі Стефана до розв'язування псевдопараболічної варіаційної нерівності.

Ф. Скарпіні [4] розглянув лінійну псевдопараболічну нерівність у випадку однієї просторової змінної з похідними другого порядку за просторовою координатою. Задачі з початковими та крайовими умовами для псевдопараболічного рівняння з похідними вищих порядків досліджено в роботі Г. Брілла [5]. Загальну теорію псевдопараболічних рівнянь розглянуто, зокрема, в працях [6 – 10].

У даній статті вперше досліджено коректність псевдопараболічної варіаційної нерівності для випадку багатьох просторових змінних з похідними порядку $2n$, $n \geq 1$, за просторовими координатами та з нульовою початковою умовою.

Нехай Ω — обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з гладкою межею $\partial\Omega$; V — замкнений підпростір у $\left(H^l(\Omega)\right)^N$ такий, що $\left(\mathring{H}^l(\Omega)\right)^N \subset V \subset \left(H^l(\Omega)\right)^N$, V неперервно і компактно вкладений в $\left(L^2(\Omega)\right)^N$. K — опукла замкнена множина в V, що містить нульовий елемент.

Позначатимемо через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ дію функціоналу з простору V^* на елементи простору V, а через $(\cdot, \cdot)$ — скалярний добуток в евклідовому просторі $\mathbb{R}^N$.

Розглянемо в області $Q_T = \Omega \times (0, T)$ варіаційну нерівність

$$\int_0^\tau \left(\langle M(t)u_t, v - u_t \rangle + \langle L(t)u, v - u_t \rangle - \langle F, v - u_t \rangle \right) dt \geq 0 \tag{1}$$

з початковою умовою

$$u(0) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

де оператори $L(t)$, $M(t)$ і $F(t)$ визначаються таким чином:

для кожного $t \in (0, T)$ $L(t)\colon V \to V^*$ і для довільних $u, v \in V$

$$\langle L(t)u, v \rangle = \int_\Omega \Bigg[\sum_{|\alpha| = |\beta| \leq l} \left(A_{\alpha,\beta}(x,t) D^\beta u(x,t), D^\alpha v(x,t) \right) + \\ + \sum_{1 \leq |\alpha| \leq l} \left(C_\alpha(x,t) D^\alpha u(x,t), v(x,t) \right) \Bigg] dx;$$

для кожного $t \in (0, T)$ $M(t)\colon V \to V^*$ і для довільних $u, v \in V$

$$\langle M(t)u, v\rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l} \left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u(x,t), D^{\alpha}v(x,t)\right)dx;$$

для кожного $v \in V$ і для довільного $t \in (0, T)$

$$\langle F(t), v\rangle = \int_{\Omega} \sum_{|\alpha|\leq l} \left(f_{\alpha}, D^{\alpha}v(x,t)\right)dx;$$

$A_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta}$, C_{α} — квадратні матриці порядку $N \times N$, $f_{\alpha} = (f_{\alpha,1}, \ldots, f_{\alpha,N})$, $l \geq 1$.

Введемо простір

$$W = \left\{w\colon w \in L^2((0,T);V),\ w_t \in L^2\left((0,T);V^*\right)\right\}$$

і позначимо $\Omega_{\tau} = Q_T \bigcap \{t = \tau\}$.

***Означення* 1.** *Під узагальненим розв'язком нерівності* (1) *з початковою умовою* (2) *будемо розуміти функцію* u *таку, що* $u \in L^2([0,T];V)$, $u_t \in L^2((0,T);V)$, $u_t \in K$ *для майже всіх* $t \in (0,T)$, *і задовольняє* (1), (2) *для довільних* τ, $0 < \tau \leq T$, *і для довільної функції* $v \in W$, $v \in K$ *для майже всіх* $t \in (0,T)$.

Нехай коефіцієнти операторів L і M задовольняють такі умови:

A) $A_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(Q_T)$, $A_{\alpha\beta,t} \in L^{\infty}(Q_T)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A_{\beta\alpha}(x,t)$, $A_{\alpha\beta}(x,t) = A^T_{\alpha\beta}(x,t)$ для всіх α, β, $|\alpha| \leq l$, $|\beta| \leq l$, і для $(x,t) \in Q_T$,

$$\int_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l} \left(A_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}v, D^{\alpha}v\right)dx \geq \int_{\Omega_\tau} \left(a_l \sum_{|\alpha|=l} \left|D^{\alpha}v\right|^2 + a_0|v|^2\right)dx$$

для майже всіх $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, $a_l > 0$, $a_0 > 0$;

B) $B_{\alpha\beta} \in L^{\infty}(Q_T)$, $B_{\alpha\beta,t} \in L^{\infty}(Q_T)$, $B_{\alpha\beta}(x,t) = B_{\beta\alpha}(x,t)$, $B_{\alpha\beta}(x,t) = B_{\alpha\beta}(x,t)^T$ для всіх α, β, $|\alpha| \leq l$, $|\beta| \leq l$, і для $(x,t) \in Q_T$,

$$\int_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l} \left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}v, D^{\alpha}v\right)dx \geq \int_{\Omega_\tau} \left(b_l \sum_{|\alpha|=l} \left|D^{\alpha}v\right|^2 + b_0|v|^2\right)dx$$

для майже всіх $\tau \in [0, T]$, $v \in V$, $b_l > 0$, $b_0 > 0$;

C) $C_{\alpha} \in C\left([0,T]; L^{\infty}(\Omega)\right)$.

