УДК 519.21

А. А. Дороговцев (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

МЕРОЗНАЧНЫЕ МАРКОВСКИЕ ПРОЦЕССЫ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ПОТОКИ *

We consider a new class of Markov processes in the space of measures with constant masses. We present construction of processes of this sort in terms of probabilities controlling the movement of separate particles. We study additive functionals of such processes and give examples concerning stochastic flows with the interaction.

Розглядається новий клас марковських процесів у просторі мір із сталою масою. Наведено конструкцію таких процесів у термінах імовірностей, що керують переміщенням окремих частинок. Вивчаються адитивні функціонали від таких процесів та наведено приклади, пов'язані зі стохастичними потоками із взаємодією.

1. Введение. Настоящая статья посвящена исследованию мерозначных марковских процессов в полном метрическом сепарабельном пространстве $(\mathfrak{X},\rho)$. Пусть $\mathcal{B}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств пространства $\mathfrak{X}$. Через $\mathfrak{M}$ обозначим пространство вероятностных мер в $\mathcal{B}$.

Рассмотрим в $\mathfrak{M}$ метрику Вассерштейна

$$\forall \mu, \nu \in \mathfrak{M}: \quad \gamma(\mu,\nu) = \inf_{Q\in C(\mu,\nu)} \left(\int\int_{\mathfrak{X}^2} \frac{\rho(u,v)}{1+\rho(u,v)} Q(du,dv) \right), \tag{1}$$

где нижняя грань берется по множеству $C(\mu,\nu)$ всех вероятностных мер на $\mathfrak{X}\times\mathfrak{X}$, для которых μ и ν — маргинальные распределения. Известно, что $(\mathfrak{M},\gamma)$ — полное сепарабельное метрическое пространство. Будем рассматривать марковские случайные процессы $\{\mu_t;\, t\ge 0\}$ со значениями в $\mathfrak{M}$, допускающие представление

$$\forall t \ge 0: \quad \mu_t = \mu_0 \cdot \varphi_t^{-1}, \tag{2}$$

где $\{\varphi_t\}$ — семейство случайных отображений в пространстве $\mathfrak{X}$. Обсуждается структура процессов, имеющих свойство (2), способы задания таких процессов, в частности, с помощью стохастических дифференциальных уравнений, а также описываются аддитивные однородные функционалы от них. Приведем соответствующие определения.

Пусть $\{\mathcal{F}_t;\, t\ge 0\}$ — поток σ-алгебр на исходном вероятностном пространстве $(\Omega,\mathcal{F},P)$.

Определение 1. *Марковский процесс* $\{\mu_t;\, t\ge 0\}$ *относительно* $\{\mathcal{F}_t;\, t\ge 0\}$ *со значениями в* $(\mathfrak{M},\gamma)$ *называется эволюционным, если существует измеримая функция*

$$\varphi\colon \Omega\times\mathfrak{M}\times[0;+\infty)\times\mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$$

такая, что:

1) *для любого* $t_0\ge 0$ *сужение* φ *на* $\Omega\times\mathfrak{M}\times[0;t_0]\times\mathfrak{X}$ *измеримо относительно* σ*-алгебры, натянутой на произведение* $\mathcal{F}_{t_0}$ *и борелевских* σ*-алгебр в* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{X}$ *и* $[0;t_0]$;

2) *для произвольной меры* $\mu_0\in\mathfrak{M}$ *справедливы соотношения*

$$\forall t_0 \ge 0: \quad \mu_t = \mu_0 \circ \varphi_t^{-1} \pmod{P},$$

где $\{\mu_t;\, t\ge 0\}$ — *процесс, начинающийся в* μ_0;

* Выполнена при частичной поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 01.07/103).

3) *для произвольных* $\mu_0 \in \mathfrak{M}$, $u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{X}$, $n \geq 0$, $\{(\mu_t, \varphi_t(u_1), \ldots, \varphi_t(u_n));\ t \geq 1\}$ — *марковский процесс относительно потока* $\{\mathcal{F}_t\}$.

Из определения видно, что эволюционный процесс с каждым начальным распределением μ_0 связывает семейство отображений пространства $\mathfrak{X}$ в себя $\{\varphi_t(\mu_0, \cdot);\ t \geq 0\}$. При этом случайный $\mathfrak{X}$-значный процесс $\{\varphi_t(\mu_0, u);\ t \geq 0\}$ описывает движение одной частицы массы, в начальный момент времени находившейся в точке u. Поскольку движение частицы, стартовавшей из u, определяется не только влиянием случая, но и начальным распределением массы, то функцию φ из определения 1 естественно называть стохастическим потоком со взаимодействием. В случае, когда $\mathfrak{X}$ наделено дополнительной структурой гладкого многообразия, можно рассматривать φ как решение некоторого стохастического дифференциального уравнения с коэффициентами, зависящими от процесса $\{\mu_t;\ t \geq 0\}$. Таким образом удается описывать эволюционный мерозначный процесс в терминах инфинитезимальных характеристик. Представление эволюционного мерозначного процесса с помощью стохастического потока со взаимодействием дает возможность описывать аддитивные однородные функционалы от такого процесса с помощью локальных времен движения конечных наборов частиц $\varphi_t(u_1), \ldots, \varphi_t(u_n)$, $u_i \in \mathfrak{X}$, $i = 1, \ldots, n$, $n \geq 1$.

2. Вероятностные характеристики эволюционных мерозначных марковских процессов. Нам понадобятся следующие утверждения.

Лемма 1. *Пусть* $\psi\colon \Omega \times \mathfrak{X} \to \mathfrak{X}$ — *измеримая функция,* μ — *случайный элемент в* $\mathfrak{M}$. *Тогда образ* $\mu_0 \circ \psi^{-1}$ — *случайный элемент в* $\mathfrak{M}$.

Доказательство леммы стандартно и поэтому не приводится.

Отметим, что, вообще говоря, распределение случайной меры $\mu\psi^{-1}$ из леммы существенно зависит от выбора модификации ψ. Поэтому далее будем рассматривать либо ситуацию, когда ψ имеет непрерывную модификацию, и выбирать именно ее, либо μ и ψ будем выбирать независимыми. Тогда образ $\mu\psi$ не меняется с выбором модификации ψ. А именно, справедлива следующая лемма.

