УДК 519.21

А. Ю. Пилипенко (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ТЕОРЕМА СТРУКА – ВАРАДАНА ДЛЯ ПОТОКОВ, ПОРОЖДЕННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ С ВЗАИМОДЕЙСТВИЕМ *

We prove a theorem that characterizes a support of flow generated by a system of stochastic differential equations with interaction.

Доведено теорему, що характеризує носій потока, породженого системою стохастичних диференціальних рівнянь із взаємодією.

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений с взаимодействием

$$dx(u,t) = \int_{\mathbb{R}^d} a(x(u,t), x(v,t))\mu(dv)dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^d} b_k(x(u,t), x(v,t))\mu_k(dv) \circ dw^k(t), \quad t \in [0,T], \tag{1}$$

$$x(u,0) = \varphi(u), \quad u \in \mathbb{R}^d,$$

где $a: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $b_k: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $\varphi: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, μ, μ_k — вероятностные меры на $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $w^1(t), \ldots, w^m(t)$ — независимые одномерные винеровские процессы.

При некоторых естественных условиях [1] на гладкость и рост коэффициентов a, b_k уравнения и функции φ существует единственное решение уравнения (1). При этом некоторая модификация $x(u,t)$ имеет производные по u, непрерывные по (u,t) почти наверное. Таким образом, поток $\{x(u,t), u \in \mathbb{R}^d\}_{t\in[0,T]}$ можно рассматривать как случайный элемент в пространстве $C([0,T] \to C^n(\mathbb{R}^d;\mathbb{R}^d))$, где пространство $C^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$ n раз непрерывно дифференцируемых функций из $\mathbb{R}^d$ в $\mathbb{R}^d$ снабжено топологией равномерной сходимости производных на компактах.

Как доказано Струком и Вараданом (см., например, [2]), носитель диффузионного процесса $x(t)$, $t \in [0,T]$, удовлетворяющего уравнению

$$dx(t) = a(x(t))dt + \sum_{k=1}^{m} b_k(x(t)) \circ dw^k(t), \quad t \in [0,T], \quad x(0) = x_0,$$

совпадает с замыканием в пространстве $C([0,T])$ множества функций $\{x^\psi \mid \psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m) \in C^2([0,T];\mathbb{R}^m)\}$, где x^ψ определяется обыкновенным дифференциальным уравнением

$$\frac{dx^\psi(t)}{dt} = a(x^\psi(t)) + \sum_{k=1}^{m} b_k(x^\psi(t)), \quad t \in [0,T], \quad x^\psi(0) = x_0.$$

Аналогичное утверждение о носителе потока диффеоморфизмов, порожденного стохастическим дифференциальным уравнением, доказано в [3]. Основным результатом данной работы является доказательство аналога теоремы Струка –

* Частично поддержана Министерством образования и науки Украины (проект № 01.07/103).

– Варадана для потоков, порожденных стохастическим уравнением с взаимодействием (1).

Введем обозначения:

$\| f \|_T := \sup_{t\in[0,T]} \| f(t) \|$, где функция f действует из $[0, T]$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^n$;

$\| g \|_U := \sup_{u\in U} \| g(u) \|$ для $g: U \subset \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$;

$\| h \|_{U,T} := \sup_{u\in U} \sup_{t\in[0,T]} \| h(u,t) \|$, где $h: U \times [0, T] \to \mathbb{R}^d$.

Далее, как правило, индексы T или U будем опускать. Например, под $\| w \|$ понимается $\| w \|_T = \sup_t \| (w(t), \ldots, w_m(t)) \|_{\mathbb{R}^m}$.

Пусть $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_m)$: $[0, T] \to \mathbb{R}^m$ — непрерывно дифференцируемая функция.