Згідно з наслідком [11, с. 27] у просторі $\left(H^l(\Omega)\right)^N$ ми можемо використати норму

$$\|u\|^2_{H^l(\Omega)} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha|=l} \left|D^{\alpha}u\right|^2 + |u|^2\right)dx.$$

Нехай A — квадратна матриця, $A(x,t) = \left[a_{ij}(x,t)\right]_{i,j=1}^N$. Через $\|A\|_{L^{\infty}(Q_T)}$ позначатимемо $\operatorname{esssup}_{Q_T}\left[\sum_{i,j=1}^N a_{ij}^2(x,t)\right]^{1/2}$.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* A), B), C). *Тоді задача* (1), (2) *не може мати більше одного розв'язку.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки u^1, u^2 нерівності (1). Тоді для u^1 і u^2 маємо

$$\int_0^\tau \left(\left\langle M(t)u_t^1, v-u_t^1\right\rangle + \left\langle L(t)u^1, v-u_t^1\right\rangle - \left\langle F, v-u_t^1\right\rangle\right)dt \geq 0,$$
$$\int_0^\tau \left(\left\langle M(t)u_t^2, v-u_t^2\right\rangle + \left\langle L(t)u^2, v-u_t^2\right\rangle - \left\langle F, v-u_t^2\right\rangle\right)dt \geq 0. \tag{3}$$

Покладемо в отриманих нерівностях $v = \left(u_t^1 + u_t^2\right)/2$ і додамо їх. Одержимо нерівність

$$\int_0^\tau \left[\left\langle M(t)\left(u_t^2-u_t^1\right), u_t^2-u_t^1\right\rangle + \left\langle L(t)(u^2-u^1), u_t^2-u_t^1\right\rangle\right]dt \leq 0. \tag{4}$$

Позначимо $u(x,t) = u^2(x,t) - u^1(x,t)$. Проведемо деякі перетворення в нерівності (4):

$$\mathfrak{T}_1 = \int_0^\tau \langle Mu_t, u_t\rangle dt = \int_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l}\left(B_{\alpha\beta}D^\beta u_t, D^\alpha u_t\right)dx\,dt \geq$$
$$\geq \int_{Q_\tau}\left[b_l\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u_t\right|^2 + b_0|u_t|^2\right]dx\,dt,$$
$$\mathfrak{T}_2 = \int_0^\tau \langle L(t)u, u_t\rangle dt =$$
$$= \int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l}\left(A_{\alpha\beta}D^\beta u, D^\alpha u_t\right)dx\,dt + \int_{Q_\tau}\sum_{1\leq|\alpha|\leq l}\left(C_\alpha D^\alpha u, u_t\right)dx\,dt \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\left[a_l\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + a_0|u|^2\right]dx - \frac{1}{2}\int_{Q_\tau}\left[a_l^2\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + a_0^2|u|^2\right]dx\,dt -$$
$$-\frac{C}{2\delta_0}\int_{Q_\tau}\left[\mu_1\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + \mu_2|u|^2\right]dx\,dt - \frac{\delta_0}{2}\int_{Q_\tau}|u_t|^2\,dx\,dt, \quad \delta_0 > 0,$$

де $C = \max_{1\leq|\alpha|\leq l}\|C_\alpha\|_{L^\infty(Q_T)}$, μ_1, μ_2 — сталі, які залежать від Ω, l, n, оскільки елементи матриць $A_{\alpha\beta}$, $A_{\alpha\beta,t}$, $B_{\alpha\beta}$, $B_{\alpha\beta,t}$ обмежені, а на підставі теореми 1.17 [12, с. 177] справедлива формула інтегрування частинами в $\mathfrak{T}_2$; крім того, на підставі наслідку з [11, с. 27], маємо оцінки

$$\int_\Omega\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l}\left(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u, D^\beta u\right)dx \leq \int_\Omega\left(a_l^1\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + a_0^1|u|^2\right)dx,$$
$$\int_\Omega\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l}\left(A_{\alpha\beta,t}(x,t)D^\alpha u, D^\beta u\right)dx \leq \int_\Omega\left(a_l^2\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + a_0^2|u|^2\right)dx, \tag{5}$$
$$\int_\Omega\sum_{|\alpha|=|\beta|\leq l}\left(B_{\alpha\beta}(x,t)D^\alpha u, D^\beta u\right)dx \leq \int_\Omega\left(b_l^1\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + b_0^1|u|^2\right)dx,$$

$$\int_\Omega \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta,t}(x,t)D^\alpha u, D^\beta u\right)dx \le \int_\Omega \left(b_l^2 \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha u\right|^2 + b_0^2|u|^2 \right)dx.$$

З оцінок інтегралів $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{T}_2$ одержуємо нерівність

$$\int_{Q_\tau}\left[b_l \sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u_t\right|^2 + \left(b_0 - \frac{\delta_0}{2}\right)|u_t|^2 \right]dx\,dt + \int_{\Omega_\tau}\left[a_l \sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + a_0|u|^2 \right]dx \le$$

$$\le \int_{Q_\tau}\left[\left(a_l^2 + \frac{C\mu_1}{2\delta}\right)\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u\right|^2 + \left(a_0^2 + \frac{C\mu_2}{2\delta_0}\right)|u|^2 \right]dx\,dt,$$

де $\delta_0 \le b_0$. Використовуючи лему Гронуолла – Белмана, маємо, що $\|u(t)\|_V \le 0$ для майже всіх $t \in (0,T)$. Отже, $u_1 = u_2$ майже скрізь в Q_T.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови теореми* 1 *і, крім того,* $f_\alpha \in C\left([0,T]; \left(L^2(\Omega)\right)^N\right)$ *для всіх* $|\alpha| \le l$. *Тоді існує розв'язок задачі* (1), (2).