Лемма 2. *Пусть* μ — *случайный элемент в* $\mathfrak{M}$, ψ_1 *и* ψ_2 — *измеримые случайные функции такие, что,*

$$\forall u \in \mathfrak{X}: \quad \psi_1(u) = \psi_2(u) \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{P}).$$

Если ψ_1, ψ_2 *не зависят от* μ *в совокупности, то*

$$\mu\psi_1^{-1} = \mu\psi_2^{-1} \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{P}).$$

Доказательство. Рассмотрим счетное семейство $\mathcal{E}$ борелевских подмножеств $\mathfrak{X}$, порождающее σ-алгебру $\mathcal{B}$. Достаточно проверить, что

$$\forall \Delta \in \mathcal{E}: \mu\psi_1^{-1}(\Delta) = \mu\psi_2^{-1}(\Delta) \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{P}).$$

Обозначим

$$\xi_1(u) = \mathbb{1}_\Delta(\psi_1(u)), \quad \xi_2(u) = \mathbb{1}_\Delta(\psi_2(u)), \quad u \in \mathfrak{X}.$$

Отметим, что ξ_1 и ξ_2 — измеримые функции на $\Omega \times \mathfrak{X}$, не зависящие от μ в совокупности, и

$$\forall u \in \mathfrak{X}: \xi_1(u) = \xi_2(u) \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{P}).$$

Теперь

$$\mathrm{M}\left|\int_{\mathfrak{X}}\xi_1(u)\mu(du)-\int_{\mathfrak{X}}\xi_2(u)\mu(du)\right| \le \mathrm{M}\int_{\mathfrak{X}}|\xi_1(u)-\xi_2(u)|\mu(du) =$$

$$= \mathrm{MM}\left\{\int_{\mathfrak{X}}|\xi_1(u)-\xi_2(u)|\mu(du)/\mathcal{F}'\right\} = \mathrm{M}\int_{\mathfrak{X}}\mathrm{M}\{|\xi_1(u)-\xi_2(u)|/\mathcal{F}'\}\mu(du) = 0.$$

Здесь $\mathcal{F}' = \sigma(\mu)$. Лемма доказана.

Рассмотрим теперь переходные вероятности эволюционных мерозначных марковских процессов. Пусть $q = \{Q(u_1,\ldots,u_n),\ u_1,\ldots,u_n \in \mathfrak{X},\ n \ge 1\}$ — семейство согласованных конечномерных распределений в $\mathfrak{X}$, заиндексированных элементами $\mathfrak{X}$.

Предположим, что выполнено условие

$$\iint_{\mathfrak{X}^2}\frac{\rho(v_1,v_2)}{1+\rho(v_1,v_2)}Q(u,u_0)(dv_1,dv_2) \to 0, \quad u \to u_0, \tag{3}$$

для произвольной точки $u_0 \in \mathfrak{X}$. С Q можно связать стохастическое ядро на $\mathfrak{M}$ следующим образом. Пусть φ — $\mathfrak{X}$-значный случайный процесс на $\mathfrak{X}$, соответствующий семейству распределений Q. В силу (3) можно считать, что выбрана измеримая модификация φ. Для произвольной меры $\mu \in \mathfrak{M}$ рассмотрим ее образ $\mu\varphi^{-1}$ при случайном отображении φ. В силу леммы 1 $\mu\varphi^{-1}$ — случайный элемент в $\mathfrak{M}$, а согласно лемме 2 значение $\mu\varphi^{-1}$ не меняется с выбором другой измеримой модификации φ. Таким образом, по семейству Q однозначно определяется функция

$$K(\mu,\Delta) = \mathrm{P}\{\mu\varphi^{-1} \in \Delta\}, \quad \mu \in \mathfrak{M}, \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}),$$

где $\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ — борелевская σ-алгебра в $\mathfrak{M}$. Отметим, что K является стохастическим ядром в $\mathfrak{M}\times\mathcal{B}(\mathfrak{M})$. Не каждое стохастическое ядро в $\mathfrak{M}\times\mathcal{B}(\mathfrak{M})$ может быть получено подобным образом.

***Пример* 1.** Пусть $\mathfrak{X} = \{1,2\}$. В этом случае $\mathfrak{M} = \{(p,q)\colon p+q=1,\ p\ge 0,\ q \ge 0\}$. Положим

$$K(\mu,\Delta) = \delta_{(1/2;1/2)}(\Delta),$$

т. е. стохастическое ядро K переводит произвольную меру в меру, приписывающую каждой из точек 1 и 2 вес $1/2$. В то же время нетрудно видеть, что отображение, построенное по семейству Q, могло бы переводить меру $(1,0)$ только в себя или в меру $(0,1)$. Таким образом, ядро K сейчас не может быть получено описанным выше образом.

Процедуру построения ядра K можно усложнить, если допустить зависимость исходных конечномерных распределений от меры.

Рассмотрим семейство $\{Q(\mu,u_1,\ldots,u_n),\ \mu \in \mathfrak{M},\ u_1,\ldots,u_n \in \mathfrak{X},\ n \ge 1\}$ конечномерных распределений на $\mathfrak{X}$, удовлетворяющее при фиксированном μ условию (3) и измеримое по $\mu \in \mathfrak{M}$, т. е. для любых $u_1,\ldots,u_n \in \mathfrak{X}$ и произвольного борелевского $\Gamma \subset \mathfrak{X}^n$ функция

$$\mathfrak{M} \ni \mu \mapsto Q(\mu,u_1,\ldots,u_n)(\Gamma)$$

измерима относительно μ.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть набор* $\{Q(\mu,u_1,\ldots,u_m),\ \mu \in \mathfrak{M},\ u_1,\ldots,u_m \in \mathfrak{X},\ m \ge 1\}$ *удовлетворяет условиям:*

