УДК 517.9

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕПРЕРЫВНЫМ АРГУМЕНТОМ

We obtain conditions for the existence and uniqueness of continuous asymptotically periodic solutions c nonlinear difference equations with a continuous argument.

Одержано умови існування і єдиності неперервних, асимптотично періодичних розв'язків нел нійних різницевих рівнянь з неперервним аргументом.

При изучении разностных уравнений вида

$$x(t+1) = \lambda x(t) + f(t, x(t)), \tag{1}$$

где $t \in R = [0, +\infty)$, $\lambda = \text{const} \neq 0$, $f\colon [0, \infty) \times R \to R$, исследовались, главны образом, характерные для дифференциальных уравнений вопросы существова ния периодических и почти периодических решений, асимптотического поведе ния, устойчивости решений и др. Однако решения таких уравнений очень част имеют свойства, которые существенно отличаются от соответствующих свойст решений дифференциальных и даже аналогичных дискретных уравнений, Осс бенно это проявляется при исследовании вопросов поведения решений при $t \to \infty$, которые имеют важное значение для развития теории разностных уравне ний с непрерывным аргументом. Для отдельных классов таких уравнений этом направлении получено целый ряд результатов [1–5]. Что же касаетс общих уравнений, то это далеко не так. Объясняется это, в частности, тем, чт имеющиеся в настоящее время методы исследования разностных уравнений непрерывным аргументом неприменимы, как правило, при исследовании асимп тотических свойств решений таких уравнений. В данной работе разработа метод, позволяющий исследовать свойства решений широких классов уравне ний вида (1) при $t \to +\infty$.

1. Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda = 1$, т. е. уравнение (1) имеет вид

$$x(t+1) = x(t) + f(t, x(t)). \tag{2}$$

Будем исследовать задачу о существовании непрерывных при $t \geq 0$ решений удовлетворяющих условию

$$\lim_{t \to +\infty} [x(t) - \omega(t)] = 0, \tag{3}$$

где $\omega(t)$ — некоторая непрерывная 1-периодическая функция. При этом пред- полагаются выполненными следующие условия:

1) функция $f(t, x)$ является непрерывной при $t \geq 0$, $f(t, 0) \equiv 0$ и удовле творяет соотношению

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \varphi(t)|x - y|, \tag{4}$$

где $\varphi(t)$ — некоторая неотрицательная функция и $x, y \in R$;

2) ряд

$$\Phi(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(t+i)^{*}$$

равномерно сходится при всех $t \in [0, +\infty)$ и $\Phi(t) \leq \theta < 1$.

* Непосредственно из условия 2 вытекает $\lim_{t \to +\infty} \Phi(t) = 0$.

Нетрудно показать, что если $x(t)$ — непрерывное при $t \in [0, +\infty)$ решение задачи (2), (3), то функция $x(t)$ является ограниченной при $t \in [0, +\infty)$ и удовлетворяет уравнению

$$x(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} f\big(t+i, x(t+i)\big). \tag{5}$$

Верно и обратное утверждение: если $x(t)$ — непрерывное и ограниченное при $t \in [0, +\infty)$ решение уравнения (5), то оно является решением задачи (2), (3). Следовательно, для доказательства существования единственного непрерывного при $t \in [0, +\infty)$ решения задачи (2), (3) достаточно доказать существование единственного непрерывного и ограниченного при $t \in [0, +\infty)$ решения уравнения (5).

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1, 2. *Тогда уравнение* (5) *имеет единственное непрерывное и ограниченное при* $t \in [0, +\infty)$ *решение.*

Доказательство. Полагая

$$x_0(t) = \omega(t),$$
$$x_m(t) = \omega(t) - \sum_{i=0}^{\infty} f\big(t+i, x_{m-1}(t+i)\big), \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

определим последовательность функций $x_m(t)$, $m \geq 0$. Используя условия 1, 2, по индукции можно показать, что $x_m(t)$ непрерывны при всех $m \geq 0$, $t \in [0, \infty)$ и $|x_m(t)| \leq M/(1-\theta)$, где $M = \max_t |\omega(t)|$. Более того, докажем, что последовательность функций $x_m(t)$, $m \geq 0$, равномерно сходится к некоторой непрерывной и ограниченной функции $x(t)$. Для этого достаточно, очевидно, показать, что при всех $m \geq 1$ и $t \in [0, \infty)$ выполняется оценка

$$|x_m(t) - x_{m-1}| \leq M\theta^m. \tag{7}$$

Действительно, в силу (6) и условий 1, 2 имеем

$$|x_1(t) - x_0(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f(t+i, \omega(t))| =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} |f(t+i, \omega(t)) - f(t+i, 0)| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(t+i)|\omega(t)| = \Phi(t)|\omega(t)| \leq M\theta,$$

т. е. оценка (7) выполняется при $m = 1$. Предположим, что оценка (7) доказана уже для некоторого $m \geq 1$ и покажем, что она не изменится при переходе от m к $m+1$. В самом деле, согласно (6), условиям 1 и 2 имеем

$$|x_{m+1}(t) - x_m(t)| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |f(t+i, x_m(t+i)) - f(t+i, x_{m-1}(t+i))| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(t+i)|x_m(t+i) - x_{m-1}(t+i)| \leq M\theta^m \Phi(t) \leq M\theta^{m+1}.$$