Доведення. Розв'язок варіаційної нерівності (1) з початковою умовою (2) шукаємо за допомогою методу штрафу і методу гіперболічної регуляризації.

Розглянемо послідовність функцій

$$u^s(x,t) = \sum_{k=1}^{s} z_k^s(t)\varphi^k(x), \quad s = 1, 2, \ldots,$$

де $\varphi^k(x)$ — база простору V, а $z_1^s, \ldots, z_s^s$ є розв'язком задачі Коші

$$\varepsilon\left\langle u_{tt}, \varphi^k \right\rangle + \left\langle Mu_t^s, \varphi^k \right\rangle + \left\langle Lu^s, \varphi^k \right\rangle + \frac{1}{\varepsilon}\left\langle B(u_t^s), \varphi^k \right\rangle = \left\langle F, \varphi^k \right\rangle, \tag{6}$$

$$z_k^s(0) = 0, \qquad z_{k,t}^s(0) = 0, \quad k = 1, \ldots, s, \tag{7}$$

B — оператор штрафу [13, c. 370], $Bu = J\left(u - P_{K_1}u\right)$, де J — оператор двоїстості між просторами V і V^*, P_K — оператор проектування на множину K; ε — додатний параметр.

Домножимо рівність (6) на $z_{k,t}^s(t)$ і проінтегруємо відносно t на проміжку $(0,\tau)$, $0 \le \tau \le T$. Отримаємо рівність

$$\int_{Q_\tau}\left[\varepsilon\left(u_{tt}^s, u_t^s\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(B_{\alpha\beta}D^\beta u_t^s, D^\alpha u_t^s\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta}D^\beta u^s, D^\alpha u_t^s\right) + \right.$$

$$\left. + \sum_{1\le|\alpha|\le l}\left(C_\alpha D^\alpha u^s, u_t^s\right) + \sum_{|\alpha|\le l}\left(f_\alpha, D^\alpha u_t^s\right) \right]dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^\tau \left\langle B\left(u_t^s\right), u_t^s \right\rangle dt = 0. \tag{8}$$

Враховуючи (5), оцінимо кожний член останньої рівності:

$$\mathfrak{T}_3 = \varepsilon\int_{Q_\tau}\left(u_{tt}^s, u_t^s\right)dx\,dt = \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Omega_\tau}\left|u_t^s\right|^2 dx,$$

$$\mathfrak{T}_4 = \int_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta}D^\beta u^s, D^\alpha u_t^s\right)dx\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^s, D^\alpha u^s\right)dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta,t}(x,t)D^\beta u^s, D^\alpha u^s\right)dx\,dt \ge$$

$$\ge \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left[a_l\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u^s\right|^2 + a_0\left|u^s\right|^2\right]dx -$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[a_l^2\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u^s\right|^2 + a_0^2\left|u^s\right|^2\right]dx\,dt,$$

$$\mathfrak{X}_5 = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(B_{\alpha\beta}D^\beta u_t^s, D^\alpha u_t^s\right) \ge \int\limits_{Q_\tau}\left[b_l\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u_t^s\right|^2 + b_0\left|u_t^s\right|^2\right]dx\,dt,$$

$$\mathfrak{X}_6 = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{1\le|\alpha|\le l}\left(C_\alpha D^\alpha u^s, u_t^s\right)dx\,dt \le \frac{\delta_0}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left|u_t^s\right|^2 dx\,dt +$$

$$+\frac{C}{2\delta_0}\int\limits_{Q_\tau}\left[\mu_1\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u^s\right|^2 + \mu_2\left|u^s\right|^2\right]dx\,dt,$$

$$\mathfrak{X}_7 = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le l}\left(f_\alpha, D^\alpha u_t^s\right)dx\,dt \le \frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le l}|f_\alpha|^2\,dx\,dt +$$

$$+\frac{\delta_1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\left[\mu_3\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u_t^s\right|^2 + \mu_4\left|u_t^s\right|^2\right]dx\,dt,$$

$$\mathfrak{X}_8 = \int\limits_0^\tau\left\langle B(u_t^s), u_t^s\right\rangle dt, \quad \delta_0 > 0, \quad \delta_1 > 0.$$

Використовуючи ці перетворення, одержуємо нерівність

$$\varepsilon\int\limits_{\Omega_\tau}\left|u_t^s\right|^2 dx + \int\limits_{\Omega_\tau}\left(a_l\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u^s\right|^2 + a_0\left|u^s\right|^2\right)dx +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}(2b_l-\delta_1\mu_3)\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u_t^s\right|^2 dx\,dt +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}(2b_0-\delta_1\mu_4-\delta_0)\left|u_t^s\right|^2 dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\left\langle B(u_t^s), u_t^s\right\rangle dt \le$$

$$\le \int\limits_{Q_\tau}\left[\left(a_l^2+\frac{C\mu_1}{\delta_0}\right)\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u^s\right|^2 + \left(a_0^2+\frac{C\mu_2}{\delta_0}\right)\left|u^s\right|^2\right]dx\,dt + \frac{1}{2\delta_1}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|\le l}|f_\alpha|^2\,dx\,dt. \tag{9}$$

