УДК 5519.21+62

В. С. Королюк (Ін-т математики НАН України, Київ),
Я. М. Чабанюк (Нац. ун-т "Львів. політехніка")

СТІЙКІСТЬ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕМИКАННЯМИ ЗА УМОВ СТІЙКОСТІ УСЕРЕДНЕНОЇ СИСТЕМИ*

We establish additional conditions of stability imposed on the rate of dynamical system with semi-Markov switchings and on the Lyapunov function for an averaged system.

Встановлено додаткові умови стійкості на швидкість динамічної системи з напівмарковськими перемиканнями та функцію Ляпунова для усередненої системи.

1. Вступ. Уперше стійкість динамічної системи, що задовольняє принцип усереднення, встановив М. М. Боголюбов [1] (див. також [2]). Стійкість динамічної системи з марковським збуренням за умов стійкості усередненої системи вивчалась у роботах [3 – 5], а також у [6 – 8]. В умовах дифузійної апроксимації динамічної системи з марковським збуренням проблема стійкості вперше була розв'язана в роботі [9] з використанням мартингальної характеризації відповідного марковського процесу (див. також [10]). Стійкість динамічної системи у напівмарковському середовищі в умовах усереднення та дифузійної апроксимації вивчав А. В. Свіщук [11] (див. також [12], розділ 8). При цьому використовувалась мартингальна характеризація марковського процесу з додатковою компонентою лінійчатого процесу.

У даній роботі аналіз стійкості динамічної системи з напівмарковськими перемиканнями реалізується з використанням компенсуючого оператора для напівмарковського процесу, введеного в роботі [13]. Проблема стійкості напівмарковської стохастичної системи фактично зводиться до аналогічної проблеми з марковськими перемиканнями (див. [10]).

2. Постановка задачі. Вихідна динамічна автономна система з напівмарковськими перемиканнями у схемі серій з малим параметром серії $\varepsilon > 0$ задається еволюційним диференціальним рівнянням

$$\frac{du^{\varepsilon}(t)}{dt} = C\left(u^{\varepsilon}(t), x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)\right), \quad u^{\varepsilon}(0) = u_0, \tag{1}$$

в евклідовому просторі R^d: $u^{\varepsilon}(t) = (u_k^{\varepsilon}(t);\ k = \overline{1, d})$.

Швидкості динамічної системи задано вектором-функцією $C(u, x) = (C_k(u, x);\ k = \overline{1, d})$, що залежить від фазового стану $x \in X$ у стандартному фазовому просторі $(X, \mathcal{X})$. Напівмарковський процес (НМП) $x(t)$, $t \geq 0$, у стандартному фазовому просторі $(X, \mathcal{X})$ задається напівмарковським ядром ([12], розділ 2)

$$Q(x, B, t) = \mathrm{P}\{x_{n+1} \in B, \theta_{n+1} \leq t \mid x_n = x\}.$$

Тут $(x_n, \tau_n;\ n \geq 0)$ — процес марковського відновлення, асоційований з процесом $x(t)$, $t \geq 0$; τ_n, $n \geq 0$, — моменти відновлення, що обчислюються за формулою

$$\tau_n = \sum_{k=1}^{n} \theta_k, \quad n \geq 0, \quad \tau_0 = 0.$$

---

* Виконана при частковій підтримці Державного фонду фундаментальних досліджень України (проект № 01.07/96).

Інтервали між моментами відновлення $\theta_{n+1} = \tau_{n+1} - \tau_n$, $n \geq 0$, визначаються функціями розподілу

$$G_x(t) = Q(x, X, t) = \mathrm{P}\{\theta_{n+1} \leq t | x_n = x\} = \mathrm{P}\{\theta_x \leq t\},$$

де θ_x — час перебування НМП у стані $x \in X$. Вкладений ланцюг Маркова (ВЛМ) x_n, $n \geq 0$, визначається стохастичним ядром

$$P(x, B) = Q(x, B, +\infty) = \mathrm{P}\{x_{n+1} \in B | x_n = x\}.$$

В подальшому використовується припущення (що не зменшує загальності [12])

$$Q(x, B, t) = P(x, B) G_x(t).$$

Лічильний процес $\nu(t) = \max\{n : \tau_n \leq t\}$, $t \geq 0$, визначає НМП $x(t) := x_{\nu(t)}$, $t \geq 0$. Регулярний НМП характеризується умовою $\mathrm{P}\{\nu(t) < +\infty\} = 1$, $t \geq 0$.

