УДК 519.21

М. А. Власенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

УРАВНЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМИ ГАУССОВСКИМИ ОПЕРАТОРАМИ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ СРЕДНИМ*

We consider an equation in the Hilbert space with a random operator represented as the sum of determined closed densely defined operator and a Gaussian strong random operator. We represent a solution of equation with a random right -hand side in terms of stochastic derivatives of solutions with determined right-hand sides. We consider the application of representation of this sort to the anticipating Cauchy problem for a stochastic partial differential equation.

Розглядається рівняння у гільбертовому просторі із випадковим оператором, що є сумою детермінованого замкненого щільновизначеного оператора та гауссівського сильного випадкового оператора. Розв'язок рівняння із випадковою правою частиною подано через стохастичні похідні розв'язків із детермінованою правою частиною. Розглядається застосування такого зображення до задачі Коші з випередженням для стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними.

1. Определение действия случайного оператора с неограниченным математическим ожиданием на случайные элементы. Пусть H, U — вещественные сепарабельные гильбертовы пространства, ξ — обобщенный гауссовский случайный элемент в H с нулевым средним и единичным корреляционным оператором. Пусть также $A: \mathcal{D}(A) \subset U \to U$ — замкнутый плотноопределенный линейный оператор, $B: U \times H \to U$ — билинейная форма, являющаяся оператором Гильберта – Шмидта по переменной из H, непрерывная в норме Гильберта – Шмидта по переменной из U.

Обозначим через $L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$ пространство случайных элементов в U с сильным вторым моментом, измеримых относительно ξ.

Будем рассматривать уравнения вида

$$u = x + Au + B(u, \xi),$$

где $x \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$ — известный случайный элемент, а $u \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$ — искомый.

Для этого определим действие A и $B(\cdot : \xi)$ на случайные элементы. Действие B определим, как в [1]: пусть разложение u по U-значным полилинейным формам Гильберта – Шмидта от ξ имеет вид

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} T_m(\xi, \ldots, \xi).$$

Пространство U-значных m-линейных форм Гильберта – Шмидта на H обозначим (H^m, U). Определим новые формы $S_m \in (H^m, U)$:

$$S_m(\varphi_1, \ldots, \varphi_m) = B(T_{m-1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}); \varphi_m), \qquad m \geq 1,$$

и пусть ΛS_m — симметризация формы S_m по всем аргументам.

Определение 1 [1]. *Случайный элемент $u \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$ принадлежит области определения $B(\cdot\,; \xi)$, если ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \Lambda S_m(\xi, \ldots, \xi)$$

сходится в $L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$. Сумма этого ряда есть $B(u; \xi)$.

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 01.07/103).

(Область определения $B(\cdot\,;\xi)$ на случайных элементах будем обозначать $\operatorname{dom} B$.)

Напомним, что достаточным условием принадлежности $\operatorname{dom} B$ является наличие стохастической производной, т. е. $W^1(U) \subset \operatorname{dom} B$.

Теперь определим действие A на случайные элементы. Пусть $\Gamma_A \subset U \times U$ — график оператора A. Определим проекции

$$\pi_1, \pi_2 : U \times U \to U,$$

$$\pi_1\{x, y\} = x, \quad \pi_2\{x, y\} = y.$$

Определение 2. *Случайный элемент $u \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$ принадлежит области определения $A(\operatorname{dom} A)$, если существует случайный элемент $v \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, \Gamma_A)$ такой, что $u = \pi_1 v$. Тогда $Au = \pi_2 v$.*

Определение корректно, поскольку если $\pi_1 v_1 = \pi_1 v_2$ п. н., то и $v_1 = v_2$ п. н. (π_1 является биекцией Γ_A на $\mathcal{D}(A)$). В силу того, что π_1 и π_2 непрерывны, для любого $v \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, \Gamma_A)$ $\pi_1 v$ и $\pi_2 v$ принадлежат $L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$.

Мы также будем использовать следующее эквивалентное определение.

Определение 2′. *Случайный элемент $u \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$ принадлежит $\operatorname{dom} A$, если $u \in \mathcal{D}(A)$ с вероятностью 1 и $Au \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$.*

Множество $\mathcal{D}(A)$ — борелевское, поскольку оно является проекцией замкнутого множества Γ_A [2].