Таким образом, оценка (7) выполняется при $t \in [0, \infty)$, $m \geq 0$ и, следовательно, последовательность функций $x_m(t)$, $m \geq 0$, равномерно сходится к некоторой непрерывной и ограниченной при $t \in [0, \infty)$ функции $x(t)$ ($|x(t)| \leq$

$\le M/(1-\theta))$. Переходя в (6) к пределу при $m \to \infty$, можно убедиться, что функция $x(t) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m(t)$ удовлетворяет уравнению (5). Отсюда и из условий 1, 2 непосредственно вытекает

$$\lim_{t\to+\infty} [x(t) - \omega(t)] = 0.$$

Для завершения доказательства теоремы остается показать, что уравнение (5) не имеет других непрерывных и ограниченных при $t \in [0, +\infty)$ решений. В самом деле, пусть имеется еще одно непрерывное и ограниченное при $t \in$ $\in [0, +\infty)$ решение $y(t)$ уравнения (5) и $y(t) \ne x(t)$. Тогда $|x(t) - y(t)| \le \tilde{M}$ при $t \in [0, \infty)$ ($\tilde{M}$ — некоторая положительная постоянная) и в силу условий 1, 2 имеем

$$|x(t) - y(t)| \le \sum_{i=0}^{\infty} |f(t+i, x(t+i)) - f(t+i, y(t+i))| \le$$

$$\le \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(t+i)|x(t+i) - y(t+i)| \le \Phi(t)\|x(t) - y(t)\| \le \theta\|x(t) - y(t)\|,$$

где $\|x(t) - y(t)\| = \sup\limits_t |x(t) - y(t)|$. Отсюда следует

$$\|x(t) - y(t)\| \le \theta\|x(t) - y(t)\|,$$

что возможно лишь в случае $x(t) \equiv y(t)$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы.

Замечания. 1. Аналогичный результат имеет место также для уравнения

$$x(t+1) = x(t) + f(t, x(t)) + F(t). \tag{8}$$

Именно, если функция $f(t, x)$ удовлетворяет условиям 1, 2, а функция $F(t)$ — следующему условию:

3) ряд

$$\tilde{F}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} F(t+i)$$

равномерно сходится при всех $t \in [0, \infty)$ и $|\tilde{F}(t)| \le L$ (L — положительная постоянная), то уравнение (8) имеет единственное непрерывное при $t \in [0, \infty)$ решение, удовлетворяющее условию (3).

2. Поскольку

$$\lim_{t\to\infty} \Phi(t) = 0,$$

то условие $\Phi(t) \le \theta < 1$ заведомо выполняется при $t \in [t_*, \infty)$, где t_* — достаточно большое положительное число.

3. Теорема 1 имеет место также в случае, когда $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $x = (x_1, \ldots$ $\ldots, x_n)$. При этом доказательство ее остается прежним, если $|f|$, $|x|$ определить, например, соотношениями

$$|f| = \max_{1\le i\le n} |f_i|, \qquad |x| = \max_{1\le i\le n} |x_i|.$$

2. Рассмотрим теперь уравнение (1) в случае, когда λ — некоторое положительное, отличное от единицы, число.

Выполняя в (1) взаимно-однозначную замену переменных

$$x(t) = \lambda^t y(t), \tag{9}$$

получим уравнение для $y(t)$:

$$y(t+1) = y(t) + \bar{f}(t, y(t)), \tag{10}$$

где $\bar{f}(t, y) = \lambda^{-(t+1)} f(t, \lambda^t y)$. Предположим, что функция $\bar{f}(t, y)$ удовлетворяет условиям 1, 2. Тогда согласно теореме 1 уравнение (10) имеет единственное непрерывное при $t \in [0, +\infty)$ решение $y(t)$, удовлетворяющее условию

$$\lim_{t \to +\infty} [y(t) - \omega(t)] = 0,$$

где $\omega(t)$ — некоторая непрерывная 1-периодическая функция. Отсюда и из (9) вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть λ — некоторое положительное отличное от единицы число и функция $\bar{f}(t, y)$ удовлетворяет условиям* 1, 2. *Тогда уравнение* (1) *имеет единственное непрерывное при $t \in [0, \infty)$ решение $x(t)$, удовлетворяющее условию*

$$\lim_{t \to \infty} [\lambda^{-t} x(t) - \omega(t)] = 0.$$

1. *Birkhoff G. D., Trjitzinsky W. J.* Analytic theory of singular difference equations // Acta Math. – 1932. – **60**. – P. 1–89.
2. *Быков Я. В., Линенко В. Г.* О некоторых вопросах качественной теории систем разностных уравнений. – Фрунзе: Илим, 1968. – 127 с.
3. *Пелюх Г. П.* Общее решение одного класса систем линейных разностных уравнений с периодическими коэффициентами // Дифференц. уравнения. – 1994. – **30**, № 3. – С. 514–519.
4. *Пелюх Г. П.* О непрерывных и ограниченных на всей вещественной оси решениях систем нелинейных разностных уравнений и их свойствах // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1636–1645.
5. *Шарковский А. Н., Майстренко Ю. Л., Романенко Е. Ю.* Разностные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1986. – 280 с.

Получено 29.06.99,
после доработки — 19.01.2000