Алгоритм фазового усереднення динамічної системи (1) з напівмарковськими перемиканнями реалізується за умови ергодичності ВЛМ x_n, $n \geq 0$ [14], та за додаткової умови існування середніх значень перебування в станах. Стаціонарний розподіл ВЛМ $\rho(B)$, $B \in X$, визначається розв'язком інтегрального рівняння

$$\rho(B) = \int_X \rho(dx) P(x, B), \qquad B \in X, \qquad \rho(X) = 1.$$

Стаціонарний розподіл НМП $\pi(dx)$ визначається рівностями

$$\pi(dx) = \rho(dx) \frac{m(x)}{m}, \qquad m(x) = \mathrm{E}\theta_x = \int_0^\infty \overline{G}_x(t) dt, \qquad \overline{G}_x = 1 - G_x(t),$$
$$m = \int_X \rho(dx) m(x). \tag{2}$$

Для „інтенсивності" часу перебування введемо позначення* $q(x) := m^{-1}(x)$, $q := m^{-1}$. Тоді співвідношення (2) запишеться у вигляді

$$\pi(dx) q(x) = q \rho(dx), \qquad q = \int_X \pi(dx) q(x),$$

що відповідає співвідношенню для стаціонарних розподілів марковського процесу та його ВЛМ з показниково розподіленим часом перебування з інтенсивностями $q(x)$.

Усереднена динамічна система визначається розв'язком еволюційного детермінованого рівняння

$$\frac{d\hat{u}(t)}{dt} = \hat{C}(\hat{u}(t)), \qquad \hat{u}(t) = u_0. \tag{3}$$

Усереднена швидкість задається рівністю [14]

$$\hat{C}(u) = \int_X \pi(dx) C(u, x). \tag{4}$$

Задача полягає в тому, щоб в умовах стійкості усередненої системи (3)

* Якщо $m(x) = 0$, то $q(x) = \infty$.

встановити додаткові умови, що забезпечують стійкість вихідної стохастичної системи (1) при достатньо малих значеннях параметра серії $\varepsilon > 0$.

3. Формулювання результату.

Теорема. *Припустимо, що для усередненої динамічної системи* (3), (4) *існує функція Ляпунова* $V(u)$, $u \in R^d$, *для якої виконуються такі умови:*

умова експоненціальної стійкості

C_1) $\hat{C}(u)V'(u) \le -c_0V(u)$, $c_0 > 0$;

додаткові умови

C_2) $|C(u,x)V'(u)| \le c_1V(u)$,

C_3) $|C(u,x)[C(u,x)V'(u)]'| \le c_2V(u)$;

оператор

$$C_4)\quad Q\varphi(x) = q(x)\int_X P(x,dy)[\varphi(y)-\varphi(x)]$$

визначає рівномірно ергодичний процес Маркова;

функції розподілу $G_x(t)$, $t \ge 0$, $x \in X$, *часів перебування в станах напівмарковського процесу* $x(t)$, $t \ge 0$, *задовольняють умову Крамера, рівномірно по* $x \in X$

$$C_5)\quad \sup_{x\in X}\int_0^\infty e^{ht}\overline{G}_x(t)\,dt \le H < +\infty,\ h > 0,$$

а також мають місце оцінки

$$0 < \underline{m} \le m(x) \le \overline{m} < +\infty.$$

Тоді для всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 *— достатньо мале*) *розв'язок еволюційного рівняння* (1) *при всіх початкових умовах* $|u^\varepsilon(0)| \le u_0$ (u_0 *— достатньо мале*) *є асимптотично стійким з імовірністю одиниця:*

$$\mathrm{P}\left\{\lim_{t\to\infty}\left\|u^\varepsilon(t)\right\| = 0\right\} = 1. \tag{5}$$

Зауваження 1. При випадкових початкових даних виконується умова $|Eu^\varepsilon(0)| \le u_0$ (u_0 — достатньо мале).

