УДК 511.3 + 517.9

В. Ю. Макаров (Брян. ун-т, Россия)

ПОРЯДКИ СТЕПЕННОГО РОСТА ВБЛИЗИ КРИТИЧЕСКОЙ ПОЛОСЫ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ РИМАНА

We study asymptotic behavior of the functions $\zeta(z)$ and $\zeta^{-1}(z)$ near the line $x = 1$.

Вивчається асимптотична поведінка функцій $\zeta(z)$ та $\zeta^{-1}(z)$ поблизу прямої $x = 1$.

Рассмотрим две функции, представленные одномерными рядами экспонент:

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-z\log n}, \qquad \zeta^{-1}(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(n) e^{-z\log n},$$

где $\mu(n)$ — функция Мебиуса: $\mu(1) = 1$, $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат простого числа, в противном случае $\mu(n) = (-1)^k$, k — число простых множителей числа n!. Оба ряда сходятся абсолютно в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 1$, где прямая $x = 1$ — правая граница критической полосы в гипотезе Римана: все нетривиальные нули дзета-функции Римана лежат на прямой $x = 1/2$.

Учитывая, что оба ряда отличаются коэффициентами, рассмотрим более общий случай.

Пусть ряд

$$G(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} A_n e^{-z\log n}, \tag{1}$$

где $A_n \in \mathbf{C}$ — коэффициенты, $\lambda_n = \log n$ — показатели, сходится абсолютно в правой полуплоскости $\mathrm{Re}\, z > 1$, $|A_n| \le 1 \quad \forall n \in N$.

Введем понятие порядка степенного роста для функции $G(z)$ вблизи критической полосы, подходя справа к прямой $x = 1$. Порядок степенного роста вводится аналогично [1], но в одномерном случае.

Пусть

$$M(G, x) = \sup_{y \in \mathbf{R}} \{|G(x+iy)|\},$$

обозначим расстояние $d = x - 1 > 0$. Пусть функция $\beta(d) \colon \beta(d) > 1$, $\lim_{d \to 0+} \beta(d) = 1$, $\beta(n) > 1 + \log_n \log^{1+\varepsilon} n$, $n \ge n_0$, $\varepsilon > 0$ достаточно мало.

Определение. *Порядком степенного роста вблизи прямой* $\mathrm{Re}\, z = 1$ *назовем величину*

$$\rho_D(1, \beta) = \varlimsup_{d \to 0+} \frac{\log\{\beta(d) M(G, x)\}}{\log(1/d)} \ge 1.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть показатели ряда* (1) *удовлетворяют условию*:

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\beta(n)\log n} = L \in \mathbf{R}^+.$$

Тогда порядок $\rho_D(1, \beta)$ *функции* $G(z)$ *вычисляется по формуле*

$$\rho_D(1, \beta) = \varlimsup_{n \to +\infty} \frac{\log^+ \left\{ |A_n| e^{(\beta(n)-1)\log n} \right\}}{\log\log n}. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть функция $G(z)$ имеет конечный порядок степенного роста. Тогда для любого достаточно малого числа $\varepsilon > 0$ и для всех расстояний $d \in (0, d_0(\varepsilon))$ справедливо неравенство

$$\frac{\log\{\beta(d)M(G,x)\}}{\log(1/d)} < \rho_D(1,\beta) + \varepsilon = \rho > 0.$$

Учитывая, что $\beta(d) > 1$, получаем

$$\frac{\log\{M(G,x)\}}{\log(1/d)} < \rho$$

или

$$M(G,x) < d^{-\rho}. \tag{3}$$

Воспользуемся неравенствами Коши для коэффициентов ряда экспонент: для всех $n \in \mathbf{N}$ $|A_n| \le M(G,x)e^{x\log n}$ и, учитывая (3), имеем

$$|A_n| < d^{-\rho}\exp(x\log n). \tag{4}$$

Умножим обе части неравенства (4) на $\exp\{(\beta(n)-1)\log n\}$. Тогда

$$|A_n|e^{(\beta(n)-1)\log n} < d^{-\rho}e^{d\log n}e^{\beta(n)} = \Psi(d)e^{\beta(n)}. \tag{4$'$}$$