1) $\forall \mu \in \mathfrak{M},\ u \in \mathfrak{X}$:

$$\lim_{\varepsilon\to 0+} \sup_{\gamma(\mu,\nu)<\varepsilon} \sup_{\rho(u,v)<\varepsilon} \iint_{X^2} \frac{\rho(p_1,p_2)}{1+\rho(p_1,p_2)} Q(\nu,u,v)(dp_1,dp_2) = 0,$$

2) $\exists C>0\ \forall u_1,\ldots,u_m \in \mathfrak{X},\ \forall \mu_1,\mu_2 \in \mathfrak{M}$:

$$\gamma_m(Q(\mu_1,u_1,\ldots,u_m),\, Q(\mu_2,u_1,\ldots,u_m)) \le C\gamma(\mu_1,\mu_2),$$

где γ_m *— расстояние, определенное аналогично* γ *в* $\mathfrak{X}^m$; γ_m *определяется с использованием метрики в* $\mathfrak{X}^m$ *вида* $\max \dfrac{\rho(u_k,v_k)}{1+\rho(u_k,v_k)}$.

Тогда функция

$$K_m(\mu,u_1,\ldots,u_m)(\Delta), \quad \mu\in\mathfrak{M}, \quad u_1,\ldots,u_m\in\mathfrak{X}, \quad \Delta\in\mathcal{B}(\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^m),$$

определенная равенством

$$K_m(\mu,u_1,\ldots,u_m)(\Delta) = \mathrm{P}\{(\mu\varphi_\mu^{-1},\varphi_\mu(u_1),\ldots,\varphi_\mu(u_m))\in\Delta\},$$

является стохастическим ядром и $K_m(\mu,u_1,\ldots,u_m)(\cdot)$ *непрерывно зависит от* $\mu,u_1,\ldots,u_m$ *в метрике слабой сходимости.*

Доказательство. Достаточно доказать лишь указанную в лемме непрерывность. Пусть $f:\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^m\to\mathbb{R}$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица. Рассмотрим последовательность $\{(\mu_N,u_1^N,\ldots,u_m^N)\}$, сходящуюся к $(\mu,u_1,\ldots\ldots,u_m)$ при $N\to\infty$. Оценим разность

$$\int_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^m} f(\nu,q_1,\ldots,q_m)\big(K_m(\mu_N,u_1^N,\ldots,u_m^N) - K_m(\mu,u_1,\ldots,u_m)\big)d\nu dq_1\ldots dq_m. \quad (4)$$

Для этого построим случайные отображения φ_N и φ, соответствующие мерам μ_N и μ на одном вероятностном пространстве. Тогда (4) можно переписать, используя липшицевость и ограниченность f, следующим образом:

$$\left|\mathrm{M} f(\mu_N\varphi_N^{-1},\varphi_N(u_1^N),\ldots,\varphi_N(u_m^N)) - f(\mu\varphi^{-1},\varphi(u_1),\ldots,\varphi(u_m))\right| \le$$

$$\le C\mathrm{M}\gamma(\mu_N\varphi_N^{-1},\mu\varphi^{-1}) + C\mathrm{M}\sum_{k=1}^m \frac{\rho(\varphi_N(u_k^N),\varphi(u_k))}{1+\rho(\varphi_N(u_k^N),\varphi(u_k))}.$$

Оценим отдельно каждое из слагаемых. Для простоты записи далее для произвольной метрики d обозначим через $\tilde{d}$ метрику $d/(1+d)$.

Итак,

$$\mathrm{M}\gamma(\mu_N\varphi_N^{-1},\mu\varphi^{-1}) \le \mathrm{M}\gamma(\mu_N\varphi_N^{-1},\mu_N\varphi^{-1}) + \mathrm{M}\gamma(\mu_N\varphi^{-1},\mu\varphi^{-1}).$$

Для оценки $\mathrm{M}\gamma(\mu_N\varphi_N^{-1},\mu_N\varphi^{-1})$ достаточно доказать, что для произвольной ограниченной и удовлетворяющей условию Липшица функции h на $\mathfrak{X}$

$$\lim_{N\to\infty} \mathrm{M}\left|\int_{\mathfrak{X}} [h(\varphi_N(u)) - h(\varphi(u))]\mu_N(du)\right| = 0.$$

Имеем

$$\mathrm{M}\left|\int_{\mathfrak{X}} [h(\varphi_N(u)) - h(\varphi(u))]\mu_N(du)\right| \le$$

$$\le C\mathrm{M}\int_{\mathfrak{X}} \tilde{\rho}(\varphi_N(u),\varphi(u))\mu_N(du) = \lim_{n\to\infty} C\mathrm{M}\sum_{k=1}^n \tilde{\rho}(\varphi_N(u_k^n),\varphi(u_k^n))a_k^n.$$

Здесь дискретные меры $\sum_{k=1}^{n} a_k^n \delta_{u_k^n}$ слабо сходятся к мере μ_N при $n \to \infty$. До сих пор выбор вероятностного пространства, в котором строятся φ_N и φ, никак не фиксировался. Построим его теперь следующим образом. Рассмотрим при фиксированном $n \geq 1$ пространство $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}} \times \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$ с σ-алгеброй, порожденной цилиндрическими множествами. Определим вероятностную меру, задав ее с помощью семейства согласованных конечномерных распределений. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим на $\mathfrak{X}^{2n} = \mathfrak{X}^n \times \mathfrak{X}^n$ меру $\varkappa$ такую, что ее маргинальные распределения совпадают с $Q(\mu_N, u_1^n, \ldots, u_n^n)$ и $Q(\mu, u_1^n, \ldots, u_n^n)$ и, кроме того,

$$\int\limits_{\mathfrak{X}^{2n}} \max_{k=1,\ldots,n} \tilde{\rho}(p_k, q_k) \varkappa(dp_1, \ldots, dp_n, dq_1, \ldots, dq_n) \leq$$
$$\leq \gamma_m\big(Q(\mu_N, u_1^n, \ldots, u_n^n), Q(\mu, u_1^n, \ldots, u_n^n)\big) + \varepsilon.$$

Теперь для произвольного набора $u_1^n, \ldots, u_n^n, v_1, \ldots, v_m, r_1, \ldots, r_l \in \mathfrak{X}$ определим соответствующую меру на $\mathfrak{X}^{2n+m+l}$ следующим образом.