Обозначим через x^ψ решение следующей системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{\partial x^\psi(u,t)}{\partial t} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} a(x^\psi(u,t), x^\psi(v,t))\mu(dv) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}^d} b_k(x^\psi(u,t), x^\psi(v,t))\mu_k(dv)\left(\psi^k\right)'(t), \quad t \in [0, T], \tag{2}$$

$$x^\psi(u, 0) = \varphi(u).$$

Теорема 1. *Предположим, что:*

1) $\varphi \in C^n(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$;

2) *функции* a, b_k, $k = 1, \ldots, m$, *непрерывно дифференцируемы по первому аргументу* $(n + 2)$, $(n + 4)$ *раз соответственно и ограничены со своими производными;*

3) *функции* a, b_k *удовлетворяют вместе со своими производными глобальному условию Липшица по второму аргументу, т. е.*

$$\exists L > 0 \quad \forall u, v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d \quad \forall l = 0, \ldots, n+2, \quad p = 0, \ldots, n+4:$$

$$\left\| \frac{\partial^l a(u, v_1)}{\partial u^l} - \frac{\partial^l a(u, v_2)}{\partial u^l} \right\| \le L \| v_1 - v_2 \|,$$

$$\left\| \frac{\partial^p b_k(u, v_1)}{\partial u^p} - \frac{\partial^p b_k(u, v_2)}{\partial u^p} \right\| \le L \| v_1 - v_2 \|;$$

4) μ, μ_k — *вероятностные меры на* $\mathbb{R}^d$.

Тогда для любой функции $\psi \in C^2([0, T]; \mathbb{R}^m)$, *ограниченного множества* $U \subset \mathbb{R}^d$ *и* $\theta > 0$:

$$\lim_{\delta\to 0} \mathrm{P}\left(\sup_{u\in U} \sup_{t\in[0,T]} \sup_{0\le l\le n} \left\| \frac{\partial^l x(u,t)}{\partial u^l} - \frac{\partial^l x^\psi(u,t)}{\partial u^l} \right\| \ge \theta \,/\, \| w - \psi \| < \delta \right) = 0. \tag{3}$$

Основным результатом данной работы является следующая теорема — непосредственное следствие (3).

Теорема 2. *Носитель распределения* $x(u, t)$, $u \in \mathbb{R}^d$, $t \in [0, T]$, *содержит* *замыкание множества* $\{ x^{\psi} \mid \psi \in C^2([0,T]; \mathbb{R}^m)\}$ *в пространстве* $C([0,T] \to$ $\to C^n(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$.

***Замечание* 1.** Автору известно доказательство обратного включения. Доказательство, как и в [2, 3], основано на теореме аппроксимации и будет приведено в отдельной статье.

***Доказательство теоремы* 1.** В [1] доказано, что при выполнении условий теоремы процесс $x(u,t)$ имеет модификацию, непрерывно дифференцируемую n раз. Именно эта модификация и рассматривается далее. Известно также, что производные $\dfrac{\partial^k x(u,t)}{\partial u^k}$ удовлетворяют уравнениям, получающимся при формальном дифференцировании (1) k раз.

Рассмотрим сначала случай $n = 0$. Предположим, что $\psi = 0$. Случай произвольного ψ доказывается с помощью теоремы Гирсанова, как и в теореме 8.2 из гл. 6 [2] о носителе диффузионных процессов. Ограничимся также случаем, когда $U \subset \mathbb{R}^d$ – замкнутый шар.

Проверим, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{P}\left(\left\| \int_0^{\cdot} \int b_k(x(u,t), x(v,t)) \mu_k(dv) \circ dw^k(t) \right\|_{U,T} \geq \varepsilon / \|w\| < \delta \right) \to 0, \quad \delta \to 0+. \quad (4)$$

Известно [4], что для любого $p > d$ пространство Соболева $W_p^1(U)$ непрерывно вкладывается в $C(U)$. Поэтому для того, чтобы доказать (4), достаточно проверить, что

$$\mathrm{E}\left(\sup_t \int_U \left(\left\| \int_0^t \int b_k(x(u,t), x(v,t)) \mu_k(dv) \circ dw^k(s) \right\|^p + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \left\| \int_0^t \int (b_k)_1'(x(u,s), x(v,s)) \mu_k(dv) \frac{\partial x(u,s)}{\partial u} \circ dw^k(s) \right\|^p \right) du / \|w\| < \delta \right) \to 0, \quad \delta \to 0+. \quad (5)$$