Минимизируем правую часть неравенства (4). С этой целью найдем первую и вторую производные:

$$\Psi'_d(d) = -\rho d^{-\rho-1}e^{d\log n} + d^{-\rho}\log n\, e^{d\log n} =$$

$$= d^{-\rho}\left(\log n - \frac{\rho}{d}\right)e^{d\log n} = 0 \Rightarrow d = d_1 = \frac{\rho}{\log n} \to 0+, \quad n \to +\infty,$$

и

$$\Psi''_{d^2} = d^{-\rho}e^{d\log n}\left\{\rho d^{-2} + (\log n - \rho d^{-1})^2\right\} > 0.$$

Отсюда следует, что в единственной стационарной точке функция $\Psi(d)$ достигает локального и абсолютного минимума и для всех натуральных $n \ge n_0 > 1$ величина $d_1 = \rho/\log n$ удовлетворяет неравенству (4), так как $d_1 \in (0, d_0)$. Тогда неравенство (4) преобразуется к виду

$$|A_n|e^{(\beta(n)-1)\log n} < (\log n)^{\rho}\left(\frac{e}{\rho}\right)^{\rho}e^{\beta(n)}$$

или

$$\log\left\{|A_n|e^{(\beta(n)-1)\log n}\right\} < \rho\log\log n + \rho\log\frac{e}{\rho} + \beta(n).$$

В последнем неравенстве делим на $\log\log n > 0$ для всех $n \ge n_0 \ge 3$ и переходим к пределу, если $n \to +\infty$. Имеем

$$\gamma_\beta = \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log^+\left(|A_n|e^{(\beta(n)-1)\log n}\right)}{\log\log n} \le \rho_D(1,\beta) + \varepsilon.$$

Устремляя $\varepsilon \to 0+$, получаем неравенство $\gamma_\beta \le \rho_D(1,\beta)$.

Пусть

$$\gamma_\beta = \varlimsup_{n\to+\infty}\frac{\log^+\left(|A_n|e^{(\beta(n)-1)\log n}\right)}{\log\log n}.$$

Тогда для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ и для все $n \ge n_1$ справедливо неравенство

$$|A_n| e^{(\beta(n)-1)\log n} < (\log n)^{\gamma_\beta+\varepsilon} \Rightarrow$$
$$|A_n| < (\log n)^{\gamma_\beta+\varepsilon} e^{\log n} e^{-\beta(n)\log n}. \tag{5}$$

Замечая, что

$$M(G, x) \le \sum_{n=1}^{+\infty} |A_n| e^{-x\log n},$$

и учитывая неравенство (5), имеем

$$M(G, x) < C_1 \sum_{n=n_1}^{+\infty} (\log n)^{\gamma_\beta+\varepsilon} e^{-d\log n} e^{-\beta(n)\log n},$$

где C_1 — константа, или справедливо неравенство

$$\beta(d) M(G, x) < \beta(d) C_1 \sum_{n=n_1}^{+\infty} (\log n)^{\gamma_\beta+\varepsilon} e^{-d\log n} e^{-\beta(n)\log n},$$

для всех $d \in (0, d')$, $\beta(d) < C_2$ — константа. Тогда

$$\beta(d) M(G, x) < C_0 \sum_{n=n_1}^{+\infty} (\log n)^{\gamma_\beta+\varepsilon} e^{-d\log n} e^{-\beta(n)\log n}, \tag{6}$$

где $C_0 = C_1 \cdot C_2 > 0$.

Рассмотрим функцию $\exp(\Phi(s)) = \exp\left\{(\gamma_\beta + \varepsilon)\log s - ds\right\}$ и найдем ее абсолютный максимум.

Вычислим $\Phi'_s = (\gamma_\beta + \varepsilon)/s - d$. Тогда $s = s_0 = (\gamma_\beta + \varepsilon)/d$ — единственная стационарная точка, в которой вторая производная меньше нуля, т. е. $\Phi''_{s^2} = = (\gamma_\beta + \varepsilon)/s^2 < 0$ и в точке s_0 достигается абсолютный максимум. В результате имеем

$$\beta(d) M(G, x) < C_0 \left(\frac{\gamma_\beta + \varepsilon}{ed}\right)^{\gamma_\beta+\varepsilon} \sum_{n=n_1}^{+\infty} e^{-\beta(n)\log n}. \tag{7}$$

В последнем неравенстве в правой части по условию теоремы ряд сходится к $L' \in \mathbf{R}^+$. Тогда

$$\beta(d) M(G, x) < L' C_0 \left(\frac{\gamma_\beta + \varepsilon}{ed}\right)^{\gamma_\beta+\varepsilon}$$