Пусть для $p_1, \ldots, p_n \in \mathfrak{X}$ $S_N(p_1, \ldots, p_n)$ и $S(p_1, \ldots, p_n)$ — условные меры, соответствующие мерам $Q(\mu_n, u_1^n, \ldots, u_n^n, v_1, \ldots, v_m)$ и $Q(\mu, u_1^n, \ldots, u_n^n, r_1, \ldots, r_l)$. Определим меру

$$U(u_1^n, \ldots, u_n^n, v_1, \ldots, v_m, u_1^n, \ldots, u_n^n, r_1, \ldots, r_l)(\Delta_{2n} \times \Delta_m \times \Delta_l) =$$
$$= \int\limits_{\Delta_{2n}} S_N(p_1, \ldots, p_n)(\Delta_m) S(q_1, \ldots, q_n)(\Delta_l) \varkappa(dp_1, \ldots, dp_n, dq_1, \ldots, dq_n).$$

Здесь Δ_{2n}, Δ_m, Δ_l — борелевские множества в $\mathfrak{X}^{2n}$, $\mathfrak{X}^m$ и $\mathfrak{X}^l$ соответственно. Набор $\{U\}$ является семейством согласованных распределений и ему соответствует вероятностная мера на $\mathfrak{X}^{\mathfrak{X}} \times \mathfrak{X}^{\mathfrak{X}}$. При этом соответствующие случайные отображения φ_N и φ имеют нужные распределения. Кроме того,

$$\mathrm{M} \sum_{k=1}^{n} \tilde{\rho}(\varphi_N(u_k^n), \varphi(u_k^n)) a_k^n \leq \mathrm{M} \max_{k=1,\ldots,n} \tilde{\rho}(\varphi_N(u_k^n), \varphi(u_k^n)) <$$
$$< \gamma_m\big(Q(\mu_N, u_1^n, \ldots, u_n^n), Q(\mu, u_1^n, \ldots, u_n^n)\big) + \varepsilon \leq C_1 \gamma(\mu_N, \mu) + \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\mathrm{M}\gamma(\mu_N \varphi_N^{-1}, \mu_N \varphi^{-1}) \to 0, \quad N \to \infty.$$

Рассмотрим теперь $\mathrm{M}\gamma(\mu_N \varphi^{-1}, \mu \varphi^{-1})$. Как и ранее, для функции h, ограниченной и удовлетворяющей условию Липшица на $\mathfrak{X}$, рассмотрим разность

$$\mathrm{M}\left| \int\limits_{\mathfrak{X}} h(\varphi(u)) \mu_N(du) - \int\limits_{\mathfrak{X}} h(\varphi(u)) \mu(du) \right|.$$

Поскольку последовательность $\{\mu_N; N \geq 1\}$ слабо сходится к μ при $N \to \infty$, то существует такое вероятностное пространство $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, \mathrm{P}_1)$ и последовательность $\mathfrak{X}$-значных случайных элементов $\{\xi_N; N \geq 1\}$ на нем, что

$$\xi_N \to \xi_0, \quad N \to \infty \quad (\mathrm{mod}\ \mathrm{P}_1),$$

причем $\mathrm{P}_1 \xi_N^{-1} = \mu_N$, $N \geq 1$, $\mathrm{P}_1 \xi_0^{-1} = \mu$. Тогда

$$\mathrm{M}\left|\int_{\mathfrak{X}} h(\varphi(u))\mu_N(du) - \int_{\mathfrak{X}} h(\varphi(u))\mu(du)\right| \le \mathrm{M}\mathrm{M}_1 |h(\varphi(\xi_N)) - h(\varphi(\xi_0))| \le$$

$$\le L_1 \mathrm{M}_1 \mathrm{M}\, \tilde\rho(\varphi(\xi_N)), \varphi(\xi_0)).$$

По условию

$$\mathrm{M}\tilde\rho(\varphi(u)), \varphi(v)) \to 0, \quad u \to v.$$

Поэтому

$$\mathrm{M}_1\mathrm{M}\,\tilde\rho(\varphi(\xi_N)), \varphi(\xi_0)) \to 0, \quad N \to \infty.$$

Для доказательства леммы осталось рассмотреть

$$\mathrm{M}\sum_{k=1}^{m} \tilde\rho(\varphi_N(u_k^N), \varphi(u_k)).$$

Достаточно доказать сходимость к нулю одного слагаемого. Имеем

$$\mathrm{M}\tilde\rho(\varphi_N(u_k^N), \varphi(u_k)) \le \mathrm{M}\tilde\rho(\varphi_N(u_k^N), \varphi_N(u_k)) + \mathrm{M}\tilde\rho(\varphi_N(u_k), \varphi(u_k)).$$

Первое слагаемое сходится к нулю согласно условию 1 леммы, а сходимость второго уже доказана. Лемма доказана.

Следствие. *При выполнении условий леммы функция*

$$K(\mu, \Delta) = \mathrm{P}\{\mu\varphi_\mu^{-1} \in \Delta\}, \quad \mu \in \mathfrak{M}, \quad \Delta \in \mathcal{B}(\mathfrak{M}),$$

является стохастическим ядром.

Таким образом, набор ядер $\{Q(t, \mu, u_1, \ldots, u_n);\, t \ge 0,\, \mu \in \mathfrak{M},\, u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{X}\}$, удовлетворяющий условию леммы 3 по μ и $u_1, \ldots, u_n$, а также некоторым условиям согласованности по t, можно использовать для построения марковского процесса в $\mathfrak{M}$. Оказывается, что такой процесс является эволюционным.