2. Решение уравнения со случайной правой частью специального вида. Рассмотрим случайный оператор в U

$$Lu = Au + B(u; \xi)$$

с областью определения на случайных элементах $\operatorname{dom} L = \operatorname{dom} A \cap \operatorname{dom} B$.

Теперь сформулируем основной результат относительно решения уравнения

$$u - Lu = \beta x, \tag{1}$$

где $x \in U$ и β — измеримая относительно ξ случайная величина с конечным вторым моментом.

Пусть $\mathcal{M}^0$ — пространство случайных величин, имеющих конечное разложение Ито – Винера и таких, что для любой $\beta \in \mathcal{M}^0$ существует конечномерное подпространство $P \subset H$ такое, что

$$\beta \in \mathcal{F}_P = \sigma\{(\varphi, \xi), \varphi \in P\}.$$

Теорема 1. *Пусть для некоторого $x \in U$ уравнение* (1) *с $\beta = 1$ имеет решение u_x такое, что $u_x \in W^\infty(U)$, и для всех $n \geq 0$ и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \in H$*

$$AD^n u_x(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) \in W^\infty(U).$$

Тогда для любого $\mathcal{M}^0$ случайный элемент

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i_1, \ldots, i_j = 1}^{\infty} D^j \beta(e_{i_1}, \ldots, e_{i_j}) D^j u_x(e_{i_1}, \ldots, e_{i_j}) \tag{2}$$

является решением уравнения (1).

Замечания. 1. Здесь $\{e_i; i \geq 1\}$ — произвольный ортонормированный базис в H; кратные ряды сходятся п. н., ряд по j конечен в силу условия на β.

2. Решение (1) единственно, если уравнение (1) с $\beta = 0$ не имеет ненулевых решений.

3. В случае ограниченного оператора A такое представление решения получено в [3].

Для доказательства теоремы нам понадобятся следующие утверждения. Напомним, что $W^1(U) \subset \operatorname{dom} B$, и поэтому стохастически дифференцируемые случайные элементы из $\operatorname{dom} A$ лежат в $\operatorname{dom} L$.

Лемма 1. *Пусть* $u \in W^2(U)$, u *и* $Du(\varphi)$ *для каждого* $\varphi \in H$ *принадлежат* $\operatorname{dom} A$, $Au \in W^1(U)$. *Тогда* $Lu \in W^1(U)$ *и для* $\varphi \in H$

$$D(Lu)(\varphi) = L(Du(\varphi)) + B(u;\varphi). \tag{3}$$

Доказательство. В работе [3] утверждение леммы доказано для $B(\cdot\,;\xi)$. Нам остается проверить, что

$$D(Au)(\varphi) = A(Du(\varphi)).$$

Из леммы 2 в [3] также следует, что это утверждение верно для ограниченных детерминированных операторов. Построим последовательность ограниченных операторов $\{A^n; n \geq 1\}$ следующим образом. A замкнут, поэтому его график Γ_A — гильбертово пространство. (Скалярное произведение в нем будем обозначать так же, как в U:

$$(\{y, Ay\}, \{z, Az\}) = (y, z) + (Ay, Az).)$$

Выберем в Γ_A ортонормированный базис $\{\{g_k, Ag_k\}; k \geq 1\}$ так, чтобы $Ag_k \in \mathcal{D}(A^*)$ для каждого k. Это можно сделать в силу следующего утверждения [4], (теорема 13.13): пусть A' — сужение A на $\mathcal{D}(A^*A)$, тогда $\Gamma_{A'}$ плотен в Γ_A.

Положим для $y \in U$

$$A^n y = \sum_{k=1}^{n} (y, g_k) A g_k + \sum_{k=1}^{n} (y, A^* A g_k) A g_k,$$

где A^n — ограниченный оператор. Покажем, что для любого $y \in \operatorname{dom} A$

$$A^n y \to Ay \quad \text{в} \quad L_2(\Omega, \mathrm{P}, U) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Поскольку $y \in \operatorname{dom} A$, $\{y, Ay\}$ — элемент $L_2(\Omega, \mathrm{P}, \Gamma_A)$. Тогда

$$\{y, Ay\} = \sum_{k=1}^{\infty} (\{y, Ay\}, \{g_k, Ag_k\}) \{g_k, Ag_k\} =$$

$$= \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} (\{y, Ay\}, \{g_k, Ag_k\}) g_k,\ \sum_{k=1}^{\infty} (\{y, Ay\}, \{g_k, Ag_k\}) A g_k \right\},$$

где ряды сходятся п. н.