4. Компенсуючий оператор. Розширений процес марковського відновлення (ПМВ) задається послідовністю

$$u_n^\varepsilon = u^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon),\qquad x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon),\qquad \tau_n^\varepsilon = \varepsilon\tau_n,\quad n \ge 0. \tag{6}$$

Означення [13]. *Компенсуючий оператор розширеного ПМВ* (6) *визначається співвідношенням*

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) := \varepsilon^{-1}q(x)\mathrm{E}[\varphi(u_1^\varepsilon, x_1^\varepsilon, \tau_1^\varepsilon) - \varphi(u,x,t)\,|\,u_0^\varepsilon = u, x_0^\varepsilon = x, \tau_0^\varepsilon = t]. \tag{7}$$

Нехай $C_t(x)$, $t \ge 0$, $x \in X$, — сукупність напівгруп, що породжуються оператором

$$C(x)\varphi(u) = C(u,x)\varphi'(u). \tag{8}$$

Лема 1. *Компенсуючий оператор розширеного ПМВ* (6) *обчислюється за формулою*

$$L^\varepsilon\varphi(u,x,t) = \varepsilon^{-1}q(x)\left[\int_0^\infty G_x(ds)C_{\varepsilon s}(x)\int_X P(x,dy)\varphi(u,y,t+\varepsilon s) - \varphi(u,x,t)\right].$$

Твердження леми 1 є безпосереднім наслідком означення компенсуючого оператора (7).

Лема 2. *Компенсуючий оператор на пробних функціях* $\varphi(u,x) \in C^2(R^d \times E)$ *має асимптотичні зображення*

$$L^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + C(x)P\varphi(u,x) + \varepsilon\theta^\varepsilon(x)$$

або

$$L^\varepsilon \varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + \theta_1^\varepsilon(x)\varphi(u,x), \tag{9}$$

де

$$Q\varphi(\cdot,x) = q(x)[P-I]\varphi(\cdot,x), \quad x \in X, \quad P\varphi(\cdot,x) = \int\limits_X P(x,dx)\varphi(\cdot,y).$$

Залишковий оператор $\theta(x)$ *має вигляд*

$$\theta^\varepsilon(x)\varphi(u,x) = q(x)C^2(x)C^\varepsilon(x)P\varphi(u,\cdot),$$

$$\theta_1^\varepsilon(x) = q(x)C(x)C_1^\varepsilon(x)P,$$

$$C^\varepsilon(x)\varphi(u) := \int\limits_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)C_{\varepsilon s}(x)\varphi(u)\,ds, \tag{10}$$

$$C_1^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)C_{\varepsilon s}(x)\,ds,$$

$$\overline{G}_x^{(2)}(s) := \int\limits_s^\infty \overline{G}_x(t)\,dt.$$

Доведення леми 2 базується на зображенні напівгрупи

$$C_{\varepsilon x}(x) = I + \varepsilon s C(x) + \varepsilon^2 C^2(x) C_{\varepsilon s}^\varepsilon(x) = I + C(x)\int\limits_0^{\varepsilon^2 s} C_v(x)\,dv,$$

де

$$C_s^\varepsilon(x) = \int\limits_0^s (s-v)C_v(x)\,dv.$$

Зауважимо, що обчислення залишкового оператора базується на співвідношеннях

$$C_2^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty G_x(ds)C_{\varepsilon s}^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)C_{\varepsilon s}(x)\,ds,$$

$$C_1^\varepsilon(x) = \int\limits_0^\infty \overline{G}_x(s)C_{\varepsilon s}(x)\,ds.$$

Крім того,

$$\int\limits_0^\infty \overline{G}_x^{(2)}(s)\,ds = \frac{m_2(x)}{2}, \qquad m_2(x) := \mathrm{E}\theta_x^2 = \int\limits_0^\infty t^2 G_x(dt).$$

5. Збурена функція Ляпунова. Розглянемо збурену функцію Ляпунова

$$V^{\varepsilon}(u,x) = V(u) + \varepsilon V_1(u,x), \tag{11}$$

де $V(u)$, $u \in R^d$, — функція Ляпунова для усередненої системи (3), що задовольняє умови $C_1 - C_3$ теореми.

Збурення $V_1(u,x)$, $u \in R^d$, $x \in X$, визначається розв'язком проблеми сингулярного збурення для оператора

$$L_0^{\varepsilon}\varphi(u,x) = \varepsilon^{-1} Q\varphi(u,x) + C(x)\varphi(u,x). \tag{12}$$

Згідно з [15] розв'язок проблеми сингулярного збурення для оператора (12) визначається співвідношеннями

$$L_0^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = \hat{C}V(u) + \varepsilon C(x)V_1(u,x),$$

$$\hat{C}V(u) = \hat{C}(u)V'(u),$$

$$V_1(u,x) = R_0\tilde{C}(x)V(u),$$

де $\tilde{C}(x) := \hat{C} - C(x)$, а оператор $R_0 = (Q + \Pi)^{-1} - \Pi$ є потенціалом оператора Q [15]. Відомо, що за умови C_4 теореми оператор R_0 є обмеженим [12].