Теорема 1. *Пусть набор* $\{Q(t, \mu, u_1, \ldots, u_n);\, t \ge 0, \mu \in \mathfrak{M}, u_1, \ldots, u_n \in \mathfrak{X}\}$ *удовлетворяет условиям леммы 3 при каждом* t *и, кроме того,*

$$\forall t, s \ge 0, \ \forall u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m \in \mathfrak{X}, \quad \forall \Delta \in \mathcal{B}, \ \forall \Gamma \in \mathcal{B}(\mathfrak{X}^m):$$

$$\int_{\mathfrak{X}^{n+m}} Q\left(t+s, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta u_k, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\right)(dx_1, \ldots, dx_n,$$

$$dy_1, \ldots, dy_m)\, \mathbb{1}_\Delta\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}\right) \mathbb{1}_\Gamma(v_1, \ldots, v_m) =$$

$$= \int_{\mathfrak{X}^{n+m}} Q\left(t, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta u_k, u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m\right)(dx'_1, \ldots, dx'_n, dy'_1, \ldots, dy'_m) \times$$

$$\times \int_{\mathfrak{X}^{n+m}} Q\left(s, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta x'_k, x'_1, \ldots, x'_n, y'_1, \ldots, y'_m\right)(dx''_1, \ldots, dx''_n, dy''_1, \ldots, dy''_m) \times$$

$$\times\, \mathbb{1}_\Delta\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{x''_k}\right) \mathbb{1}_\Gamma(y''_1, \ldots, y''_m).$$

Тогда марковский процесс, построенный с помощью переходной функции

$$K(t, \mu, \Delta) = \mathrm{P}\{\mu\varphi_{t,\mu}^{-1} \in \Delta\}, \quad t \ge 0, \quad \mu \in \mathfrak{M}, \quad \Delta \in \mathcal{B},$$

является эволюционным.

Здесь $\varphi_{t,\mu}$ *— случайное отображение, построенное по* $\{Q(t, \mu, \ldots)\}$.

Доказательство. При каждом $n \ge 0$ построим семейство стохастических ядер на $\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}$ следующим образом. Пусть $t\geq 0$, $\mu\in\mathfrak{M}$, $u_1,\ldots,u_n\in\mathfrak{X}$ фиксированы. Используя набор согласованных конечномерных распределений $\{Q(t,\mu,\cdot\ldots\cdot)\}$, как и раньше, построим на некотором вероятностном пространстве случайное отображение $\varphi_{t,\mu}$ из $\mathfrak{X}\to\mathfrak{X}$ такое, что

$$Q(t,\mu,v_1,\ldots,v_k)(\Gamma) = P\{(\varphi_{t,\mu}(v_1),\ldots,\varphi_{t,\mu}(v_k)\in\Gamma)\},\quad \Gamma\in\mathcal{B}(\mathfrak{X}^k).$$

Определим для $\Delta\in\mathcal{B}(\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^n)$

$$K_n(t,\mu,u_1,\ldots,u_n)(\Delta) = P\{(\mu\varphi_{t,\mu}^{-1},\varphi_{t,\mu}(u_1),\ldots,\varphi_{t,\mu}(u_n))\in\Delta\}.$$

Согласно лемме 3 $K_n(t,\cdot\ldots\cdot)$ — стохастическое ядро. Проверим, что при фиксированном μ следующие вероятности представляют собой набор согласованных конечномерных распределений на $[0;+\infty)\times\mathfrak{X}$. Для $0\leq t_0<t_1<\ldots<t_m$, $u_1,\ldots,u_n\in\mathfrak{X}$ через $R(t_0,\ldots,t_m,u_1,\ldots,u_n)$ обозначим вероятностную меру в $(\mathfrak{M}\times\mathfrak{X})^{(m+1)n}$, соответствующую набору параметров $\{(t_i,u_j);\ i=0,\ldots,m,\ j=1,\ldots,n\}$ и заданную равенством

$$R(t_0,\ldots,t_m,u_1,\ldots,u_n)\left(\prod_{k=0}^{m}\prod_{j=1}^{n}\Delta_j^k\times\Gamma_j^k\right) =$$

$$= \prod_{k=1}^{n}(\mathbb{1}_{\Delta_k^0}(\mu)\,\mathbb{1}_{\Gamma_k^0}(u_k))\int\limits_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^n}K_n(t_1,\mu,u_1,\ldots,u_n)(d\nu_1,dv_1^1,\ldots,dv_n^1)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}(\mathbb{1}_{\Delta_k^1}(\nu_1)\,\mathbb{1}_{\Gamma_k^1}(v_k^1))\int\limits_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^n}K_n(t_2-t_1,\nu_1,v_1^1,\ldots,v_n^1)(d\nu_2,dv_1^2,\ldots,dv_n^2)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}(\mathbb{1}_{\Delta_k^2}(\nu_2)\,\mathbb{1}_{\Gamma_k^2}(v_k^2))\ldots\int\limits_{\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^n}K_n(t_m-t_{m-1},\nu_{m-1},v_1^{m-1},\ldots,v_n^{m-1})(d\nu_m,dv_1^m,\ldots,dv_n^m)\times$$

$$\times\prod_{k=1}^{n}(\mathbb{1}_{\Delta_k^m}(\nu_m)\,\mathbb{1}_{\Gamma_k^m}(v_k^m)).$$

В силу леммы 3 достаточно проверить согласованность таких конечномерных распределений в случае, когда

$$\mu = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{x_k}.$$

Тогда согласованность следует из равенства

$$K_n\left(t,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{x_k},u_1,\ldots,u_n\right)(\Delta) = \int\limits_{\mathfrak{X}^{N+n}}Q\left(t,\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{x_k},x_1,\ldots,x_N,u_1,\ldots,u_n\right)\times$$

$$\times(dy_1,\ldots,dy_N,dv_1,\ldots,dv_n)\,\mathbb{1}_{\Delta}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\delta_{y_k},v_1,\ldots,v_n\right),\qquad \Delta\in\mathcal{B}(\mathfrak{M}\times\mathfrak{X}^n),$$

и условия теоремы.

