УДК 516.2

А. А. Мозгова (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ГОМОТОПИЧЕСКОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ТОТАЛЬНОМУ ПРОСТРАНСТВУ РАССЛОЕНИЯ НА ТОРЫ. СЛУЧАЙ С НЕПУСТЫМ КРАЕМ*

We present a criterion that determines the case where a smooth compact four-dimensional manifold with an irreducible boundary is homotopically equivalent to the total space of fibering on two-dimensional closed aspherical surfaces over two-dimensional aspheric surface with a boundary.

Наведено критерій, що визначає коли гладкий компактний чотиривимірний многовид з незвідним краєм гомотопічно еквівалентний тотальному простору розшарування на двовимірні замкнені асферичні поверхні над двовимірною асферичною поверхнею з краєм.

Хиллман [1] показал, что гомотопический тип замкнутого 4-мерного многообразия, расслоенного на замкнутые 2-мерные поверхности над замкнутой 2-мерной поверхностью, зависит только от его фундаментальной группы и эйлеровой характеристики. В настоящей статье этот результат распространяется на случай многообразий с непустым краем, а именно, на случай, когда база асферична и имеет край, а слой замкнут и асферичен.

1. Гомотопическая эквивалентность наборов пространств. Условимся, что все многообразия гладкие и компактные, все вложения гладкие.

Определение 1. *Пусть* K *— клеточный комплекс,* $K_1, \ldots, K_m$ *— система его непересекающихся подкомплексов. Будем говорить, что набор* $(K; K_1, \ldots$ $\ldots, K_m)$ *гомотопически эквивалентен набору* $(K'; K'_1, \ldots, K'_m)$, *если существует такая гомотопическая эквивалентность* $F: K \to K'$, *что ее сужения на* $F|_{K_i} = F_i: K_i \to K'_i$ *также гомотопические эквивалентности.*

Рассмотрим наборы, в которых комплексы есть $K(G, n)$, а подкомплексы, также являющиеся пространствами Эйленберга – Маклейна, соответствуют подгруппам группы G.

Утверждение 1 (Существование наборов Эйленберга – Маклейна). *Пусть* $n \in \mathbb{Z}$ *и* G *— группа (абелева, если* $n > 1$), $G_1, \ldots, G_m$ *— набор ее подгрупп, абелевых при* $n > 1$, *возможно, пересекающихся, определенных с точностью до сопряжения, если* $n = 1$. *Тогда существует такой комплекс* K *и его подкомплексы* $K_1, \ldots, K_m$, *что*

$$(K; K_1, \ldots, K_m) \simeq (K(G, n); K(G_1, n), \ldots, K(G_m, n)).$$

Доказательство непосредственно следует из того, что $K(\pi, n)$ — функтор из категории групп и их гомоморфизмов в категорию топологических пространств и гомотопических классов их непрерывных отображений. Тем не менее, приведем явную конструкцию, полностью основанную на классическом построении $K(\pi, n)$, описанном, например, в теореме I.11.7 в [2].

Пусть подгруппы G_j заданы системами образующих L_j и соотношений $R_1^j, \ldots, R_{k_j}^j$, гда каждая система L_j — это подмножество системы образующих L группы G:

$$G = \langle L \mid R^1, \ldots, R^k \rangle,$$

$$G_1 = \langle L_1 \mid R_1^1, \ldots, R_1^{k_1} \rangle,$$

---

* Частично поддержана грантом AFFDU.

$$G_2 = \langle L_2 \mid R_2^1, \ldots, R_2^{k_2} \rangle,$$

$$\ldots$$

$$G_m = \langle L_m \mid R_m^1, \ldots, R_m^{k_m} \rangle.$$

Несмотря на то, что подгруппы определены с точностью до сопряжения, можно рассматривать их представления с разными образующими, но одними и теми же соотношениями, поскольку для любого элемента $a \in G$