Тогда

$$Ay - A^n y = \sum_{k=n+1}^{\infty} (\{y, Ay\}, \{g_k, Ag_k\}) A g_k$$

и

$$\| Ay - A^n y \|_U \to 0, \quad n \to \infty \quad \text{п. н.}$$

Кроме того,

$$\| Ay - A^n y \|_U^2 \le \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (\{y, Ay\}, \{g_k, Ag_k\}) g_k \right\|_U^2 +$$

$$+ \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} (\{y, Ay\}, \{g_k, Ag_k\}) Ag_k \right\|^2 \le \| \{y, Ay\} \|_{\Gamma_A}^2 .$$

Поскольку $\mathrm{E} \| \{y, Ay\} \|_{\Gamma_A}^2 < +\infty$, то согласно теореме Лебега о мажорированной сходимости

$$\mathrm{E} \| Ay - A^n y \|_U^2 \to 0, \quad n \to \infty .$$

Операторы A^n ограничены и

$$D(A^n u)(\varphi) = A^n(Du(\varphi)) .$$

По доказанному

$$A^n(Du(\varphi)) \to A(Du(\varphi))$$

и

$$A^n u \to Au \quad \text{при} \quad n \to \infty \quad \text{в} \quad L_2(\Omega, \mathrm{P}, U) .$$

Тогда в силу замкнутости оператора $D(\cdot)(\varphi)$ в $L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$ получаем

$$D(Au)(\varphi) = A(Du(\varphi)) .$$

Лемма доказана.

Как было отмечено при доказательстве, эта лемма обобщает лемму 2 в [3] на случай неограниченного оператора A. При этом в ее формулировке появляются дополнительно условия принадлежности u и $Du(\varphi)$ для каждого $\varphi \in H$ области определения оператора A на случайных элементах, а также условие стохастической дифференцируемости случайного элемента Au. Эти условия необходимы для того, чтобы можно было сформулировать (3). Следующий пример показывает, что второе условие не является следствием первого.

Пример. Пусть A — самосопряженный оператор, имеющий ортонормированный собственный базис $\{ e_k ; k \ge 1 \}$ в U, причем $Ae_k = ke_k$ для всех k. Пусть $H = U$. Рассмотрим также случайный элемент

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 \sqrt{k!}} e_k^{\otimes k}(\xi, \ldots, \xi) e_k .$$

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 \mathrm{E} \left\| \frac{1}{k^2 \sqrt{k!}} e_k^{\otimes k}(\xi, \ldots, \xi) e_k \right\|_U^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot k!}{k^4 \cdot k!} < +\infty,$$

случайный элемент $u \in W^2(U)$.

Проверим, что он также лежит в $\operatorname{dom} A$ вместе со всеми первыми производными по направлениям:

$$\mathrm{E} \| Au \|_U^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2 \cdot k!}{k^4 \cdot k!} < +\infty,$$

производная в направлении $\varphi \in H$ равна

$$Du(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k!}} e^{\otimes k-1}(\xi, \ldots, \xi)(\varphi, e_k)e_k,$$

и тогда

$$\mathrm{E}\,\| ADu(\varphi)\|_U^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2(k-1)!}{k^2 k!}(\varphi, e_k)^2 < +\infty.$$

Однако сейчас $Au \notin W^1(U)$. Действительно,

$$\mathrm{E}\,\| DAu\|^2_{(U^2, U)} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Лемма 2. *Пусть для некоторого* $r \geq 0$ $u \in W^{n+r}(U)$ *и случайная величина* β *имеет в разложении Ито – Винера полилинейные формы Гильберта – Шмидта от* ξ *только размерностей, не превышающих* n. *Тогда* $\beta u \in \in W^r(U)$.