Оценка (5) будет следовать из соотношений

$$\sup_{u \in U} \mathrm{E}\left(\left\| \int_0^{\cdot} \int b_k(x(u,t), x(v,t)) \mu_k(dv) \circ dw^k(s) \right\|_T^p / \|w\| < \delta \right) \to 0, \quad \delta \to 0+, \quad (6)$$

$$\sup_{u \in U} \mathrm{E}\left(\left\| \int_0^{\cdot} \int (b_k)'_1(x(u,s), x(v,s)) \mu_k(dv) \frac{\partial x(u,s)}{\partial u} \circ dw^k(s) \right\|_T^p / \|w\| < \delta \right) \to 0, \ \delta \to 0+. \ (7)$$

Нам понадобится следующее определение.

Определение. *Семимартингал* $b(t)$, $t \in [0,T]$,

$$db(t) = b_0(t)dt + b_k(t)dw^k(t)$$

принадлежит классу B_0, *если существует такая константа* β, *что для любого* $k \in \{0, \ldots, m\}$, $t \in [0,T]$:

$$|b_k(t)| \leq \beta_0 \qquad п. н.$$

Если каждая из диффузионных характеристик $b_k(t)$, $1 \leq k \leq m$, *является семимартингалом из* B_0, *то будем говорить, что* $b(t)$ *принадлежит классу* B_1.

Аналогично, если

$$db_k(t) = b_{k,0}(t)dt + b_{k,j}(t)dw^j(t),$$

где $b_{k,j}(t)$ *принадлежит* B_0, $1 \le k,\ j \le m$, *то* $b(t)$, $t \in [0,T]$, *принадлежит классу* B_2, *и так далее.*

Лемма 1. *Предположим, что семимартингал* $b(t)$, $t \in [0,T]$, *принадлежит классу* B_3. *Тогда существуют такие положительные константы* K_1, $K_2 = K_2(b)$, $K_3 = K_3(b)$, *что*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta_0 > 0 \quad \exists M_0 > 0 \quad \forall M > M_0 \quad \forall \delta \in (0,\delta_0) \quad \forall k \in \{1,\ldots,m\}:$$

$$P\left(\left\|\int_0^{\cdot} b(s)\circ dw^k(s)\right\|_T \ge \varepsilon \,/\, \|w\| < \delta\right) \le$$

$$\le K_1 \exp\left(-\frac{\min\left\{\dfrac{\varepsilon^2}{K_2};\ K_1M^2;\ \dfrac{\varepsilon^2}{K_3M^2}-1\right\}}{\delta^2}\right). \tag{8}$$

Замечание 2. Из доказательства теоремы Струка – Варадана следует, что вероятность в (8) стремится к нулю при $\delta \to 0+$. Однако нам нужна более точная асимптотика.

Доказательство леммы 1. Применим формулу интегрирования по частям к стохастическому интегралу

$$\int_0^t b(s)\circ dw^k(s) = b(t)w^k(t) - \int_0^t w^k(s)\tilde b_0(s)ds -$$

$$-\int_0^t b_j(s)w^k(s)\circ dw^j(s) = I_1(t) + I_2(t) + I_3(t). \tag{9}$$

Здесь

$$db(t) = b_0(t)dt + b_j(t)dw^j(t) = \tilde b_0(t)dt + b_j(t)\circ dw^j(t),$$

процесс $\tilde b_0(t)$, $t \in [0,T]$, получается с использованием формулы Ито.

При доказательстве будет использовано множество констант. Чтобы не использовать множество различных индексов, вместо них будем ставить точку. Например, под $K.$ или $K.(b)$ будем понимать универсальную константу (возможно, зависящую от d или T) или зависящую только от свойств семимартингала b соответственно.

Заметим, что

$$\|I_1\| \le K.(b)\delta, \qquad \|I_2\| \le K.(b)\delta \tag{10}$$

на множестве $\{\|w\| < \delta\}$.