Рассмотрим теперь случайный процесс $\{\mu(t,u),\ \varphi(t,u);\ t\geq 0, u\in\mathfrak{X}\}$, соответствующий набору $\{R\}$. Отметим, что из-за вида $\{R\}$ набор $\{\mu(t,u)\}$ можно выбрать не зависящим от u, т. е. в результате построения получим пару $\{\mu(t),\ \varphi(t,u);\ t\geq 0, u\in\mathfrak{X}\}$. Кроме того, при фиксированном $t\geq 0$ $\varphi(t,u)$ стохастически непрерывна по u. Нетрудно проверить (используя вид $\{R\}$), что для произвольных $u_1,\ldots,u_n\in\mathfrak{X}$ случайный процесс $\{(\mu(t),\varphi(t,u_1),\ldots,\varphi(t,u_n));\ t\geq 0\}$ будет марковским. При этом для всех $t\geq 0$ справедливо равенство

$$M\gamma(\mu(t), \mu\varphi(t,\cdot)^{-1}) = 0.$$

Для проверки последнего заметим, что из-за стохастической непрерывности $\varphi(t,\cdot)$

$$M\gamma(\mu(t), \mu\varphi(t,\cdot)^{-1}) = \lim_{n\to\infty} M\gamma(\mu(t), \mu_n\varphi(t,\cdot)^{-1}),$$

где $\{\mu_n, n \geq 1\}$ — последовательность дискретных мер, сходящаяся к μ. Пусть

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{x_k}, \quad n \geq 1.$$

Тогда, согласно построению,

$$M\gamma(\mu(t), \mu_n\varphi(t,\cdot)^{-1}) =$$

$$= \int_{\mathfrak{X}^n \times \mathfrak{M}} \gamma\left(\nu, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\delta_{x_k}\right) K_n(t,\mu,x_1,\ldots,x_n)(d\nu, dy_1,\ldots,dy_n). \tag{5}$$

Пусть ψ — случайное отображение, построенное по набору конечномерных распределений $\{Q(t,\mu,\ldots)\}$, использовавшееся для построения ядра K_n. Тогда

$$M\gamma(\mu(t), \mu_n\varphi(t,\cdot)^{-1}) = \tilde{M}\gamma(\mu\psi^{-1}, \mu_n\psi^{-1}).$$

Последнее выражение сходится к нулю при $n \to \infty$ в силу стохастической непрерывности ψ. Окончательно

$$\mu(t) = \mu\varphi(t,\cdot)^{-1} \ (\mathrm{mod}\ P).$$

Теорема доказана.

Отметим, что набору вероятностных распределений $\{Q\}$ соответствует набор операторов на ограниченных непрерывных функциях, заданных на степенях пространства $\mathfrak{X}$. Соответствие задается обычным образом. Для $\mu \in \mathfrak{M}$, $t \geq 0$, $f \in C_b(\mathfrak{X}^n)$ положим

$$T_n(t,\mu) f(u_1,\ldots,u_n) = \int_{\mathfrak{X}^n} f(v_1,\ldots,v_n) Q(t,\mu,u_1,\ldots,u_n)(dv_1,\ldots,dv_n).$$

При фиксированных μ и n множество $\{T_n(t,\mu), t \geq 0\}$, вообще говоря, не образует полугруппу, но имеет место следующее соотношение:

$$MT_n(t,\mu(s))\, T_n(s,\mu) f = T_n(t+s,\mu) f.$$

3. Примеры эволюционных мерозначных процессов. В этом пункте рассматриваются различные вероятностные модели, приводящие к эволюционным процессам и наборам распределений из пункта 2.

Пример 2. Пусть $\{L(\mu,u_1,\ldots,u_n);\ \mu \in \mathfrak{M},\ u_1,\ldots,u_n \in \mathfrak{X}\}$ — набор согласованных по n конечномерных распределений в $\mathfrak{X}$, удовлетворяющий условиям леммы 2. Построим по L ядра $\{K_n, n \geq 0\}$ так, как в лемме 2. Обозначим через K_n^m m-ю итерацию ядра K_n для $m \geq 0$. Для фиксированного $\lambda > 0$ положим

$$Q(t,\mu,u_1,\ldots,u_n) = e^{-\lambda t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k t^k}{k!} K_n^m(\mu,u_1,\ldots,u_n).$$

Полученный набор удовлетворяет условиям теоремы 1. Рассмотрим частный случай такой конструкции. Пусть $\mathfrak{X} = \{1,\ldots,N\}$ — конечное множество. Для каждых $i, j \in \mathfrak{X}$ P_{ij} — стохастическая матрица на $\mathfrak{X}$. Зададим набор $\{L\}$ следующим образом. При фиксированном μ $L(\mu, 1, \ldots, N)$ — продакт-мера в $\mathfrak{X}^N$, i-я компонента которой равна $\left(\sum_{j=1}^{N} \mu_j P_{ij}\right)\delta_i$. Здесь δ_i — мера единичной массы, сосредоточенная в точке i. Таким набором описывается следующая физическая модель. В случайные моменты времени (задаваемые пуассоновским процессом, имеющим интенсивность λ) каждая из частиц перемещается независимо от других, но с вероятностями, зависящими от распределения общей массы всех частиц. При этом частицы, попавшие в одну точку пространства, далее движутся вместе.

***Пример* 3.** Пусть $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, $\{G_s^t;\ 0 \le s \le t\}$ — стохастическая полугруппа [1] непрерывных преобразований $\mathfrak{X}$ в себя с независимыми однородными приращениями, т. е.

1) $G_s^t \in C(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ п. н.,

2) G_s^s — тождественное отображение при всех $s \ge 0$ и $\omega \in \Omega$,

3) $G_s^t(G_r^s) = G_r^t$ п. н. при $0 \le r \le s \le t$,

4) $G_{t_1}^{t_2}, G_{t_2}^{t_3}, \ldots, G_{t_{n-1}}^{t_n}$ независимы при $t_1 \le t_2 \le \ldots \le t_n$,

5) распределение $G_{t_1}^{s_1}$ совпадает с распределением $G_{t_2}^{s_2}$ при $s_1 - t_1 = s_2 - t_2 \ge 0$.