Если $r \geq 1$, $u \in \operatorname{dom} A$ *и* $Au \in W^{n+r-1}(U)$, *то* $\beta u \in \operatorname{dom} A$ *и*

$$L(\beta u) = \beta L(u) - B(u; D\beta).$$

Доказательство. Если u имеет конечное разложение Ито – Винера, то и βu имеет конечное разложение Ито – Винера и поэтому является стохастически бесконечно дифференцируемым случайным элементом. Тогда для доказательства первой части леммы можно считать, что $\beta = T_k(\xi, \ldots, \xi)$ и $u = \sum_{m=k}^{\infty} B_m(\xi, \ldots, \xi)$ (обозначая через (H^m, X) пространство m-линейных форм Гильберта – Шмидта на H со значениями в X, $T_k \in (H^k, \mathbb{R})$ и $B_m \in (H^m, U)$ для $m \geq k$).

Обозначим для $i \leq k$

$$(T_k, B_m)_{\sigma i} = \Lambda\kappa(\xi, \ldots, \xi),$$

где

$$\kappa(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k+m-2i}) =$$

$$= \frac{k!}{(k-i)!}\frac{m!}{(m-i)!} \sum_{j_1, \ldots, j_i = 1}^{\infty} T_k(\varphi_1, \ldots, \varphi_{k-i}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_i}) \cdot$$

$$\cdot B_m(\varphi_{k-i+1}, \ldots, \varphi_{k+m-2i}, e_{j_1}, \ldots, e_{j_i}),$$

$\{e_j; j \geq 1\}$ — произвольный ортонормированный базис в H.

В работах [5, 6] в случае, когда $B_m \in (H^m, \mathbb{R})$, приведена следующая формула:

$$T_k(\xi, \ldots, \xi)B_m(\xi, \ldots, \xi) = \sum_{i=0}^{\min(k,m)} \frac{1}{i!}(T_k, B_m)\sigma i.$$

Это разложение Ито – Винера для произведения двух форм Гильберта – Шмидта от ξ. Используя (покоординатно) эту формулу, а также линейность и непрерывность скалярного произведения в U, получаем то же представление в случае, когда $B_m \in (H^m, U)$. Тогда

$$\beta u = \sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i\,!}\sum_{m=k}^{\infty}(T_k, B_m)_{\sigma i}.$$

Обозначим $v_i = \sum_{m=k}^{\infty}(T_k, B_m)_{\sigma i}$. Покажем, что $v_i \in W^r(U)$. Имеем

$$\mathrm{E}\|(T_k, B_m)_{\sigma i}\|_U^2 = (m+k-2i)\,!\,\|\Lambda\kappa\|^2_{(H^{m+k-2i},U)} \le (m+k-2i)\,!\,\|\kappa\|^2_{(H^{m+k-2i},U)} =$$

$$= (m+k-2i)\,!\left(\frac{m!}{(m-i)!}\frac{k!}{(k-i)!}\right)^2\cdot$$

$$\cdot\sum_{l_1,\ldots,l_{m+k-2i}=1}^{\infty}\left\|\sum_{j_1,\ldots,j_i=1}^{\infty}T_k(e_{l_1},\ldots,e_{l_{k-i}},e_{j_1},\ldots,e_{j_i})\cdot B_m(e_{l_{k-i+1}},\ldots,e_{l_{k-2i+m}},e_{j_1},\ldots,e_{j_i})\right\|_U^2 \le$$

$$\le (m+k-2i)!\left(\frac{m!}{(m-i)!}\frac{k!}{(k-i)!}\right)^2\sum_{l_1,\ldots,l_{m+k-2i}=1}^{\infty}\left(\sum_{j_1,\ldots,j_i=1}^{\infty}T_k^2(e_{l_1},\ldots,e_{j_i})\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{j_1',\ldots,j_i'=1}^{\infty}\|B_m(e_{l_{k-i+1}},\ldots,e_{j_i'})\|_U^2\right) =$$

$$= (m+k-2i)!\left(\frac{m!}{(m-i)!}\frac{k!}{(k-i)!}\right)^2\|T_k\|^2_{(H^k,\mathbb{R})}\|B_m\|^2_{(H^m,U)} \le$$

$$\le C(k,i)m^k m!\|B_m\|^2_{(H^m,U)},$$

где $C(k,i)$ — не зависящая от m величина.