Обозначим $\xi^{kj}(t) := \int_0^t w^k(s)\circ dw^j(s)$. Тогда

$$I_3(t) = -b_j(t)\xi^{kj}(t) + \int_0^t \xi^{kj}(s)b_{j,0}(s)ds + \int_0^t \xi^{kj}(s)b_{j,l}(s)\circ dw^l(s) =$$

$$= \mathcal{L}_1(t) + \mathcal{L}_2(t) + \mathcal{L}_3(t). \tag{11}$$

Перейдем в интеграле $\mathcal{L}_3$ от интеграла Стратоновича к интегралу Ито и применим еще раз формулу Ито:

$$\mathcal{L}_3(t) = \alpha(\xi^{kj}, b)(t) - \int_0^t \xi^{kj}(s) w^l(s) b_{j,l,i}(s) dw^i(s) - \\ - \int_0^t b_{j,l}(s) w^l(s) d\xi^{kj}(s), \tag{12}$$

где $\| \alpha(\xi^{kj}, b)(\cdot) \|_T \le K.(b) \| \xi^{kj} \|_T$.

Пусть $M > 0$ — некоторое число, $\beta(t)$, $t \in [0, T]$, — неупреждающий процесс, $|\beta(t)| \le B$ п. н., где $B = \mathrm{const} > 0$.

Тогда

$$P\left(\left\| \int_0^{\cdot} \xi^{kj}(s) w^l(s) \beta(s) dw^i(s) \ge \varepsilon / \| w \| < \delta \right) \le P(\| \xi^{kj} \| \ge M / \| w \| < \delta) + \\ + P\left(\| \xi^{kj} \| < M, \left\| \int_0^{\cdot} \xi^{kj}(s) w^l(s) \beta(s) dw^i(s) \right\| \ge \varepsilon / \| w \| < \delta \right). \tag{13}$$

Лемма 2. *Существуют положительные константы* c_1 *и* c_2 *такие, что для любых* $M > 0$, $\delta > 0$, $M > \delta^2$ *выполняется неравенство*

$$P\left(\| \xi^{kj} \| \ge M / \| w \| < \delta \right) \le \frac{c_1 \delta}{M} \exp\left\{ -\frac{c_2 M^2}{\delta^2} \right\}. \tag{14}$$

Доказательство. Пусть $k \ne j$ и

$$\eta^{kj}(t) = \frac{1}{2} \int_0^t [w^k(s) dw^j(s) - w^j(s) dw^k(s)],$$

$$a(t) = \frac{1}{4} \int_0^t \left[(w^k)^2(s) + (w^j)^2(s) \right] ds.$$

В [2] (§ 6, гл. 6) доказано, что $B(t) \equiv \eta^{kj}(a^{-1}(t))$ — броуновское движение, не зависящее от $\{ (w^k)^2(t) + (w^j)^2(t) \}$. Поэтому аналогично лемме 8.2 из [2] получаем

$$P\{ \| \eta^{kj} \|_T \ge M / \| w \| < \delta \} = P\{ \| B(a(t)) \|_T \ge M / \| w \| < \delta \} \le \\ \le P\left\{ \max_{0 \le s \le T\delta^2/4} | B(s) | > M \right\} < \\ < 4P\left\{ B(T\delta^2/4) > M \right\} = \frac{4}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{2M}{\sqrt{T}\delta}}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \le \frac{2\sqrt{T}\delta}{M} \exp\left\{ -\frac{2M^2}{T\delta^2} \right\}. \tag{15}$$

Неравенство (14) непосредственно вытекает из (15), если заметить, что

$$\xi^{kj}(t) = -\eta^{kj}(t) + \frac{1}{2} w^k(t) w^j(t).$$

Если $k = j$, то результат леммы очевиден, поскольку $\xi^{kk}(t) = \frac{1}{2} (w^k)^2(t)$.

Лемма 2 доказана.