Лема 3. *Розв'язок проблеми сингулярного збурення для компенсуючого оператора* (9) *на збуреній функції Ляпунова* (11) *визначається співвідношеннями*

$$L^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) = \hat{C}V(u) + \varepsilon\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u). \tag{13}$$

Залишковий оператор має вигляд

$$\theta_0^{\varepsilon}(x) = q(x)[C^2(x)C_2^{\varepsilon}(x) + C(x)C_1^{\varepsilon}(x)PR_0\tilde{C}(x)]P. \tag{14}$$

Доведення леми 3 базується на використанні розв'язку проблеми сингулярного збурення для оператора (12) з урахуванням розкладу (9) леми 2.

***Висновок* 1.** В умовах $C_1 - C_5$ теореми справджується нерівність

$$L^{\varepsilon}V^{\varepsilon}(u,x) \le -cV(u). \tag{15}$$

Для доведення нерівності (15) спочатку оцінюємо залишковий оператор (14), використовуючи умови $C_2 - C_4$ теореми

$$|\theta_0^{\varepsilon}(x)V(u)| \le c_0V(u), \qquad |V_1(u,x)| \le c_1V(u). \tag{16}$$

Згідно з умовою експоненціальної стійкості C_1 перший член в (13) задовольняє нерівність

$$\hat{C}V(u) = C(u,x)V'(u) \le -c_0V(u), \qquad c_0 > 0. \tag{17}$$

Поєднуючи оцінки (16) та (17), отримуємо (15) при всіх $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 — достатньо мале) і при деякому значенні $c > 0$.

***Висновок* 2.** Умова C_2 теореми забезпечує оцінку напівгрупи $C_t(x)$, що породжується оператором (8),

$$|C_t(x)V(u)| \le e^{bt}V(u), \tag{18}$$

а також мають місце нерівності (див. (11), (16))

$$0 \le b_1V^{\varepsilon}(u,x) \le V(u) \le b_2V^{\varepsilon}(u,x), \qquad 0 < b_1 < b_2.$$

6. Мартингальна характеризація розширеного ПМВ.

Лема 4. *Розширений ПМВ* (6) *характеризується мартингалом*

$$\mu_{n+1}^{\varepsilon} = \varphi(u_{n+1}^{\varepsilon}, x_{n+1}^{\varepsilon}, \tau_{n+1}^{\varepsilon}) - \sum_{k=0}^{n} \theta_{k+1} L^{\varepsilon} \varphi(u_k^{\varepsilon}, x_k^{\varepsilon}, \tau_k^{\varepsilon}), \quad n \geq 0. \tag{19}$$

Доведення. Мартингальна властивість послідовності $(\mu_{n+1}^{\varepsilon}, n \geq 0)$ випливає з однорідності компенсуючого оператора:

$$E[\varphi(u_{n+1}^{\varepsilon}, x_{n+1}^{\varepsilon}, \tau_{n+1}^{\varepsilon}) - \varphi(u_n^{\varepsilon}, x_n^{\varepsilon}, \tau_n^{\varepsilon}) \mid F_n^{\varepsilon}] =$$

$$= E[\varphi(u_1^{\varepsilon}, x_1^{\varepsilon}, \tau_1^{\varepsilon}) - \varphi(u_0^{\varepsilon}, x_0^{\varepsilon}, \tau_0^{\varepsilon}) \mid F_0^{\varepsilon}].$$

Тут $F_n^{\varepsilon} := \sigma\{u_k^{\varepsilon}, x_k^{\varepsilon}, \tau_k^{\varepsilon}; 0 \leq k \leq n\}$, $n \geq 0$, — σ-алгебра, що породжується розширеним ПМВ.

Для скорочення запису позначимо

$$\Phi^{\varepsilon}(t) := \varphi(u^{\varepsilon}(\tau^{\varepsilon}(t)), x^{\varepsilon}(t), \tau^{\varepsilon}(t)),$$

$$\Phi_+^{\varepsilon}(t) := \varphi(u^{\varepsilon}(\tau_+^{\varepsilon}(t)), x^{\varepsilon}(\tau_+^{\varepsilon}(t)), \tau_+^{\varepsilon}(t)),$$

де $\tau^{\varepsilon}(t) := \tau_{\nu^{\varepsilon}(t)}^{\varepsilon}$, $\tau_+^{\varepsilon}(t) := \tau_{\nu_+^{\varepsilon}(t)}^{\varepsilon}$, $\nu_+^{\varepsilon}(t) := \nu^{\varepsilon}(t) + 1$.