Вибираючи δ_0 і δ_1 так, щоб відповідні доданки були додатними, та використовуючи лему Гронуолла – Белмана, з нерівності (9) для $u^s(x,t)$ маємо оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left|u_t^s\right|^2 dx \le \nu_1\varepsilon, \quad \tau\in[0,T];$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u^s\right|^2+\left|u^s\right|^2\right]dx \le \nu_1, \quad \tau\in[0,T]; \tag{10}$$

$$\int\limits_{Q_T}\left[\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u_t^s\right|^2+\left|u_t^s\right|^2\right]dx\,dt \le \nu_1;$$

$$\int\limits_0^T \left\langle B\left(u_t^s\right), u_t^s\right\rangle dt \le \varepsilon\nu_1.$$

З того, що $f_\alpha\in C\left([0,T];\left(L^2(\Omega)\right)^N\right)$, і з (10) випливають оцінки

$$\int\limits_{\Omega_\delta}\left|u_t^s\right|^2 dx \le \delta\mu; \qquad \int\limits_{\Omega_\delta}\left[\sum_{|\alpha|=l}\left|D^\alpha u^s\right|^2+\left|u^s\right|^2\right]dx \le \delta\mu.$$

Доведемо тепер рівномірну збіжність послідовності $\left\{u^s(x,t)\right\}$ в просторі $C([0,T];V)$ і послідовності $\left\{u_t^s(x,t)\right\}$ в просторі $C\left([0,T];\left(L^2(\Omega)\right)^N\right)$. Для цього розглянемо рівність (6) при t та $t+\delta$ і домножимо дані рівності на $z_{k,t}^s(t+\delta)-z_{k,t}^s(t)$. Маємо

$$\varepsilon\left\langle u_{tt}^s(t+\delta),\bar u_t^s(t)\right\rangle+\left\langle Mu_t^s(t+\delta),\bar u_t^s(t)\right\rangle+\left\langle Au^s(t+\delta),\bar u_t^s(t)\right\rangle+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\langle B(u_t^s(t+\delta)),\bar u_t^s(t)\right\rangle=\left\langle F(t+\delta),\bar u_t^s(t)\right\rangle;$$

$$\varepsilon\left\langle u_{tt}^s(t),\bar u_t^s(t)\right\rangle+\left\langle Mu_t^s(t),\bar u_t^s(t)\right\rangle+\left\langle Au^s(t),\bar u_t^s(t)\right\rangle+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\langle B(u_t^s(t)),\bar u_t^s(t)\right\rangle=\left\langle F(t),\bar u_t^s(t)\right\rangle,$$

де $u^s(x,t)=u^s(x,t+\delta)-u^s(x,t)$.

Віднімаючи останні рівності та інтегруючи за змінною t, одержуємо

$$\int\limits_{Q_\tau}\Bigg[\varepsilon\left(\bar u_{tt}^s,\bar u_t^s\right)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(B_{\alpha\beta}(x,t+\delta)D^\beta u_t^s(x,t+\delta)-B_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u_t^s(x,t),D^\alpha\bar u_t^s\right)+$$

$$+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta}(x,t+\delta)D^\beta u^s(x,t+\delta)-A_{\alpha\beta}(x,t)D^\beta u^s(x,t),D^\alpha\bar u_t^s\right)+$$

$$+\sum_{1\le|\alpha|\le l}\left(C_\alpha(x,t+\delta)D^\alpha u^s(x,t+\delta)-C_\alpha(x,t)D^\alpha u^s(x,t),\bar u_t^s\right)-$$

$$-\sum_{|\alpha|\le l}\left(f_\alpha(x,t+\delta)-f_\alpha(x,t),D^\alpha\bar u_t^s\right)\Bigg]dx\,dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau\left\langle B\left(u_t^s(x,t+\delta)\right)-B\left(u_t^s(x,t)\right),\bar u_t^s\right\rangle dt=0. \tag{11}$$

Проведемо деякі перетворення, використовуючи при цьому оцінки (5):

$$\mathfrak{T}_9=\int\limits_{Q_\tau}\varepsilon\left(\bar u_{tt}^s,\bar u_t^s\right)dx\,dt=\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left|\bar u_t^s\right|^2dx-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_{\Omega_\delta}\left|u_t^s\right|^2dx,$$

$$\mathfrak{T}_{10} = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta}(x,t+\delta)D^\beta \bar{u}_t^s, D^\alpha \bar{u}_t^s\right) dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(\left(B_{\alpha\beta}(x,t+\delta) - B_{\alpha\beta}(x,t)\right) D^\beta u_t^s(x,t), D^\alpha \bar{u}_t^s(x,t)\right) dx\,dt \ \ge$$

$$\ge \int\limits_{Q_\tau} \left(b_l \sum_{|\alpha|=m} \left|D^\alpha \bar{u}_t^s\right|^2 + b_0 \left|\bar{u}_t^s\right|^2 \right) dx\,dt -$$

$$- \max_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left\| B_{\alpha\beta}(\cdot,t+\delta) - B_{\alpha\beta}(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_6 \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha u_t^s\right|^2 + \mu_7 \left|u_t^s\right|^2 \right) dx\,dt -$$

$$- \max_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left\| B_{\alpha\beta}(\cdot,t+\delta) - B_{\alpha\beta}(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_8 \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha \bar{u}_t^s\right|^2 + \mu_9 \left|\bar{u}_t^s\right|^2 \right) dx\,dt,$$

$$\mathfrak{T}_{11} = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta}(x,t+\delta)D^\beta \bar{u}^s(x,t), D^\alpha \bar{u}_t^s(x,t)\right) dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(\left(A_{\alpha\beta}(x,t+\delta) - A_{\alpha\beta}(x,t)\right) D^\beta u^s(x,t), D^\beta \bar{u}_t^s(x,t)\right) dx\,dt \ \ge$$

$$\ge \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \left(a_l \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha \bar{u}^s\right|^2 + a_0 \left|\bar{u}^s\right|^2 \right) dx - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\delta} \left(a_l^1 \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha u^s\right|^2 + a_0^1 \left|u^s\right|^2 \right) dx -$$