Лемма 3 [2] (гл. 6, лемма 8.1). *Существуют такие постоянные* c_3 *и* c_4, *что*

$$P(\| w \| < \delta) \sim c_3 \exp\left(\frac{-c_4}{\delta^2} \right), \quad \delta \to +0.$$

Для оценки правой части (13) воспользуемся следующим известным фактом. Если $M(t)$ — квадратически интегрируемый мартингал с непрерывными траекториями, $M(0)=0$ и характеристикой $\langle M(t)\rangle$, то существует броуновское движение W (возможно, на расширении вероятностного пространства) такое, что $M(t)=W(\langle M(t)\rangle)$. Следовательно, второе слагаемое в правой части (13) не превышает

$$\mathrm{P}\left\{\sup_{t\in[0,T]}\left\|W(tB^2\delta^2M^2)\right\|\geq\varepsilon\right\}/\,\mathrm{P}\{\|w\|<\delta\}\;\leq$$

$$\leq\;\mathrm{P}\left\{\sup_{s\in[0,T]}\|W(s)\|\geq\frac{\varepsilon}{B\delta M}\right\}/\,\mathrm{P}\{\|w\|<\delta\}\;\leq\;K_{\cdot}\exp\left\{\frac{\left(\dfrac{\varepsilon^2}{B^2M^2}-1\right)K_{\cdot}}{\delta^2}\right\}.$$

Аналогично рассматривается последнее слагаемое в (12), если заметить, что

$$\int_0^t b_{j,l}(s)w^l(s)\,d\xi^{kj}(s)\;=\;\int_0^t b_{j,l}(s)w^l(s)w^k(s)\,dw^j(s)+\frac{\delta_{k,j}}{2}\int_0^t b_{j,l}(s)w^l(s)\,ds.$$

Доказательство леммы 1 теперь следует из оценок (9) – (13).

Продолжим доказательство теоремы. Проверим сходимость (6). Пусть $u\in U$. Заметим, что случайный процесс $\int b_k(x(u,t),x(v,t))\mu_k(dv)$, $t\in[0,T]$, удовлетворяет условиям леммы 1. Следовательно,

$$\mathrm{E}\left(\left\|\int_0^{\cdot}\int b_k(x(u,t),x(v,t))\mu_k(dv)\circ dw^k(t)\right\|^p/\,\|w\|<\delta\right)=$$

$$=\;p\int_0^{\sup\|b_k\|}y^{p-1}\mathrm{P}\left(\left\|\int_0^{\cdot}\int b_k(x(u,s),x(v,s))\mu_k(dv)\circ dw^k(t)\right\|>y\,/\,\|w\|<\delta\right)dy. \tag{16}$$

Несложно заметить (см. оценку (8)), что для любого $y>0$

$$\sup_{u\in U}\mathrm{P}\left(\left\|\int_0^{\cdot}\int b_k(x(u,s),x(v,s))\mu_k(dv)\circ dw^k(t)\right\|>y\,/\,\|w\|<\delta\right)\to 0,\qquad\delta\to 0+.$$

Поэтому согласно теореме Лебега о мажорируемой сходимости имеет место равномерная по $u\in U$ сходимость к нулю в (16).

Отметим, что подынтегральное выражение в (7) не удовлетворяет условиям леммы 1, так как $\dfrac{\partial x(u,t)}{\partial u}$, вообще говоря, неограничено. Поэтому нам понадобятся дополнительные рассуждения.

Пусть $c>0$, $f_c\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — финитная неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция такая, что $f_c(x)=x$ при $|x|\leq c$.

Обозначим через $y_c(u,t)$ решение уравнения

$$dy_c(u,t)\;=\;\int_{\mathbb{R}^d}a_1'(x(u,t),x(v,t))\mu(dv)\,f_c(y_c(u,t))\,dt\;+$$

$$+\;\sum_{k=1}^m\int(b_k)_1'(x(u,s),x(v,s))\mu_k(dv)\,f_c(y_c(u,t))\circ dw^k(t),\quad y_c(u,0)=\nabla\varphi(u). \tag{17}$$

Заметим, что

$$\mathrm{P}\Big(\{\omega: \| y_c(u,t,\omega)\| \le c,\ u\in U,\ t\in[0,T]\}\,\Delta$$

$$\Delta\left\{\omega: \left\|\frac{\partial x(u,t,\omega)}{\partial u}\right\| \le c,\ u\in U,\ t\in[0,T]\right\}\Big) = 0$$

и на множестве $\left\{\sup\limits_{u\in U, t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial x(u,t)}{\partial u}\right\|\le c\right\}$ почти наверное имеет место равенство

$$y_c(u,t) = \frac{\partial x(u,t)}{\partial u} \quad \text{для всех} \quad t\in[0,T], \quad u\in U.$$