Поскольку $u \in W^{n+r}(U)$, то

$$\sum_{m=k}^{\infty}m^{n+r}m!\|B_m\|^2_{(H^m,U)} < +\infty.$$

Но тогда для каждого $i \le k$

$$\sum_{m=k}^{\infty}(m+k-2i)^r\mathrm{E}\|(T_k, B_m)_{\sigma i}\|_U^2 < +\infty$$

в силу того, что $k \le n$, и тогда $v_i \in W^r(U)$. Складывая v_i, получаем, что $\beta u \in W^r(U)$.

Теперь докажем вторую часть леммы. В [3] (лемма 1) показано, что

$$B(\beta u;\xi) = \beta B(u;\xi) - B(u;D\beta).$$

Нам остается лишь проверить, что $\beta u \in \operatorname{dom} A$ и

$$A(\beta u) = \beta A(u).$$

Поскольку при фиксированном $\omega \in \Omega$ A действует на случайный элемент обыкновенным образом, достаточно убедиться, что $\beta A(u) \in L_2(\Omega, \mathrm{P}, U)$. Это следует из того, что $A(u) \in W^{n+r-1}(U)$, и первой части леммы.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы **1.** Значения кратных сумм в (2) не зависят от выбора базиса $\{e_i; i \ge 1\}$. В силу условия на β базис можно выбрать так, чтобы суммы были конечны. Обозначим

$$\langle D^j\beta, D^j u_x\rangle = \sum_{i_1,\ldots,i_j=1}^{\infty}D^j\beta(e_{i_1},\ldots,e_{i_j})\,D^j u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_j})$$

и пусть

$$u = \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{M} D^j\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_j})\, D^j u_x(e_{i_1},\dots,e_{i_j}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{N} \frac{(-1)^j}{j!} \langle D^j\beta, D^j u_x\rangle.$$

Покажем по индукции, что при $n \geq 1$

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \sum_{i_1,\dots,i_j=1}^{M} LD^j\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_j})\, D^j u_x(e_{i_1},\dots,e_{i_j}) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{j!} \langle D^j\beta, D^j u_x\rangle -$$

$$- \beta x + \frac{(-1)^{n+1}}{n!} \sum_{i_1,\dots,i_n=1}^{M} B\Big(D^n u_x(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\, D^{n+1}\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_n})\Big).$$

(Отсюда будет следовать утверждение теоремы, поскольку $D^{N+1}\beta \equiv 0$.)

При $n = 1$, применяя последовательно леммы 2 и 1, получаем

$$\sum_{i=1}^{M} LD\beta(e_i)Du_x(e_i) = \sum_{i=1}^{M}\Big(D\beta(e_i)LDu_x(e_i) - B\big(Du_x(e_i); D^2\beta(e_i)\big)\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{M}\Big(D\beta(e_i)(DLu_x(e_i) - B(u_x; e_i)) - B\big(Du_x(e_i); D^2\beta(e_i)\big)\Big).$$

Учитывая, что $Lu_x = u_x - x$ и

$$L(\beta u_x) = \beta Lu_x - B(u_x; D\beta) = \beta u_x - \beta x - B(u_x; D\beta),$$

имеем

$$L(\beta u_x) - \sum_{i=1}^{M} LD\beta(e_i)Du_x(e_i) =$$

$$= \beta u_x - \sum_{i=1}^{M} D\beta(e_i)Du_x(e_i) - \beta x + \sum_{i=1}^{M} B\big(Du_x(e_i); D^2\beta(e_i)\big).$$