$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left(a_l^2 \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha \bar{u}^s\right|^2 + a_0^2 \left|\bar{u}^s\right|^2 \right) dx\,dt -$$

$$- \max_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left\| A_{\alpha\beta}(\cdot,t+\delta) - A_{\alpha\beta}(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_{10} \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha \bar{u}_t^s\right|^2 + \mu_{11} \left|\bar{u}_t^s\right|^2 \right) dx\,dt -$$

$$- \max_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left\| A_{\alpha\beta}(\cdot,t+\delta) - A_{\alpha\beta}(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_{12} \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha u^s\right|^2 + \mu_{13} \left|u^s\right|^2 \right) dx\,dt,$$

$$\mathfrak{T}_{12} = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(\left(C_\alpha(x,t+\delta) - C_\alpha(x,t)\right) D^\alpha u^s(x,t), \bar{u}_t^s(x,t)\right) dx\,dt +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha(x,t) D^\alpha \bar{u}^l(t), \bar{u}_t^s(x,t)\right) dx\,dt \ \ge$$

$$\ge -\frac{C}{2\delta_0} \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_{14} \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha \bar{u}^s\right|^2 + \mu_{15} \left|\bar{u}^s(x,t)\right|^2 \right) dx\,dt - \frac{\delta_0}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left|\bar{u}_t^s\right|^2 dx\,dt -$$

$$- \max_{1\le|\alpha|\le l} \left\| C_\alpha(\cdot,t+\delta) - C_\alpha(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_{16} \sum_{|\alpha|=l} \left|D^\alpha u^s\right|^2 + \mu_{17} \left|u^s(x,t)\right|^2 \right) dx\,dt -$$

$$- \max_{1\le|\alpha|\le l} \left\| C_\alpha(\cdot,t+\delta) - C_\alpha(\cdot,t)\right\|_{L^\infty(\Omega)} \int\limits_{Q_\tau} \left|\bar{u}_t^s(x,t)\right|^2 dx\,dt,$$

$$\mathfrak{T}_{13} = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha| \le l} \left(f_\alpha(x, t+\delta) - f_\alpha(x, t), D^\alpha \bar{u}_t^s \right) dx\, dt \le$$

$$\le \frac{1}{2\delta_1} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha| \le l} \left| f_\alpha(x, t+\delta) - f_\alpha(x, t) \right|^2 dx\, dt +$$

$$+ \frac{\delta_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_{18} \sum_{|\alpha| = l} \left| D^\alpha \bar{u}_t^s \right|^2 + \mu_{19} \left| \bar{u}_t^s \right|^2 \right) dx\, dt.$$

Оскільки функції $A_{\alpha\beta}(x, t)$, $A_{\alpha\beta, t}(x, t)$, $B_{\alpha\beta}(x, t)$, $B_{\alpha\beta, t}(x, t)$, $C_\alpha(x, t)$ та $f_\alpha(x, t)$ неперервні за змінною t, то для довільного $\sigma > 0$ існує таке δ, що

$$\max_{|\alpha| = |\beta| \le l} \left\| A_{\alpha\beta}(\cdot, t+\delta) - A_{\alpha\beta}(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sigma;$$

$$\max_{|\alpha| = |\beta| \le l} \left\| B_{\alpha\beta}(\cdot, t+\delta) - B_{\alpha\beta}(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sigma;$$

$$\max_{1 \le |\alpha| \le l} \left\| C_\alpha(\cdot, t+\delta) - C_\alpha(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sigma;$$

$$\max_{|\alpha| \le l} \left\| f_\alpha(\cdot, t+\delta) - f_\alpha(\cdot, t) \right\|_{L^\infty(\Omega)} \le \sigma.$$

Тоді

$$\varepsilon \int\limits_{\Omega_\tau} \left| \bar{u}_t^s \right|^2 dx + \int\limits_{\Omega_\tau} \left[(a_l - 2\sigma\mu_{10}) \sum_{|\alpha| = l} \left| D^\alpha \bar{u}^s \right|^2 + (a_0 - 2\sigma\mu_{11}) \left| \bar{u}^s \right|^2 \right] dx +$$

$$+ \int\limits_{Q_\tau} \left[(2b_l - 2\sigma\mu_8 - \delta_1\mu_{18}) \sum_{|\alpha| = l} \left| D^\alpha \bar{u}_t^s \right|^2 + (2b_0 - 2\sigma(\mu_9 + 1) - \delta_0 - \delta_1\mu_{19}) \left| \bar{u}_t^s \right|^2 \right] dx\, dt \le$$

$$\le \varepsilon \int\limits_{\Omega_\delta} \left| u_t^s \right|^2 dx + \int\limits_{\Omega_\delta} \left(a_l^1 \sum_{|\alpha| = l} \left| D^\alpha u^s \right|^2 + a_0^1 \left| u^s \right|^2 \right) dx +$$

$$+ 2\sigma \int\limits_{Q_\tau} \left[(\mu_{12} + \mu_{16}) \sum_{|\alpha| = l} \left| D^\alpha u^s \right|^2 + (\mu_{13} + \mu_{17}) \left| u^s \right|^2 \right] dx\, dt +$$

$$+ 2\sigma \int\limits_{Q_\tau} \left(\mu_6 \sum_{|\alpha| = l} \left| D^\alpha u_t^s \right|^2 + \mu_7 \left| u_t^s \right|^2 \right) dx\, dt + \bar{\nu}\sigma^2.$$