Рассмотрим однородный марковский процесс в пространстве $\mathfrak{M} \times C(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$, построенный следующим образом. Для произвольных начальных значений $\kappa \in \mathfrak{M}$ и $g \in C(\mathfrak{X}, \mathfrak{X})$ положим $\kappa_t = \kappa \circ (G_0^t)^{-1}$ и $g_t = G_0^t(g)$. Случайный процесс $\{(\kappa_t, g_t);\ t \ge 0\}$ будет марковским однородным из-за свойств полугруппы G. Для положительной непрерывной функции h на $\mathfrak{X}$ зададим аддитивный однородный функционал от $\{(\kappa_t, g_t);\ t \ge 0\}$ по формуле

$$\varphi_s^t = \int_s^t \int_{\mathfrak{X}} h(u) \kappa_\tau(du)\, d\tau, \quad 0 \le s \le t.$$

Пусть теперь $\{\psi_0^t;\ t \ge 0\}$ — функция, обратная к $\{\varphi_0^t;\ t \ge 0\}$. Рассмотрим процесс, полученный из (κ_t, g_t) случайной заменой времени при условии, что g — тождественное отображение

$$\mu_t = \mu_{\psi_0^t}, \quad f_t = g_{\psi_0^t}, \quad t \ge 0.$$

Тогда $\{\mu_t;\ t \ge 0\}$ — марковский эволюционный мерозначный процесс. Действительно, для того чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $\{\kappa_t;\ t \ge 0\}$ был однородным марковским процессом в пространстве $\mathfrak{M}$ с переходными вероятностями вида

$$\mathrm{P}\{\kappa_{t+r} \in \Delta / \kappa_t = \nu\} = \mathrm{P}\{\nu (G_0^r)^{-1} \in \Delta\}.$$

После замены времени $\{\kappa_t\}$ перейдет в однородный марковский процесс $\{\mu_t\}$. Кроме того, теперь пара $\{(\mu_t, f_t)\}$ также является однородным марковским процессом и

$$\mu_t = \mu (G_0^{\psi_0^t})^{-1} = \mu f_t^{-1}, \quad t \ge 0.$$

Процесс $\{\mu_t\}$ можно описать так. Частицы в пространстве $\mathfrak{X}$ совершают движение вдоль траекторий полугруппы G со скоростью, зависящей от всей массы, которая переносится потоком. Приведенный пример допускает обобщение на случай, когда для разных областей пространства $\mathfrak{X}$ аддитивные функционалы, задающие замену времени, строятся по-разному. В линейном случае, однако, более естественной является конструкция следующего примера.

***Пример* 4.** Пусть $\mathfrak{X} = \mathbb{R}^d$, а ρ — евклидова метрика. Рассмотрим следующее стохастическое дифференциальное уравнение:

$$dx(u,t) = a(\mu_t, x(u,t))dt + b(\mu_t, x(u,t))dw(t),$$
$$x(u,0) = u, \qquad \mu_t = \mu_0 \circ x(\cdot, t)^{-1}. \tag{6}$$

Здесь $\{w(t), t \ge 0\}$ — винеровский процесс в $\mathbb{R}^d$, a, b — гладкие по второму аргументу функции, удовлетворяющие условию Липшица в метрике γ по первому аргументу. Такое уравнение впервые рассматривалось автором [2]. Можно показать, что (6) имеет единственное решение. При этом $\{\mu_t\}$ — эволюционный мерозначный марковский процесс. Отметим, что (6) допускает обобщение на случай, когда X — бесконечномерное гильбертово пространство, а образы мер заменены условными распределениями [3].

4. Аддитивные функционалы от эволюционных процессов. В этом пункте рассматривается случай компактного метрического пространства $(\mathfrak{X}, \rho)$. Пусть $\{\mu_t; t \ge 0\}$ — эволюционный марковский процесс в пространстве $\mathfrak{M}$. Обозначим через $\{f_t; t \ge 0\}$ набор случайных отображений, соответствующих процессу μ, $\{\mathcal{F}_t; t \ge 0\}$ — поток σ-алгебр вида

$$\mathcal{F}_t = \sigma((\mu_s, f_s); s \le t), \qquad t \ge 0.$$

Цель данного пункта — описание однородных аддитивных неотрицательных функционалов от процесса μ, имеющих непрерывную характеристику. Пусть $\{\varphi_s^t; 0 \le s \le t\}$ — такой функционал, а

$$\alpha(\mu, t) = \mathrm{M}_\mu \varphi_0^t, \qquad \mu \in \mathfrak{M}, \quad t \ge 0,$$

— его характеристика. Предположим, что $\alpha \in C(\mathfrak{M} \times [0; +\infty))$. Важными примерами функционалов такого типа являются обобщенные локальные времена.

***Пример* 5.** Пусть $h_k \in C(\mathfrak{X}^k)$ — неотрицательная симметричная функция. Определим функционал φ равенством

$$\varphi_s^t = \int_s^t \int_{\mathfrak{X}^k} \ldots \int h_k(u_1, \ldots, u_k) \mu_\tau(du_1) \ldots \mu_\tau(du_k) d\tau.$$

Тогда φ — аддитивный однородный функционал от процесса μ. При этом его характеристика равна

$$\alpha(\mu, t) = \int_0^t \mathrm{M} \int_{\mathfrak{X}^k} \ldots \int h_k(u_1, \ldots, u_k) \mu_\tau(du_1) \ldots \mu_\tau(du_k) d\tau =$$

$$= \int_0^t \mathrm{M} \int_{\mathfrak{X}^k} \ldots \int h_k(v_1, \ldots, v_k) K(\tau, \mu, u_1)(dv_1) \ldots K(\tau, \mu, u_k)(dv_k) \mu(du_1) \ldots \mu(du_k) d\tau.$$

В этом случае, когда начальная мера μ сосредоточена в одной точке u, с процессом $\{\mu_t; t \ge 0\}$ можно ассоциировать марковский процесс в $\mathfrak{X}$ $\{x_t; t \ge 0\}$, где $\mu_t = \delta_{x_t}$, $t \ge 0$. Тогда

$$\varphi_s^t = \int_s^t h_k(x_\tau, \dots, x_\tau)d\tau = \int_s^t h(x_\tau)d\tau,$$

$$h(u) = h_k(u, u, u, \dots, u), \quad u \in \mathfrak{X},$$

т. е. является обычным локальным временем для процесса $\{x_t;\, t \ge 0\}$.