Пусть утверждение верно для n. Докажем, что оно верно для $n+1$. Для фиксированных $i_1,\dots,i_n$ обозначаем

$$\beta_{i_1,\dots,i_n} = D^n\beta(e_{i_1},\dots,e_{i_n}),$$

$$u_x^{i_1,\dots,i_n} = D^n u_x(e_{i_1},\dots,e_{i_n}).$$

Согласно доказанному для $j = 1$ получаем

$$\sum_{i_{n+1}=1}^{M} LD\beta_{i_1,\dots,i_n}(e_{i_{n+1}})Du_x^{i_1,\dots,i_n}(e_{i_{n+1}}) =$$

$$= \sum_{i_{n+1}=1}^{M}\Big(D\beta_{i_1,\dots,i_n}(e_{i_{n+1}})DLu_x^{i_1,\dots,i_n}(e_{i_{n+1}}) -$$

$$- D\beta_{i_1,\dots,i_n}(e_{i_{n+1}})B(u_x^{i_1,\dots,i_n}; e_{i_{n+1}}) -$$

$$- B\big(Du_x^{i_1,\dots,i_n}(e_{i_{n+1}}); D^2\beta_{i_1,\dots,i_n}(e_{i_{n+1}})\big)\Big).$$

Заметим, что

$$DLu_x^{i_1,\ldots,i_n}(e_{i_{n+1}}) = DLD^n u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})(e_{i_{n+1}}) =$$

$$= D^2LD^{n-1}u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}})(e_{i_n},e_{i_{n+1}}) - DB(D^{n-1}u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}});e_{i_n})(e_{i_{n+1}}) =$$

$$= D^2LD^{n-1}u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}})(e_{i_n},e_{i_{n+1}}) -$$

$$- B(D^n u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n-1}},e_{i_{n+1}});e_{i_n}) = \ldots = D^{n+1}u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}}) -$$

$$- \sum_{k=1}^{n} B(D^n u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{k-1}},e_{i_{k+1}},\ldots,e_{i_{n+1}});e_{i_k}).$$

Тогда

$$\sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}=1}^{M} LD^{n+1}\beta(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}})D^{n+1}u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}}) =$$

$$= \langle D^{n+1}\beta, D^{n+1}u_x\rangle - \sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}=1}^{M}\ \sum_{k=1}^{n+1} D^{n+1}\beta(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}}) \cdot$$

$$\cdot B(D^n u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_k},e_{i_{k+1}},\ldots,e_{i_{n+1}});e_{i_k}) +$$

$$+ \sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}=1}^{M} B(D^{n+1}u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}});D^{n+2}\beta(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}})) =$$

$$= \langle D^{n+1}\beta, D^{n+1}u_x\rangle - (n+1)\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty} B(D^n u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_n});D^{n+1}\beta(e_{i_1},\ldots,e_{i_n})) -$$

$$- \sum_{i_1,\ldots,i_{n+1}=1}^{\infty} B(D^{n+1}u_x(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}});D^{n+2}\beta(e_{i_1},\ldots,e_{i_{n+1}})).$$

Теперь, учитывая предположение индукции, получаем требуемое утверждение для $n+1$.

Теорема доказана.

Доказанная теорема содержит множество предположений относительно решений уравнения (1) с детерминированной правой частью. Примеры уравнений, для которых выполнены эти предположения, содержатся в [7]: там теорема 1 применяется для решения задачи Коши с упреждением для стохастического дифференциального уравнения с цилиндрическим винеровским процессом, в частности для стохастического дифференциального уравнения с частными производными.

1. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic analysis and random maps in Hilbert space. – Utrecht: VSP, 1994. – 120 p.
2. *Куратовский К.* Топология: В 2 т. – М.: Мир, 1966. – Т. 1. – 594 с.
3. *Dorogovtsev A. A.* Anticipating equations and filtration problem // Theor. Stochast. Proc. – 1997. – **3(19)**, № 1-2. – P. 154–163.
4. *Рудин У.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1975. – 444 с.
5. *Sekiguchi T., Shiota Y.* $L-2$-theory of noncasual stochastic integrals // Math. Repts Toyama Univ. – 1985. – **8**. – P. 119–195.
6. *Shigekawa I.* Derivatives of Wiener functionals and absolute continuity of induced measures // J. Math. Kyoto Univ. – 1980. – **20**. – P. 263–290.
7. *Vlasenko M. O.* On anticipating Cauchy problem for stochastic differential equation with partial derivatives // Int. Conf.„Stochastic Analisys and its Applications", 10–17 June 2001, Lviv, Ukraine: Absts. – Lviv, 2001. – P. 67.

Получено 14.11.2001