З останньої нерівності отримуємо такі оцінки:

$$\begin{gathered} \varepsilon \int\limits_{\Omega_\tau} \left| u_t^s(x, t+\delta) - u_t^s(x, t) \right|^2 dx \le \nu_2\sigma; \\ \int\limits_{\Omega_\tau} \left(\sum_{|\alpha| = l} \left| D^\alpha \bar{u}^s(x, t) \right|^2 + \left| \bar{u}^s \right|^2 \right) dx \le \nu_2\sigma, \qquad \tau \in [0, T]. \end{gathered} \tag{12}$$

З оцінок (10), (12) випливає існування підпослідовності $\{u^p(x, t)\}$ послідовності $\{u^s(x, t)\}$ такої, що

$$u^p \to u^\varepsilon \quad \text{слабко в} \quad L^2((0, T); V),$$

$$
\begin{gathered}
u_t^p \to u_t^\varepsilon \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T);V), \\
u^p \to u^\varepsilon \quad \text{рівномірно в} \quad C([0,T];V), \\
u_t^p \to u_t^\varepsilon \quad \text{рівномірно в} \quad C\left([0,T];\left(L^2(\Omega)\right)^N\right), \\
B\left(u_t^p\right) \to \omega \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T);V^*)
\end{gathered}
\tag{13}
$$

при $p \to \infty$.

Нехай k у рівняннях (6) змінюється від 1 до s_0. Згідно з (13)

$$
\begin{gathered}
\left\langle L(t)u^s, \varphi^k \right\rangle \to \left\langle L(t)u^\varepsilon, \varphi^k \right\rangle \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T), \\
\left\langle M(t)u_t^s, \varphi^k \right\rangle \to \left\langle M(t)u_t^\varepsilon, \varphi^k \right\rangle \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T), \\
\left\langle B\left(u_t^s\right), \varphi^k \right\rangle \to \left\langle \omega^\varepsilon, \varphi^k \right\rangle \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T), \\
\left\langle u_t^s, \varphi^k \right\rangle \to \left\langle u_t^\varepsilon, \varphi^k \right\rangle \quad \text{слабко в} \quad L^2(0,T)
\end{gathered}
$$

при $s \to \infty$. Тому

$$
\left\langle u_{tt}^s, \varphi^k \right\rangle = \frac{d}{dt}\left\langle u_t^s, \varphi^k \right\rangle \to \left\langle u_{tt}^\varepsilon, \varphi^k \right\rangle \quad \text{в} \quad \mathcal{D}'(0,T)
$$

і, враховуючи те, що $\left\{\varphi^k(x)\right\}$ є базою в V, маємо рівність

$$
\varepsilon\left\langle u_{tt}^\varepsilon, v \right\rangle = -\left\langle M(t)u_t^\varepsilon + L(t)u^\varepsilon - F(t), v \right\rangle - \frac{1}{\varepsilon}\left\langle \omega^\varepsilon, v \right\rangle
$$

для довільної $v \in V$. Отже, з цієї рівності та з означення операторів M, L, F, B одержуємо включення $u_{tt}^\varepsilon \in L^2((0,T);V^*)$. Оскільки простори $V \subset L^2(\Omega) \subset$ $\subset V^*$ компактно вкладені і $u_t \in L^2((0,T);V)$, то згідно з теоремою 1.17 [12, с. 177] має зміст інтеграл $\int_0^\tau \left\langle u_{tt}^\varepsilon, v \right\rangle dt$ для $v \in W$ і

$$
\int\limits_0^\tau \left\langle u_{tt}^\varepsilon, v \right\rangle dt = \int\limits_{\Omega_\tau} \left(u_t^\varepsilon, v\right) dx - \int\limits_0^\tau \left\langle u_t^\varepsilon, v_t \right\rangle dt, \quad \tau \in [0,T].
$$

Отже, u^ε задовольняє рівність

$$
\begin{gathered}
\varepsilon \int\limits_0^\tau \left\langle u_{tt}^\varepsilon, v \right\rangle dt + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t^s, D^\alpha v\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u^\varepsilon, D^\alpha v\right) + \\
+ \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u^\varepsilon, v\right) - \sum_{|\alpha|\le l} \left(f_\alpha, D^\alpha v\right) \Bigg] dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \left\langle \omega^\varepsilon, v \right\rangle dt = 0
\end{gathered}
\tag{14}
$$

для довільної функції $v \in W$ і довільного $\tau \in (0,T]$. Оскільки оператор B монотонний [13, с. 384], то аналогічно з [13, с. 171] легко довести, що $\omega^\varepsilon = B\left(u_t^\varepsilon\right)$.