$$R_i^j = 1 \Leftrightarrow aR_i^j a^{-1} = 1. \qquad (1)$$

Возьмем теперь букет n-сфер

$$\bigvee_{i=1}^{|L|} S^n,$$

где $|L|$ — число образующих в выбранном копредставлении группы G. Выберем в этом букете подбукет, соответствующий L_1 — системе образующих подгруппы G_1. Для каждого соотношения R_1^i подгруппы G_1 выберем соответствующий элемент в группе $\pi_n(\bigvee S^n)$ (в группе всего букета), представим этот элемент сфероидом (непрерывным отображением сферы в рассматриваемое пространство) и приклеим к нему $(n+1)$-клетку. Обозначим этот подбукет с приклеенными $(n+1)$-клетками X_1^{n+1} (как $(n+1)$-скелет подкомплекса X_1). Выберем затем другой подбукет букета $\bigvee S^n$, соответствующий образующим подгруппы G_2, и представим левые части соотношений $R_1^2, \ldots, R_{k_2}^2$ группы G_2 как элементы группы $\pi_n(\bigvee S^n)$ (по-прежнему всего букета). В силу (1), если подгруппы G_1 и G_2 имеют общие соотношения, то они уже заклеены $(n+1)$-клетками. Заклеим $(n+1)$-клетками оставшиеся соотношения подгруппы G_2 и обозначим подбукет, соответствующий образующим подгруппы G_2 с заклеенными соотношениями, через X_2^{n+1}. Проделав это для всех подгрупп, получим семейство комплексов $X_1^{n+1}, \ldots, X_m^{n+1}$, n-скелеты которых лежат в одном общем букете. Рассмотрим объединение этих комплексов и заклеим в нем $(n+1)$-клетками оставшиеся соотношения группы G, представляя их элементами группы $\pi_n(\bigvee S^n)$. Из конструкции видно, что описанная процедура не зависит от порядка, в котором мы выбираем подгруппы G_j группы G. В результате получим комплекс X^{n+1} такой, что $\pi_i(X^{n+1}) = 0$ $\forall\, i < n$ и $\pi_n(X^{n+1}) = G$, с выделенной системой подкомплексов $X_1^{n+1}, \ldots, X_m^{n+1}$ таких, что $\pi_i(X^{n+1}) = 0$ $\forall\, i < n$ и $\pi_n(X_j^{n+1}) = G_j$, $j = 1, \ldots, m$.

Теперь нам надо сделать равными нулю все остальные гомотопические группы полученного комплекса и его подкомплексов. Возьмем систему образующих сфероидов

$$g_1^j, \ldots, g_{k_j}^j : S^{n+1} \hookrightarrow X_j^{n+1}$$

для групп $\pi_{n+1}(X_j^{n-1})$, $j = 1, \ldots, m$. Заклеим эти сфероиды $(n+2)$-клетками и обозначим результаты X_j^{n+2}. Поскольку есть композиция

$$g_l^j : S^{n+1} \hookrightarrow X_j^{n+1} \hookrightarrow X^{n+1},$$

то объединение всех образующих $(n+1)$-сфероидов по всем подкомплексам является системой $(n+1)$-сфероидов комплекса X^{n+1}. Дополним эту систему до системы образующих группы $\pi_{n+1}(X^{n+1})$ и заклеим все эти дополнительные сфероиды $(n+2)$-клетками. В результате получим комплекс X^{n+2} и его подкомплексы $X_1^{n+2}, \ldots, X_m^{n+2}$ с нужными гомотопическими группами до размерности $(n+1)$ включительно. Остается проитерировать этот процесс до бесконечности с тем, чтобы сделать равными нулю все гомотопические группы.

Назовем такой набор пространств *набором Эйленберга–Маклейна*, соответствующим группе G и ее системе подгрупп $G_1, \ldots, G_m$.

Зафиксируем число $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение 2. *Пусть G и G' — группы, $G_1, \ldots, G_m \subseteq G$ — система подгрупп группы G (если $n = 1$, то определенных с точностью до сопряжения), $G_1', \ldots, G_m' \subseteq G'$ — аналогичная система подгрупп группы G'. Если существует изоморфизм $A: G \to G'$ такой, что для всех i образ сужения $A_i = A|_{G_i}$ есть подгруппа G_i' и $A_i: G_i \to G_i'$ — изоморфизм, то соответствующие наборы Эйленберга–Маклейна*

$$(K(G, n); K(G_1, n), \ldots, K(G_m, n)) \simeq (K(G', n); K(G_1', n), \ldots, K(G_m', n))$$

гомотопически эквивалентны.

Доказательство также следует из функториальности $K(\pi, n)$. Тем не менее, приведем явную конструкцию, идея которой взята из теоремы 1.11.8 в [2].

Пусть $(X: X_1, \ldots, X_m)$ — набор Эйленберга – Маклейна, построенный в утверждении 1, и $(Y: Y_1, \ldots, Y_m)$ — другой набор Эйленберга – Маклейна, соответствующий тем же n, G и $G_1, \ldots, G_m$. Построим непрерывное отображение $f: X \to Y$, индуцирующее изоморфизм всех гомотопических групп и такое, что его сужения $f|_{X_i} = Y_i$ также индуцируют изоморфизмы всех гомотопических групп.