Зауважимо, що $\nu_+^{\varepsilon}(t)$ є марковським моментом для потоку F_n^{ε}.

Далі використовуємо мартингальну властивість процесу з неперервним часом

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = \Phi_+^{\varepsilon}(t) - \int_0^{\tau_+^{\varepsilon}(t)} L^{\varepsilon} \Phi^{\varepsilon}(s) ds. \tag{20}$$

Зауважимо, що

$$\zeta^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}) = \mu_{n+1}^{\varepsilon}, \quad n \geq 0,$$

а також

$$\zeta^{\varepsilon}(t) = \zeta^{\varepsilon}(\tau_+^{\varepsilon}(t)), \quad \tau^{\varepsilon}(t) < t < \tau_+^{\varepsilon}(t).$$

Наступна лема має ключове значення при доведенні стійкості динамічної системи (пор. з лемою 3.2 [16, с. 174]).

Лема 5. *При будь-якому фіксованому дійсному значенні параметра* $c \in R$ *процес*

$$\zeta_c^{\varepsilon}(t) = e^{c\tau_+^{\varepsilon}(t)} \Phi_+^{\varepsilon}(t) - \int_0^{\tau_+^{\varepsilon}(t)} [c e^{cs} \Phi_+^{\varepsilon}(s) + e^{c\tau^{\varepsilon}(s)} L^{\varepsilon} \Phi^{\varepsilon}(s)] ds \tag{21}$$

має мартингальну властивість

$$E[\zeta_c^{\varepsilon}(t) - \zeta_c^{\varepsilon}(s) \mid F_s^{\varepsilon}] = 0, \quad 0 \leq s < t,$$

відносно потоку σ*-алгебр*

$$F_s^{\varepsilon} := \sigma\{u^{\varepsilon}(\nu), x^{\varepsilon}(\nu), \tau^{\varepsilon}(\nu); 0 \leq \nu \leq s\}.$$

Доведення. Процес (21) можна подати в еквівалентній формі

$$\zeta_c^{\varepsilon}(t) = e^{c\tau_+^{\varepsilon}(t)} \zeta^{\varepsilon}(t) - \int_0^{\tau_+^{\varepsilon}(t)} c e^{cs} \zeta^{\varepsilon}(s) ds, \tag{22}$$

де процес $\zeta^{\varepsilon}(t)$, $t \geq 0$, задається формулою (20).

Зауважимо, що мартингальна властивість процесу (22) випливає з того, що процес стрибковий і набуває значень

$$\zeta_c^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = e^{c\tau_{n+1}^\varepsilon}\mu_{n+1}^\varepsilon - \sum_{k=0}^{n}[e^{c\tau_{k+1}^\varepsilon} - e^{c\tau_k^\varepsilon}]\mu_{k+1}^\varepsilon, \tag{23}$$

або

$$\zeta_c^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = \mu_0 + \sum_{k=0}^{n} e^{c\tau_k^\varepsilon}[\mu_{k+1}^\varepsilon - \mu_k^\varepsilon], \quad n \ge 0. \tag{24}$$

Для доведення еквівалентності зображень (21) та (22) обчислимо подвійний інтеграл

$$I^\varepsilon(t) = \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} ce^{c\varepsilon}\,ds \int_0^{\tau_+^\varepsilon(s)} L^\varepsilon\Phi^\varepsilon(v)\,dv = \sum_{k=0}^{v^\varepsilon(t)} \int_{\tau_k^\varepsilon}^{\tau_{k+1}^\varepsilon} ce^{c\varepsilon}\,ds \int_0^{\tau_{k+1}^\varepsilon} L^\varepsilon\Phi^\varepsilon(v)\,dv =$$

$$= \sum_{k=0}^{v^\varepsilon(t)} (e^{c\tau_{k+1}^\varepsilon} - e^{c\tau_k^\varepsilon}) \sum_{r=0}^{k} \varepsilon\theta_{r+1} L^\varepsilon\Phi^\varepsilon(\tau_r^\varepsilon) =$$

$$= \sum_{k=0}^{v^\varepsilon(t)} \theta_{r+1} L^\varepsilon\Phi^\varepsilon(\tau_r^\varepsilon)(e^{c\tau_{r+1}^\varepsilon} - e^{c\tau_r^\varepsilon}).$$

Остаточно маємо

$$I^\varepsilon(t) = e^{c\tau_+^\varepsilon(t)} \int_0^{\tau_+^\varepsilon(s)} L^\varepsilon\Phi^\varepsilon(s)\,ds - \int_0^{\tau_+^\varepsilon(s)} e^{c\tau^\varepsilon(s)} L^\varepsilon\Phi^\varepsilon(s)\,ds.$$

Отже, зображення (21) отримаємо з (20) та (22).