и для всех $0 < d < d_1$ справедливо неравенство

$$\log\{\beta(d) M(G, x)\} < (\gamma_\beta + 2\varepsilon)\log\frac{1}{d} \Rightarrow$$

$$\rho_D(1, \beta) = \varlimsup_{d\to 0+} \frac{\log\{\beta(d) M(G, x)\}}{\log(1/d)} \le \gamma_\beta + 2\varepsilon, \quad \varepsilon \to 0+, \Rightarrow$$

справедливо неравенство $\rho_D(1, \beta) \le \gamma_\beta$. Выше доказано, что $\gamma_\beta \le \rho_D(1, \beta)$, следовательно, $\rho_D(1, \beta) = \gamma_\beta$. Теорема 1 доказана полностью.

Замечание. Для дзета-функции Римана порядок степенного роста вычисляется по формуле

$$\rho_D(1, \beta) = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{\log^+\left(|A_n| e^{(\beta(n)-1)\log n}\right)}{\log\log n} = \varlimsup_{n\to+\infty} \frac{(\beta(n)-1)\log n}{\log\log n},$$

если сходится ряд $\sum_{n=n_0}^{+\infty} e^{-\beta(n)\log n}$. Выбирая в качестве функции

$$\beta(n) = 1 + \frac{\log\log n}{\log n} + \frac{(1+\delta)\log\log\log n}{\log n},$$

где $\delta > 0$ — достаточно малое число, получаем, что порядок степенного роста $\rho_D(1, \beta) = 1$.

Аналогично для функции $\zeta^{-1}(z)$ вблизи критической полосы имеем

$$\rho_D(1, \beta) = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\log^+\left(|\mu(n)| e^{(\beta(n)-1)\log n}\right)}{\log\log n} = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{(\beta(n)-1)\log n}{\log\log n}.$$

Для той же самой функции $\beta(n) = 1 + \log_n(\log n \log^{1+\delta} \log n)$ ряд

$$\sum_{n=27}^{+\infty} e^{-\beta(n)\log n} = \sum_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n^{\beta(n)}} = \sum_{n=27}^{+\infty} \frac{1}{n \log n \log^{1+\delta} \log n} = L \in \mathbf{R}^+$$

по интегральному признаку Коши, так как сходится интеграл

$$\int_{27}^{+\infty} \frac{dx}{x \log x \log^{1+\delta} \log x} = \int_{27}^{+\infty} \log^{-1-\delta} \log x d \log\log x =$$

$$= -\frac{1}{\delta \log^{\delta} \log x \Big|_{27}^{+\infty}} = \frac{1}{\delta \log^{\delta} \log 27} \in \mathbf{R}^+$$

и последовательность $\dfrac{1}{n \log n \log^{1+\delta} \log n}$ монотонно убывает на $[27, +\infty)$. Тогда порядок степенного роста для $\zeta^{-1}(z)$ вблизи прямой $x = 1$: $\rho_D(1, \beta) = 1$.

В самом деле,

$$\rho_D(1, \beta) = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{(\beta(n)-1)\log n}{\log\log n},$$

где

$$\beta(n) = 1 + \frac{\log\left\{\log n (\log\log n)^{1+\delta}\right\}}{\log n}.$$

Тогда

$$\rho_D(1, \beta) = \overline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{(\log\log n / \log n + (1+\delta)\log\log\log n / \log n)\log n}{\log\log n} = 1.$$

Следовательно, на прямой $x = 1$ могут существовать особые точки: полюсы или существенно особые для функции $\zeta^{-1}(z)$, и если существует хотя бы один конечный полюс, то дзета-функция $\zeta(z)$ на правой границе критической полосы будет иметь в соответствующей точке ноль. Тогда пятая гипотеза Римана не верна. С некоторыми результатами по теории дзета-функции Римана можно ознакомиться в работах [2] и [3].

1. *Макаров В. Ю.* Характеристики степенного роста многомерного ряда экспонент // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 4. – С. 438–442.
2. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана. – М.: Наука, 1953.
3. *Titchmarsh E. K.* On an inequality satisfied by the zeta-function of Riemann // Proc. London Math. Soc. – 1928. – **28**, № 2. – P. 70–80.

Получено 15.05.2001