Напомним, что n-скелетом X^n комплекса X является букет $\bigvee_{i=1}^{l} S_i^n$, соответствующий образующим $g_1, \ldots, g_l$ группы G. Возьмем сфероиды

$$A(g_1), \ldots, A(g_l): S^n \hookrightarrow Y.$$

Определим отображение f_n букета $\bigvee_{i=1}^{l} S_i^n$ в Y, отобразив S_i^n на образ сфероида $A(g_i)$. Теперь нужно продолжить $f_n: X^n \to Y$ до непрерывного отображения $f: X \to Y$; такое отображение будет иметь требуемые свойства. Остается заметить, что всегда можно продолжить f_n до f_{n+1} (продолжение отображения f_n на $(n+1)$-скелеты X_j и X), затем до f_{n+2} и т. д., потому что все препятствия равны нулю. Действительно, будем строить продолжение отображения f_p на $(p+1)$-скелеты сначала для каждой клетки подскелетов X_j^p, соответствующих подкомплексам, затем для оставшихся клеток пространства X^p. На каждом этапе продолжение возможно потому, что композиция приклеивающего отображения $(p+1)$-клетки с уже построенным отображением f_p есть сфероид, гомотопный нулю: для $p = n$ это так потому, что клетки размерности $n+1$ соответствуют соотношениям в G_j и G, а для $p > n$ это верно, поскольку $\pi_i(Y) = 0$ и $\pi_i(Y^j) = 0$ для $i > n$, $j = 1, \ldots, m$.

2. Гомотопическая эквивалентность расслоения на торы.

Утверждение 3. *Пусть 3-многообразие M^3 есть компонента края 4-многообразия M^4, расслоенного на 2-поверхности F^2 над поверхностью с краем, отличной от диска D^2. Тогда вложение $M^3 \hookrightarrow M^4$ (индуцирует мономорфизм в фундаментальных группах).*

Доказательство. Зафиксируем на M^3 структуру расслоения на F^2, являющуюся сужением структуры на M^4. Тогда в диаграмме

$$\begin{tikzcd} & & & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \pi_1(F^2) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \pi_1(M^3) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "i"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "j"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \pi_1(F^2) \arrow[r, "\alpha_1"] & \pi_1(M^4) \arrow[r, "\beta_1"] & F_r \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

строки которой — точные последовательности расслоений M^3 и M^4, j является мономорфизмом, так как поверхность в базе отлична от диска. Нам надо показать, что $\operatorname{Ker} i = 0$.

Пусть существуют элементы $a_1, a_2 \in \pi_1(M^3)$ такие, что $i(a_1) = i(a_2)$, т. е. $a_1 - a_2 \in \operatorname{Ker} i$. Тогда $j(\beta(a_1)) = \beta_1(i(a_1)) = \beta_1(i(a_2)) = j(\beta(a_2))$. Поскольку j — мономорфизм, то $\beta(a_1) = \beta(a_2)$, а значит, $a_1 - a_2 \in \operatorname{Ker}\beta$. Так как $\operatorname{Ker}\beta = \operatorname{Im}\beta$, то существует элемент $z \in \pi_1(F^2)$ такой, что $\alpha(z) = a_1 - a_2$. Далее, $\alpha_1(z) = i(\alpha(z)) = i(a_1 - a_2) = 0$, следовательно, $z \in \operatorname{Ker}\alpha_1 = 0$, т. е. $z = 0$, а значит, $a_1 - a_2 = \alpha(z) = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 1. *Пусть дано 4-многообразие M^4 с n неприводимыми компонентами края $M_1^3, \ldots, M_n^3$. Набор $(M^4 : M_1^3, \ldots, M_n^3)$ гомотопически эквивалентен набору $(W^4; W_1^3, \ldots, W_n^3)$, где W^4 — тотальное пространство расслоения на торы T^2 над поверхностью с краем (отличной от 2-диска), а W_i^3 — его компоненты края, тогда и только тогда, когда:*

1) $\chi(M^4) = 0$;

2) *для всех $k = 1, \ldots, n$ имеется коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \pi_1(M_k^3) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "i_k"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "j_k"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha_1"] & \pi_1(M^4) \arrow[r, "\beta_1"] & F_r \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

где F_r — свободная группа ранга $r \in \mathbb{N}$.