Предположим, что ω и u таковы, что

$$\left\|\sum_{k=1}^{m}\int_0^{\cdot}\int (b_k)_1'(x(u,s),x(v,s))\,\mu_k(dv)\,\frac{\partial x(u,t)}{\partial u}\circ dw^k(t)\right\|_T \le \varepsilon.$$

Тогда, применяя лемму Гронуолла – Беллмана к уравнению для производной

$$d\frac{\partial x(u,t)}{\partial u} = \int_{\mathbb{R}^d} a_1'(x(u,t),x(v,t))\mu(dv)\,\frac{\partial x(u,t)}{\partial u}\,dt +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\int (b_k)_1'(x(u,s),x(v,s))\,\mu_k(dv)\,\frac{\partial x(u,t)}{\partial u}\circ dw^k(t),$$

$$\frac{\partial x(u,t)}{\partial u} = \nabla\varphi(u),$$

получаем

$$\left\|\frac{\partial x(u,t)}{\partial u}\right\| \le (\|\nabla\varphi(u)\| + \varepsilon)\exp\big(\|a_1'\|_\infty T\big). \tag{18}$$

Пусть $\varepsilon>0$ фиксировано. Выберем такое $c>0$, чтобы правая часть (18) не превышала c для всех $u\in U$. Тогда $y_c(u,t) = \frac{\partial x(u,t)}{\partial u}$, $u\in U$, $t\in[0,T]$, для почти всех ω из множества

$$\left\{\left\|\sum_{k=1}^{m}\int_0^{\cdot}\int (b_k)_1'(x(u,s),x(v,s))\mu_k(dv)\,f_c(y_c(u,t))\circ d\omega^k(t)\right\|_T \ge \varepsilon\right\}.$$

Обозначим

$$\xi_t(u) := \sum_{k=1}^{m}\int_0^{t}\int (b_k)_1'(x(u,s),x(v,s))\mu_k(dv)\,\frac{\partial x(u,s)}{\partial u}\circ d\omega^k(s).$$

Тогда

$$\mathrm{E}\big(\|\xi_\cdot(u)\|_T^p \,/\, \|w\|<\delta\big) = \mathrm{E}\big(\|\xi_\cdot(u)\|_T^p\,\mathbb{1}_{\{\|\xi_\cdot(u)\|_T<\varepsilon\}} \,/\, \|w\|<\delta\big) +$$

$$+\ \mathrm{E}\big(\|\xi_\cdot(u)\|_T^p\,\mathbb{1}_{\{\|\xi_\cdot(u)\|_T\ge\varepsilon\}} \,/\, \|w\|<\delta\big) = I_1(\delta) + I_2(\delta).$$

Доказательство сходимости $I_1(\delta)$ к нулю при $\delta\to 0$ аналогично доказательству (6), поскольку

$$I_1(\delta) \le \mathrm{E}\left(\left\|\sum_{k=1}^{m}\int_0^{\cdot}\int b_k(x(u,s),x(v,s))\mu_k(dv)\,f_c(y_c(u,s))\circ dw^k(s)\right\|_T^p \,/\, \|w\|<\delta\right).$$

Для оценки $I_2(\delta)$ применим неравенство Гельдера:

$$I_2(\delta) \le \frac{\left(\mathrm{E}\|\xi_\cdot(u)\|_T^{p\alpha}\right)^{1/\alpha}\left(\mathrm{P}\left(\|w\|<\delta, \|\xi_\cdot(u)\|_T \ge \varepsilon\right)\right)^{1/\beta}}{\mathrm{P}(\|w\|<\delta)}, \tag{19}$$

где $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}=1$.