Покладемо в рівності (14) $v = u_t^\varepsilon$:

$$
\begin{gathered}
\varepsilon \int\limits_0^\tau \left\langle u_{tt}^\varepsilon, u_t^\varepsilon \right\rangle dt + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t^\varepsilon, D^\alpha u_t^\varepsilon\right) + \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u^\varepsilon, D^\alpha u_t^\varepsilon\right) + \\
+ \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u^\varepsilon, u_t^\varepsilon\right) - \sum_{|\alpha|\le l} \left(f_\alpha, D^\alpha u_t^\varepsilon\right) \Bigg] dx\,dt + \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_0^\tau \left\langle B\left(u_t^\varepsilon\right), u_t^\varepsilon \right\rangle dt = 0.
\end{gathered}
\tag{15}
$$

Зазначимо, що рівність (14) для функцій u^{ε} збігається з рівністю (8) для функцій u^s. Тому, аналогічно як для послідовності $\{u^s\}$, для $\{u^{\varepsilon}\}$ отримуємо оцінки

$$\begin{gathered}
\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\left|u^{\varepsilon}\right|^2+\sum_{|\alpha|=l}\left|D^{\alpha}u^{\varepsilon}\right|^2\Big]dx \le \nu_3, \quad \tau\in[0,T];\\
\int\limits_{\Omega_\tau}\Big[\left|u^{\varepsilon}(t+\delta)-u^{\varepsilon}(t)\right|^2+\sum_{|\alpha|=l}\left|D^{\alpha}u^{\varepsilon}(t+\delta)-D^{\alpha}u^{\varepsilon}(t)\right|^2\Big]dx \le \nu_4\sigma, \quad \tau\in[0,T];\\
\int\limits_{Q_T}\Big[\sum_{|\alpha|=l}\left|D^{\alpha}u_t^{\varepsilon}\right|^2+\left|u_t^{\varepsilon}\right|^2\Big]dx\,dt \le \nu_3;\\
\int\limits_0^T\left\langle B(u_t^{\varepsilon}),u_t^{\varepsilon}\right\rangle dt = \varepsilon\nu_3; \qquad \int\limits_{\Omega_\tau}\left|u_t^{\varepsilon}\right|^2dx \le \varepsilon\nu_3, \quad \tau\in[0,T].
\end{gathered} \tag{16}$$

З оцінок (16) випливає існування такої підпослідовності $\{u^{\varepsilon_m}(x,t)\}$ множини $\{u^{\varepsilon}(x,t)\}$, що

$$\begin{gathered}
u^{\varepsilon_m}\to u \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T);V),\\
u_t^{\varepsilon_m}\to u_t \quad \text{слабко в} \quad L^2((0,T);V),\\
u^{\varepsilon_m}\to u \quad \text{сильно в} \quad L^2((0,T);V),\\
u^{\varepsilon_m}\to u \quad \text{рівномірно в} \quad C([0,T];V),\\
\varepsilon_m u^{\varepsilon_m}\to 0 \quad \text{слабко в} \quad L^{\infty}\Big((0,T);\big(L^2(\Omega)\big)^N\Big)
\end{gathered} \tag{17}$$

при $\varepsilon_m\to 0$. Покладемо в рівності (14) $v=w-u_t^{\varepsilon_m}$, $w\in W$, $w\in K$ майже для всіх $t\in(0,T)$, і перетворимо окремі доданки таким чином:

$$\mathfrak{T}_{14} = -\varepsilon_m\int\limits_0^{\tau}\left\langle u_t^{\varepsilon_m}, w_t-u_{tt}^{\varepsilon_m}\right\rangle dt+\varepsilon_m\int\limits_{\Omega_\tau}\left\langle u_t^{\varepsilon_m}, w-u_t^{\varepsilon_m}\right\rangle dx =$$

$$= -\varepsilon_m\int\limits_0^{\tau}\left\langle u_t^{\varepsilon_m}, w_t\right\rangle dt-\frac{\varepsilon_m}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\left|u_t^{\varepsilon_m}\right|^2dx+\varepsilon_m\int\limits_{\Omega_\tau}\left(u_t^{\varepsilon_m}, w\right)dx,$$

$$\mathfrak{T}_{15} = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(B_{\alpha\beta}D^{\beta}u_t^{\varepsilon_m}, D^{\alpha}w-D^{\alpha}u_t^{\varepsilon_m}\right)dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(B_{\alpha\beta}D^{\beta}u_t^{\varepsilon_m}, D^{\alpha}w\right)dx\,dt-\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(B_{\alpha\beta}D^{\beta}u_t^{\varepsilon_m}, D^{\alpha}u_t^{\varepsilon_m}\right)dx\,dt,$$

$$\mathfrak{T}_{16} = \int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta}D^{\beta}u^{\varepsilon_m}, D^{\alpha}w-D^{\alpha}u_t^{\varepsilon_m}\right)dx\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta}D^{\beta}u^{\varepsilon_m}, D^{\alpha}u^{\varepsilon_m}\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta,t}D^{\beta}u^{\varepsilon_m}, D^{\alpha}u^{\varepsilon_m}\right)dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\left(A_{\alpha\beta}D^{\beta}u^{\varepsilon_m}, D^{\alpha}w\right)dx\,dt,$$

$$\mathfrak{T}_{17} = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u^{\varepsilon_m}, w - u_t^{\varepsilon_m}\right) dx\,dt =$$

$$= \int\limits_{Q_\tau} \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u^{\varepsilon_m}, w\right) dx\,dt - \int\limits_{Q_\tau} \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u^{\varepsilon_m}, u_t^{\varepsilon_m}\right) dx\,dt.$$