Замечание 1. В зависимости от того, ориентируема ли поверхность в базе расслоения W^4, будем рассматривать F_r как фундаментальную группу либо ориентируемой поверхности рода g с n компонентами края (обозначаемой $B_{g,n}$, для r верна формула $r = 2g + n - 1$), либо неориентируемой поверхности рода g с n компонентами края (обозначаемой $S_{g,n}$, для r верна формула $r = g + n - 1$). Мы проведем рассуждения для случая ориентируемой поверхности в базе; неориентируемый случай рассматривается аналогично.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть M^4 гомотопически эквивалентно расслоению на 2-торы, как и все его компоненты края. Поскольку все гомотопические группы M^4 и W^4 изоморфны, а эйлерова характеристика — инвариант гомотопического типа, то $\chi(M^4) = 0$. Далее, в силу утверждения 3 для всех $k = 1, \ldots, n$ вложение $i_k : \pi_1(M_k^3) \to \pi_1(M^4)$ инъективно. Что касается диаграмм, то их строками будут точные последовательности расслоений, а i_k и j_k — естественные (мономорфные) вложения.

Достаточность. Идея доказательства состоит в том, чтобы показать, что набор $(M^4; M_1^3, \ldots, M_n^3)$ является набором Эйленберга – Маклейна с $n = 1$, построить расслоение на торы над поверхностью с краем с теми же фундаментальными группами и воспользоваться утверждением 2.

Обозначим через $2M^4 := M^4 \sqcup_{id} (M^4)^-$ дубль многообразия M^4.

Лемма 1. *Для дубля многообразия M^4 имеется точная последовательность*

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha'} \pi_1(2M^4) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(B_{2g+n-1}) \to 0,$$

где B_{2g+n-1} — замкнутая ориентируемая поверхность рода $2g + n - 1$.

Доказательство. *Шаг* 1. Рассмотрим сначала случай, когда M^4 имеет одну компоненту края. Тогда $r = 2g$ и $F_r = \pi_1(B_{g,1})$. Согласно теореме Зейферта – Ван Кампена $\pi_1(2M^4) = \pi_1(M^4) *_{\pi_1(\partial M^4)} \pi_1(M^4)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, equal] & & \pi_1(\partial M^4) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[d, "i"] & & \mathbf{Z} \arrow[rr] \arrow[d, "j"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, equal] & & \pi_1(M^4) \arrow[rr, "\beta_1"] \arrow[dr, "i_1"] & & F_r = \pi_1(B_{g,1}) \arrow[rr] \arrow[dr, "\pi_1"] & & 0 \\
 & 0 \arrow[r, dotted] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[rr, dotted, "\alpha'"] & & \pi_1(2M^4) \arrow[rr, dotted, "\varphi"] & & \pi_1(B_{2g}) \arrow[r, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[ur, equal] & & \pi_1(M^4) \arrow[rr, "\beta_1"] \arrow[ur, "i_2"] & & F_r = \pi_1(B_{g,1}) \arrow[rr] \arrow[ur, "\pi_2"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[u, equal] & & \pi_1(\partial M^4) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[u, "i"] & & \mathbf{Z} \arrow[rr] \arrow[u, "j"] & & 0 \\
 & & & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Здесь пунктирами обозначены гомоморфизмы, которые надо построить, чтобы получить утверждение леммы.

Поскольку $i : \pi_1(\partial M^4) \to \pi_1(M^4)$ — мономорфизм, то из теоремы о нормальной форме для амальгамированных произведений следует, что i_1, i_2 также являются мономорфизмами. Далее, $i_1 \neq i_2$, так как они вкладывают $\pi_1(M^4)$

на разные подгруппы группы $\pi_1(2M^4) = \pi_1(M^4) *_{\pi_1(\partial M^4)} \pi_1(M^4)$: мономорфизм i_1 — на первый экземпляр $\pi_1(M^4)$, мономорфизм i_2 — на второй. Кроме того, $\tau_1 \neq \tau_2$, поскольку они индуцированы разными вложениями поверхности $B_{g,1}$ в поверхность B_{2g}: τ_1 индуцировано вложением F_2, а τ_2 — вложением F_1 (рис. 1).

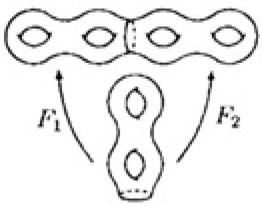

Рис. 1. Вложения $B_{g,1}$ в B_{2g}.