Несложно проверить, что $K(U,\alpha,p)=\left(\mathrm{E}\|\xi_\cdot(u)\|_T^{p\alpha}\right)^{1/\alpha}<\infty$. Поэтому выражение в (19) не превышает (см. леммы 1, 3)

$$K(U,\alpha,p)\sup_{u\in U}\frac{\left[\mathrm{P}\left(\left\|\sum_{k=1}^m\int_0^\cdot\int b_k(x(u,s),x(v,s))\mu_k(dv)\,f_c(y_c(u,s))\circ d\omega^k(s)\right\|_T \ge \varepsilon/\|w\|<\delta\right)\right]^{1/\beta}}{\mathrm{P}(\|w\|<\delta)^{1/\alpha}} \le$$

$$\le K(U,\alpha,p)\exp\left[\left\{-\frac{1}{\beta}\left(\frac{\varepsilon^2}{K(b_k,U,\varepsilon,f_c)}\right)\wedge K_\cdot M^2\wedge\right.\right.$$

$$\left.\left.\wedge\left(\frac{\varepsilon^2}{K(b_k,U,\varepsilon,f_c)M^2}-1\right)+\frac{c_2}{\alpha}\right\}\frac{1}{\delta^2}\right]. \tag{20}$$

Выберем сначала M, а затем α так, чтобы выражение в числителе (20) было отрицательно. Значит, $I_2(\delta)\to 0$, $\delta\to 0+$. Следовательно, (7), а вместе с ним и (4), доказано.

Перейдем к доказательству (3) для $\psi=0$. Пусть $\tilde U\subset\mathbb{R}^d$ — замкнутый шар, $u\in\tilde U$. Обозначим $o(\tilde U):=\left\|\sum_{k=1}^m\int_0^\cdot b_k(x(u,s))\circ dw^k(s)\right\|_{\tilde U,T}$. Тогда

$$\sup_{s\in[0,t]}\|x(u,s)-x^0(u,s)\| \le$$

$$\le \int_0^t\int_{\tilde U}\left\|a(x(u,s),x(v,s))-a(x^0(u,s),x^0(v,s))\right\|\mu(dv)\,ds +$$

$$+\,2\sup_{x,y}\|a(x,y)\|\mu\left(\mathbb{R}^d\setminus\tilde U\right)+o(\tilde U) \le$$

$$\le K_\cdot(a)\left(\int_0^t\sup_{z\in[0,s]}\|x(u,z)-x^0(u,z)\|\,ds+\right.$$

$$\left.+\int_0^t\int_{\tilde U}\sup_{z\in[0,s]}\|x(v,z)-x^0(v,z)\|\mu(dv)\,ds+\mu\left(\mathbb{R}^d\setminus\tilde U\right)\right)+o(\tilde U). \tag{21}$$

Проинтегрировав (21) по параметру $u\in\tilde U$ и заменив u на v, получим

$$\int_{\tilde U}\sup_{s\in[0,t]}\|x(v,s)-x^0(v,s)\|\mu(dv) \le$$

$$\le K_\cdot(a)\left(\int_0^t\int_{\tilde U}\sup_{z\in[0,s]}\|x(v,z)-x^0(v,z)\|\mu(dv)\,ds+\mu\left(\mathbb{R}^d\setminus\tilde U\right)\right)+o(\tilde U). \tag{22}$$

Применим к (22) лемму Гронуолла – Беллмана, затем подставим полученное выражение в (21) и применим лемму Гронуолла – Беллмана еще раз:

$$\sup_{s\in[0,t]} \| x(u,s) - x^0(u,s) \| \le K_{\cdot}(a,T)\Big(\mu\big(\mathbb{R}^d \setminus \tilde U\big) + o(\tilde U)\Big), \quad t \in [0,T].$$

Пусть $\theta > 0$, $\varepsilon > 0$ фиксированы. Выберем множество $\tilde U$, содержащее U так, чтобы

$$K_{\cdot}(a,T)\mu\big(\mathbb{R}^d \setminus \tilde U\big) < \frac{\theta}{2}.$$

Тогда (см. (4))

$$\lim_{\delta\to 0+} \mathrm{P}\bigg(\sup_{s\in[0,T]}\sup_{u\in U} \| x(u,s) - x^0(u,s) \| \ge \theta \,/\, \| w \| < \delta\bigg) \le$$

$$\le \lim_{\delta\to 0+} \mathrm{P}\Big(K_{\cdot}(a,T) o(\tilde U) \ge \frac{\theta}{2} \,/\, \| w \| < \delta\Big) = 0.$$