Оскільки $B(w) = 0$ та $\langle B(u_t) - B(w), u_t - w \rangle \ge 0$, то, беручи до уваги $\mathfrak{T}_{14}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{T}_{17}$, отримуємо нерівність

$$-\varepsilon_m \int\limits_0^\tau \left\langle u_t^{\varepsilon_m}, w_t \right\rangle dt + \varepsilon_m \int\limits_{\Omega_\tau} \left(u_t^{\varepsilon_m}, w\right) dx + \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t^{\varepsilon_m}, D^\alpha w\right) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u^{\varepsilon_m}, D^\alpha w\right) + \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u^{\varepsilon_m}, w\right) \Bigg] dx\,dt -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t^{\varepsilon_m}, D^\alpha u_t^{\varepsilon_m}\right) -$$

$$- \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta,t} D^\beta u^{\varepsilon_m}, D^\alpha u^{\varepsilon_m}\right) + \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u^{\varepsilon_m}, u_t^{\varepsilon_m}\right) \Bigg] dx\,dt -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le l} \left(f_\alpha, D^\beta w - D^\alpha u_t^{\varepsilon_m}\right) dx\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta} D^\alpha u^{\varepsilon_m}, D^\alpha u^{\varepsilon_m}\right) dx \ge 0. \quad (18)$$

На підставі умови В)

$$-\liminf_{\varepsilon_m \to 0} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t^{\varepsilon_m}, D^\alpha u_t^{\varepsilon_m}\right) dx\,dt \le$$

$$\le -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t, D^\alpha u_t\right) dx\,dt. \quad (19)$$

Отже, використовуючи (17), (19), знаходимо нижню границю при $\varepsilon_m \to 0$ в нерівності (18). Маємо

$$\int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t, D^\alpha w\right) +$$

$$+ \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha w\right) + \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\beta u, w\right) \Bigg] dx\,dt -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} \Bigg[\sum_{|\alpha|\le|\beta|\le l} \left(B_{\alpha\beta} D^\beta u_t, D^\alpha u_t\right) - \frac{1}{2} \sum_{|\alpha|\le|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta,t} D^\beta u, D^\alpha u\right) +$$

$$+ \sum_{1\le|\alpha|\le l} \left(C_\alpha D^\alpha u, u_t\right) \Bigg] dx\,dt -$$

$$- \int\limits_{Q_\tau} \sum_{|\alpha|\le l} \left(f_\alpha, D^\alpha w - D^\alpha u_t\right) dx\,dt - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{|\alpha|=|\beta|\le l} \left(A_{\alpha\beta} D^\beta u, D^\alpha u\right) dx \ge 0$$

або інакше

$$\int_{Q_\tau}\Bigg[\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\big(B_{\alpha\beta}(x,t)D^{\beta}u_t,\,D^{\alpha}(w-u_t)\big)+\sum_{|\alpha|=|\beta|\le l}\big(A_{\alpha\beta}D^{\beta}u,\,D^{\alpha}(w-u_t)\big)+$$

$$+\sum_{1\le|\alpha|\le l}\big(C_{\alpha}(x,t)D^{\alpha}u,\,w-u_t\big)+\sum_{|\alpha|\le l}\big(f_{\alpha},\,D^{\alpha}(w-u_t)\big)\Bigg]dx\,dt\;\ge\;0$$

для довільного $w\in W$, $w\in K$ для майже всіх $t\in(0,T)$. Крім того, цілком аналогічно як в [13, с. 386] доводимо, що $u_t\in K$ для майже всіх $t\in(0,T)$. Отже, $u(x,t)$ є розв'язком задачі (1), (2) і теорему 2 доведено.

1. *Баренблат Г. И., Желтов Ю. П., Кочина Т. Н.* Об основных представлениях теории фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах // Прикл. математика и механика. – 1960. – **24**. – Вып. 5. – С. 852–864.
2. *Рубинштейн Л. И.* К вопросу о процессе распространения тепла в гетерогенных средах // Изв. АН СССР. Сер. география и геофизика. – 1948. – **12**, № 1. – С. 27–45.
3. *Di Benedetto E., Showalter R. E.* A pseudo-parabolic variational inequality and Stefan Problem // Nonlinear analysis, theory, methods, applications. – 1982. – **6**, № 3. – P. 279–291.
4. *Scarpini F.* Generate and pseudoparabolic variational inequalities: Approximate solutions // Numer. funct. anal. and optiz. – 1987. – **9**. – P. 859–879.
5. *Brill H.* Cauchy Probleme fuer nichtlineare parabolische und pseudoparabolische Gleichungen // Diss. dokt. naturwiss. Abt. Math. Ruhr-uni. – Bochum, 1974. – 111 S.
6. *Ting T. W.* Parabolic and pseudoparabolic partial differential equations // J. Math. Soc. Japan. – 1969. – **21**, № 3. – P. 440–453.
7. *Гальперн С. А.* Задача Коши для общих систем линейных уравнений с частными производными // Докл. АН СССР. – 1958. – **119**, № 4. – С. 640–643.
8. *Ford W. H.* Galerkin approximations to non-linear pseudo-parabolic partial differential equations // Aequet. math. – 1976. – **14**, № 3. – P. 271–291.
9. *Бас М. О., Лавренюк С. П.* Про єдиність розв'язку задачі Фур'є для однієї системи типу Соболєва – Гальперна // Там же. – 1996. – **48**, № 1. – С. 124–128.
10. *Лавренюк С. П., Пташник М. Б.* Деякі нелінійні псевдопараболічні варіаційні нерівності без початкових умов // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 3. – С. 328–337.
11. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1985. – 416 с.
12. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
13. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Наука, 1972. – 608 с.

Одержано 23.10.01