Розглянемо тепер процес

$$\eta^\varepsilon(t) = \int_0^{\tau_+^\varepsilon(t)} [e^{cs} c V_+^\varepsilon(s) + e^{c\tau^\varepsilon(t)} L^\varepsilon V^\varepsilon(s)]\,ds. \tag{25}$$

Лема 6. *При достатньо малих значеннях параметра* c *для всіх* $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 *— достатньо мале) в умовах теореми процес* $\eta^\varepsilon(t)$, $t \ge 0$, *задовольняє умову*

$$E[\eta^\varepsilon(t) - \eta^\varepsilon(s) \mid F_s^\varepsilon] \le 0, \quad 0 \le s < t. \tag{26}$$

Доведення. Оскільки процес (25) стрибковий, достатньо розглянути умовне сподівання в моменти марковського відновлення:

$$\eta_{n+1}^\varepsilon := \eta^\varepsilon(\tau_n^\varepsilon) = \int_0^{\tau_{n+1}^\varepsilon} [e^{cs} c V_+^\varepsilon(s) + e^{c\tau^\varepsilon(s)} L^\varepsilon V^\varepsilon(s)]\,ds, \tag{27}$$

або

$$\eta_{n+1}^\varepsilon = \sum_{k=0}^{n} e^{c\tau_k^\varepsilon} \alpha_{k+1}^\varepsilon, \tag{28}$$

де

$$\alpha_{k+1}^\varepsilon = (e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)V_{k+1}^\varepsilon + \varepsilon\theta_{k+1} L^\varepsilon V_k^\varepsilon = \beta_{k+1}^\varepsilon + \varepsilon\gamma_{k+1}^\varepsilon. \tag{29}$$

Для оцінки умовного сподівання першого доданка в (29) використаємо оцінку напівгрупи (див. висновок 2) $C_t(x)$, що породжується генератором (8),

$$|C_t(x)V(u)| \le e^{bt}V(u), \qquad b > 0.$$

Отже, маємо

$$E[\beta_{k+1}^{\varepsilon} \mid F_k^{\varepsilon}] = E[(e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)V_{k+1}^{\varepsilon} \mid F_k^{\varepsilon}] =$$

$$= E[(e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)C_{\varepsilon\theta_{k+1}}(x_k)V_k^{\varepsilon} \mid F_k^{\varepsilon}] \le E[(e^{\varepsilon c\theta_{k+1}} - 1)e^{\varepsilon b\theta_{k+1}} \mid F_k^{\varepsilon}]V_k^{\varepsilon} =$$

$$= E[(e^{\varepsilon(c+b)\theta_{k+1}} - e^{\varepsilon b\theta_{k+1}}) \mid F_k^{\varepsilon}]V_k^{\varepsilon} = \varepsilon[b(g_k^{\varepsilon}(b+c) - g_k^{\varepsilon}(b)) + cg_k^{\varepsilon}(b+c)]V_k^{\varepsilon}.$$

Враховуючи, що

$$g_k^{\varepsilon}(c) = \int_0^{\infty} \overline{G}_k(t)e^{\varepsilon ct}\,dt,$$

та умову C_5 теореми, одержуємо

$$m_k \le g_k^{\varepsilon}(c) \le m_k(1+\delta_{\varepsilon}),$$

де $\delta_{\varepsilon} \le \delta_0$ (δ_0 — достатньо мале) при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 —достатньо мале).

Отже, остаточно маємо

$$E[\beta_{k+1}^{\varepsilon} \mid F_k^{\varepsilon}] \le \varepsilon[b\delta_{\varepsilon} + cm_k(1+\delta_{\varepsilon})]V_k^{\varepsilon} < \varepsilon\delta_0 V_k^{\varepsilon}$$

при $\varepsilon \le \varepsilon_0$ (ε_0 — достатньо мале) та достатньо малому c.

Умовне сподівання другого члена в (29) оцінюється згідно з нерівністю (17):

$$E[\gamma_{k+1}^{\varepsilon} \mid F_k^{\varepsilon}] = m_k L^{\varepsilon}V_k^{\varepsilon} \le -c_0 m_k V_k^{\varepsilon} \le -c_0\underline{m}V_k^{\varepsilon}.$$

Остаточно маємо

$$E[\alpha_{k+1}^{\varepsilon} \mid F_k^{\varepsilon}] \le -\varepsilon[c_0 m - \delta_0]V_k^{\varepsilon} \le -\varepsilon c_0 V_k^{\varepsilon}, \quad c_0 > 0, \text{ якщо } \delta_0 \le c_0\underline{m}.$$

Лему 6 доведено.