Теорема 1 доказана в случае $n = 0$. Общий случай незначительно отличается от $n = 1$, поэтому ограничимся лишь вопросом о носителе случайного процесса $x(u,t)$ в пространстве $C([0,T] \to C^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{R}^d))$. Рассмотрим уравнение (1) и уравнения для производной $y(u,t) := \dfrac{\partial x(u,t)}{\partial u}$:

$$dy(u,t) = \left[\int_{\mathbb{R}^d} a_1'(x(u,t), x(v,t))\mu(dv)\right] y(u,t)\,dt +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \int_{\mathbb{R}^d} (b_k)_1'(x(u,t), x(v,t))\mu_k(du)\, y(u,t) \circ d\omega^k(t), \qquad y(u,0) = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u}, \qquad (23)$$

как систему стохастических уравнений с взаимодействием. К сожалению, (1), (23) не удовлетворяют условиям теоремы 1 с $n = 0$, поскольку коэффициенты в уравнении для $y(u,t)$ неограничены. Для доказательства теоремы применим принцип локализации. Пусть $y_c(u,t)$, f_c такие же, как и в (17).

Пусть

$$\tau_c(U) = \inf\{ t \mid \exists u \in U, \| y(u,t) \| \ge c \},$$

$$\tilde\tau_c(U) = \inf\{ t \mid \exists u \in U, \| y_c(u,t) \| \ge c \}$$

— моменты выхода $y(u,t)$ или $y_c(u,t)$, $u \in U$, соответственно из шара радиуса c с центром в начале координат. Заметим, что $\tau_c(U) = \tau_c(\tilde U)$ п. н. и $y(u,t) = y_c(u,t)$ п. н. для всех $u \in U$, $t \in [0, \tau_c(U)]$.

Пусть $\theta > 0$ задано. Как и в начале доказательства теоремы, считаем, что $\psi = 0$. Обозначим через $y^0(u,t)$, $y_c^0(u,t)$ решения уравнений

$$\frac{\partial y^0(u,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^d} a_1'(x^0(u,t), x^0(v,t))\mu(dv)\, y^0(u,t),$$

$$\frac{\partial y_c^0(u,t)}{\partial t} = \int_{\mathbb{R}^d} a_1'(x^0(u,t), x^0(v,t))\mu(dv)\, f_c(y_c^0(u,t)),$$

$$y^0(u,0) = y_c(u,0) = \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u},$$

где x^0 — решение (2) с $\psi = 0$.

Выберем такое $c > 0$, чтобы

$$\sup_{u\in U, t\in[0,T]} \| y^0(u,t) \| < c - \theta .$$

Тогда $y^0(u,t) = y_c^0(u,t)$ для всех $u \in U$, $t \in [0,T]$ и

$$\lim_{\delta\to 0} \mathrm{P}\left(\left\| y - y^0 \right\|_{U,T} \le \theta / \|w\| < \delta\right) = \lim_{\delta\to 0} \mathrm{P}\left(\left\| y - y^0 \right\|_{U,T} \le \theta,\ \tau_c(U) > T / \|w\| < \delta\right) =$$

$$= \lim_{\delta\to 0} \mathrm{P}\left(\left\| y_c - y_c^0 \right\|_{U,T} \le \theta / \| w \| < \delta\right) = 1,$$

поскольку (1), (17), рассматриваемая как система стохастических уравнений со значениями в $\mathbb{R}^{d+d^2}$, удовлетворяет условиям теоремы с $n = 0$.

Теорема 1 доказана.

1. *Dorogovtsev A. A., Kotelenez P.* Smooth stationary solutions of quasilinear stochastic partial differential equations: 1.Finite mass. – Cleveland (USA), 1997. – 19 p. – (Preprint, № 97-145).
2. *Ikeda N., Watanabe S.* Stochastic differential equations and diffusion processes. – North Holland – Kodansha, Tokyo, 1981. – 555 p.
3. *Kunita H.* Stochastic flows and stochastic differential equations // Cambridge Stud. in Adv. Math. – 1990. – **24**. – 346 p.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. – М.: Физматгиз, 1996. – 480 с.

Получено 19.10.2001