Определение 2. *Назовем функционал, являющийся линейной комбинацией функционалов из примера* 4, *обобщенным локальным временем процесса* μ.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть* $\{\varphi_s^t;\, 0 \le s \le t\}$ *— однородный аддитивный неотрицательный функционал от процесса* $\{\mu_t;\, t \ge 0\}$, *имеющий непрерывную характеристику. Тогда существует последовательность обобщенных локальных времен* $\{\psi_n;\, n \ge 1\}$ *такая, что*

$$\forall\, 0 \le s \le t, \quad \forall \mu \in \mathfrak{M}: \quad \mathrm{M}_\mu(\varphi_s^t - \psi_{ns}^t)^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Доказательство. Поскольку φ — неотрицательный функционал, то из соотношения

$$\alpha(\mu, t+s) = \alpha(\mu, t) + (T_t\alpha(\cdot, s))(\mu)$$

($\{T_t;\, t \ge 0\}$ — полугруппа, соответствующая процессу $\{\mu_t;\, t \ge 0\}$) и непрерывности α следует

$$\max_{\mathfrak{M}} \alpha(\mu, t) \to 0, \quad t \to 0+$$

($\mathfrak{M}$ — компактное метрическое пространство). Поэтому [4, с. 273] (теорема 6.6) для каждой начальной меры $\mu \in \mathfrak{M}$ и произвольных $0 \le s \le t$

$$\mathrm{M}_\mu\left(n\int_s^t \alpha\left(\mu_\tau, \frac{1}{n}\right)d\tau - \varphi_s^t\right)^2 \to 0, \quad n \to \infty.$$

Таким образом, функционал φ является пределом в среднем квадратическом функционалов вида

$$\int_s^t g(\mu_\tau)d\tau, \quad 0 \le s \le t,$$

где $g \in C(\mathfrak{M})$. Поскольку по предположению $(\mathfrak{X}, \rho)$ — компактное метрическое пространство, то, как уже отмечалось, $(\mathfrak{M}, \gamma)$ также является компактом в силу теоремы Банаха – Алаоглу. Согласно теореме Стоуна – Вейерштрасса множество „многочленов" вида

$$\beta(\mu) = \sum_{k=0}^{n} \int \dots \int_{\mathfrak{X}^k} h_k(u_1, \dots, u_k)\mu(du_1)\dots\mu(du_k),$$

$h_k \in C(\mathfrak{X}^k)$, $k = 1, \dots, n$, плотно в $C(\mathfrak{M})$ с равномерной нормой. Поэтому функционалами типа обобщенного локального времени можно аппроксимировать функционал φ. Теорема доказана.

С эволюционным марковским процессом $\{\mu_t;\, t \ge 0\}$ согласно определению 1 связано семейство отображений $\{f_t;\, t \ge 0\}$ пространства $\mathfrak{X}$ в себя. Поэтому при каждом $u \in \mathfrak{X}$ определена траектория частицы, первоначально находившейся в точке u $\{f_t(u);\, t \ge 0\}$. Следовательно, можно по функции $g_k \in C(\mathfrak{X}^k)$ построить семейство функционалов

$$L(g_k, u_1, \ldots, u_k)_s^t = \int_s^t g_k(f_\tau(u_1), \ldots, f_\tau(u_k))\,d\tau,$$

$u_1, \ldots, u_k \in \mathfrak{X}$, $0 \le s \le t$.

Отметим, что случайные процессы $\{(f_t(u_1), \ldots, f_t(u_k));\ t \ge 0\}$ не являются, вообще говоря, марковскими, а функционалы от них не являются функционалами от исходного процесса $\{\mu_t;\ t \ge 0\}$. Однако, в силу формулы замены переменных,

$$\int_s^t \int_{\mathfrak{X}^k} \ldots \int h_k(u_1, \ldots, u_k)\mu_\tau(du_1)\ldots\mu_\tau(du_k)\,d\tau =$$

$$= \int_{\mathfrak{X}^k} \ldots \int L(h_k, u_1, \ldots, u_k)_s^t \mu(du_1)\ldots\mu(du_k).$$

Поэтому свойства функционалов $\{L\}$ могут быть использованы при описании однородных аддитивных функционалов от марковского процесса $\{\mu_t;\ t \ge 0\}$ (см., например, [5]). Так, в примере 2, если $d = 1$, то в качестве предела функционалов из набора $\{L\}$ может фигурировать настоящее локальное время

$$\tilde{L}(u)_s^t = \int_s^t \delta_0(x(u, \tau))\,d\tau,$$

существующее в данном случае в силу формулы Танака [6]. Поэтому определен однородный аддитивный функционал от процесса $\{\mu_t;\ t \ge 0\}$ вида

$$\varphi_s^t = \int_{\mathbb{R}} \tilde{L}(u)_s^t \mu(du),$$

который формально можно записать так:

$$\varphi_s^t = \int_s^t \int_{\mathbb{R}} \delta_0(v)\mu_\tau(dv)\,d\tau.$$

1. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы. – Киев: Наук. думка, 1979. – 200 с.
2. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic partial differential equations: 1. Finite mass. – Cleveland (USA), 1997. – 19 p. – (Preprint, № 97-145).
3. *Dorogovtsev A. A.* Stochastic flows and random measure-valued processes in abstract space // Int. Conf. "Stochastic Analysis and its Applications", 10 – 17 June 2001, Lviv, Ukraine: Abstrs. – Lviv, 2001. – P. 15.
4. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы. – М.: Физматгиз, 1963. – 860 с.
5. *Dorogovtsev A. A., Goncharuk N. Yu.* Local times for measure-valued Ito's stochastic processes. – Cleveland (USA), 1995. – 11 p. – (Preprint, № 95-142).
6. *Ватанабэ С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы. – М.: Наука, 1986. – 448 с.

Получено 30.10.2001