7. Доведення теореми. Перш за все з леми 6 випливає такий висновок: послідовність

$$w_{n+1}^{\varepsilon} = e^{c\tau_{n+1}^{\varepsilon}}V_{n+1}^{\varepsilon}, \qquad V_{n+1}^{\varepsilon} := V^{\varepsilon}(u_{n+1}^{\varepsilon}, x_{n+1}^{\varepsilon}, \tau_{n+1}^{\varepsilon}),$$

є супермартингалом:

$$E[w_{n+1}^{\varepsilon} \mid F_n^{\varepsilon}] \le w_n^{\varepsilon}, \qquad n \ge 0. \tag{30}$$

Дійсно, згідно з лемою 5 маємо (див. (21) та (27), (28))

$$w_{n+1}^{\varepsilon} = \zeta_c^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}) + \eta_{n+1}^{\varepsilon}.$$

Мартингальна властивість послідовності (24) та умова (26) забезпечують виконання умови (30):

$$E[w_{n+1}^{\varepsilon} \mid F_n^{\varepsilon}] = E[\zeta_c^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}) + \eta_{n+1}^{\varepsilon} \mid F_n^{\varepsilon}] =$$

$$= w_n^{\varepsilon} + E[\zeta_c^{\varepsilon}(\tau_n^{\varepsilon}) - \zeta_c^{\varepsilon}(\tau_{n+1}^{\varepsilon}) \mid F_n^{\varepsilon}] + E[\eta_{n+1}^{\varepsilon} - \eta_n^{\varepsilon} \mid F_n^{\varepsilon}] \le w_n^{\varepsilon}.$$

Регулярність ПМВ означає, що

$$\tau_n^{\varepsilon} \Rightarrow \infty, \qquad n \to \infty,$$

з імовірністю 1. Отже, для події $A_{T,n}^{\varepsilon} = \{\tau_n^{\varepsilon} > T\}$ має місце оцінка

$$P(A_{T,n}^{\varepsilon}) \ge 1 - \Delta, \qquad n \ge N_{T,\Delta}^{\varepsilon},$$

для будь-якого $\Delta > 0$.

Введемо позначення $a_n^\varepsilon := e^{c(\tau_n^\varepsilon - T)}$, $n \ge 0$. На події $A_{T,n}^\varepsilon$ маємо $a_n^\varepsilon \ge 1$, $n \ge 0$.

Тепер оцінюємо ймовірність

$$P\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \le P\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} a_n^\varepsilon V(u_n^\varepsilon) > \delta \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \le$$

$$\le P\{\sup_{n \ge N_T} e^{c\tau_n^\varepsilon} V(u_n^\varepsilon) > \delta \cap A_{T,n}^\varepsilon\}.$$

Враховуючи (30), одержуємо

$$P\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \le P\{\sup_{n \ge N_T} w_n^\varepsilon > \delta \cap A_{T,n}^\varepsilon\}.$$

Супермартингальна властивість (30) допускає оцінку для ймовірності

$$P\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta \cap A_{T,n}^\varepsilon\} \le \frac{V(u)}{\delta_2},$$

де $\delta_2 = \delta b_2 / b_1$.

Далі маємо

$$P\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta\} = P\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta \cap A_{T,n}^\varepsilon\} +$$

$$+ P\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta \cap \overline{A}_{T,n}^\varepsilon\} \le \frac{V(u)}{\delta_2} + \Delta \le 2\Delta \tag{31}$$

при $|u| \le u_0$ (u_0 — достатньо мале).

Співвідношення

$$\{e^{cT} \sup_{n \ge N_T} V(u_n^\varepsilon) > \delta\} \subset \{\lim_{n \to \infty} V(u_n^\varepsilon) = 0\} = \{\lim_{n \to \infty} \|u_n^\varepsilon\| = 0\}$$

завершують доведення збіжності (див. [9])

$$P\{\lim_{n \to \infty} \|u_n^\varepsilon\| = 0\} = 1. \tag{32}$$

Твердження (5) є наслідком (32) та оцінки (18) для напівгрупи, що породжує стохастичну систему $u^\varepsilon(t)$. Дійсно, з умови C_5 теореми випливає така оцінка (див. також [13]):

$$P\{\max_{1 \le n \le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n > \delta\} \le C\Delta(\varepsilon), \tag{33}$$

де $\Delta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Розглянемо зображення

$$V_T^\varepsilon := \sup_{0 \le t \le T} V(u^\varepsilon(t)) = \sup_{1 \le n \le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} [\sup_{0 \le s \le \theta_n} C_{\varepsilon s}(x_{n-1}^\varepsilon) V_{n-1}^\varepsilon].$$

Враховуючи оцінку (18) для напівгрупи, одержуємо нерівність

$$V_T^\varepsilon \le \sup_{1 \le n \le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} e^{\varepsilon c_1 \theta_n} V_{n-1}^\varepsilon =: \overline{V}_T^\varepsilon. \tag{34}$$

Отже, справедлива оцінка

$$P\{\sup_{0 \le t \le T} V(u^\varepsilon(t)) > \delta\} \le P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta\}. \tag{35}$$

Для оцінки правої частини (35) використовуємо співвідношення

$$P\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta\} = P\left\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \cap \max_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n \le \frac{T}{\varepsilon}\right\} +$$

$$+ P\left\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \cap \max_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n > \frac{T}{\varepsilon}\right\}. \qquad (36)$$

Перший доданок з (36) оцінюємо з урахуванням (34) та (31):

$$P\left\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \cap \max_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n \le \frac{T}{\varepsilon}\right\} \le P\{e^{c_1 T} \sup_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} V_{n-1}^\varepsilon > \delta\} \le 2\Delta,$$

а другий — з урахуванням (33):

$$P\left\{\overline{V}_T^\varepsilon > \delta \cap \max_{1\le n\le \nu^\varepsilon(T/\varepsilon)} \theta_n > \frac{T}{\varepsilon}\right\} \le C\Delta(\varepsilon).$$

З останніх двох оцінок маємо (див. (35) та (36))

$$P\{\sup_{1\le t\le T} V(u^\varepsilon(t)) > \delta\} \le 2\Delta + C\Delta(\varepsilon) \ \ (2\Delta + C\Delta(\varepsilon) \text{—достатньо мале}).$$

1. *Боголюбов М. М.* О некоторых статистических методах в математической физике. – Львов: Изд. АН УССР, 1945. – 137 с.
2. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М.* Математические проблемы нелинейной механики. – Киев: Выща шк., 1987. – 72 с.
3. *Скороход А. В.* Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1987. – 328 с.
4. *Царьков Е. Ф.* Об устойчивости решений линейных дифференциальных уравнений с марковскими коэффициентами // Допов. НАН України. – 1987. – № 2. – С. 34 – 37.
5. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.
6. *Королюк В. С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 8. – С. 1176 – 1181.
7. *Королюк В. С.* Average and stability of dynamical systems with rapid stochastic switchings // Exploring Stochastic Laws. – 1995. – P. 219 – 232.
8. *Королюк В. С.* Устойчивость автономной динамической системы с быстрыми марковскими переключениями // Докл. АН Украины. Сер. А. – 1990. – № 6. – С. 16 – 19.
9. *Blankenship G. L., Papanicolaou G. C.* Stability and control of stochastic systems with wide band noise disturbances // SIAM Appl. Math. – 1978. – **34**. – P. 437 – 476.
10. *Королюк В. С.* Стійкість стохастичних систем у схемі дифузійної апроксимації // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 1. – С. 36 – 47.
11. *Swishchuk A. V.* Stability of semi-Markov evolutionary stochastic systems in averaging and diffusion approximation schemes // Асимптотичний аналіз випадкових еволюцій. – Київ: Ін-т математики НАН України, 1994. – С. 255 – 269.
12. *Korolyuk V. S., Swishchuk A. V.* Evolution of systems in random media. – Boca Raton: CRC Press, 1995. – 352 p.
13. *Свириденко М. Н.* Мартингальная характеризация предельных распределений в пространстве функций без разрывов второго рода // Мат. заметки. – 1998. – **43**, № 5. – С. 398 – 402.
14. *Королюк В. С., Свищук А. В.* Полумарковские случайные эволюции. – Киев: Наук. думка, 1992. – 246 с.
15. *Korolyuk V. S., Korolyuk V. V.* Stochastic models of systems. – Dordrecht: Kluwer, 1999. – 185 p.
16. *Etier S. N., Kurtz T. G.* Markov processes: characterization and convergence. – New York: J. Wiley & Sons, 1986. – 530 p.

Одержано 17.09.2001