Определим $\alpha' := i_1 i\alpha = i_2 i\alpha$; такое определение правомерно, поскольку $i_1 i = i_2 i$ в силу коммутативности диаграммы амальгамированного произведения

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(M^4) \arrow[dr, "i_1"] & \\
\pi_1(\partial M^4) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & \pi_1(2M^4) \\
 & \pi_1(M^4) \arrow[ur, "i_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Кроме того, α' — мономорфизм, поскольку α, i и i_1, i_2 — мономорфизмы. Согласно свойству универсальности амальгамированного произведения в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1(M^4) \arrow[dr, "i_1"] \arrow[drr, "\gamma_1"] & & \\
\pi_1(\partial M^4) \arrow[ur, "i"] \arrow[dr, "i"'] & & \pi_1(2M^4) \arrow[r, "\varphi"] & \pi_1(B_{2g}) \\
 & \pi_1(M^4) \arrow[ur, "i_2"] \arrow[urr, "\gamma_2"'] & &
\end{tikzcd}$$

для любых γ_1, γ_2 таких, что $\gamma_1 i = \gamma_2 i$, существует и единствен гомоморфизм φ такой, что $\varphi i_1 = \gamma_1$, $\varphi i_2 = \gamma_2$. Возьмем $\gamma_1 := \tau_1\beta_1$, $\gamma_2 := \tau_2\beta_1$. Покажем, что $\gamma_1 i = \gamma_2 i$. Действительно,

$$\gamma_1 i = \tau_1\beta_1 i = \tau_1 j\beta = \tau_2 j\beta = \tau_2\beta_1 i = \gamma_2 i.$$

Итак, существует и единствен гомоморфизм φ такой, что

$$\varphi i_1 = \tau_1\beta_1, \quad \varphi i_2 = \tau_2\beta_1.$$

Покажем теперь, что последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha'} \pi_1(2M^4) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(B_{2g}) \to 0$$

точна. Пусть $f_1, \ldots, f_r$ — образующие группы F_r. По построению

$$\tau_1(f_1), \ldots, \tau_1(f_r), \qquad \tau_2(f_1), \ldots, \tau_2(f_r)$$

— образующие группы $\pi_1(B_{2g})$. Значит, каждый элемент c группы $\pi_1(B_{2g})$ можно записать в виде

$$c = (\tau_1(f_1))^{p_1} \ldots (\tau_1(f_n))^{p_n} (\tau_2(f_1))^{p_1'} \ldots (\tau_2(f_n))^{p_n'} =$$

$$= \tau_1(f_1^{p_1}) \ldots \tau_1(f_n^{p_n}) \tau_2(f_1^{p_1'}) \ldots \tau_2(f_n^{p_n'}).$$

Поскольку β_1 — эпиморфизм, существуют $g_1, \ldots, g_n \in \pi_1(M^4)$ такие, что $f_j = \beta_1(g_j)$. Учитывая, что

$$\varphi i_1 = \tau_1 \beta_1, \quad \varphi i_2 = \tau_2 \beta_1,$$

имеем

$$c = \tau_1(\beta_1(g_1))^{p_1} \ldots \tau_1(\beta_1(g_n))^{p_n} \tau_2(\tau_1(\beta_1(g_1))^{p_1'} \ldots \tau_2(\beta_1(g_n))^{p_n'} =$$

$$= \varphi(i_1(g_1))^{p_1} \ldots \varphi(i_1(g_n))^{p_n} \varphi(i_2(g_1))^{p_1'} \ldots \varphi(i_2(g_n))^{p_n'} \in \operatorname{Im}\varphi.$$

Значит, φ — эпиморфизм.

Покажем теперь, что $\operatorname{Im}\alpha' = \operatorname{Ker}\varphi$. Заметим сначала, что

$$\alpha'\varphi = \alpha i i_1 \varphi = \alpha i \beta_1 \tau_1 = \alpha \beta j \tau_1 = 0 j \tau_1 = 0,$$

откуда следует $\operatorname{Im}\alpha' \subset \operatorname{Ker}\varphi$.

Чтобы показать, что $\operatorname{Im}\alpha' \supset \operatorname{Ker}\varphi$, воспользуемся еще раз теоремой о канонической нормальной форме амальгамированного произведения, согласно которой каждый элемент

$$d \in \pi_1(M^4) *_{\pi_1(\partial M^4)} \pi_1(M^4)$$

единственным образом записывается в виде

$$d = d_0 d_1 d_1' \ldots d_n d_n',$$

где $d_0 \in \operatorname{Im}(i_1 i) = \operatorname{Im}(i_2 i)$, $d_i \in \operatorname{Im} i_1 \setminus \operatorname{Im}(i_1 i)$, $d_i' \in \operatorname{Im} i_2 \setminus \operatorname{Im}(i_2 i)$, иначе говоря,

$$d = i_1(i(b_0)) i_1(v_1) i_2(v_1') \ldots i_1(v_n) i_2(v_n').$$

Возмем элемент $d \in \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда

$$0 = \varphi(d) = \varphi(i_1(i(b_0)))\varphi(i_1(v_1))\varphi(i_2(v_1')) \ldots \varphi(i_1(v_n))\varphi(i_2(v_n')) =$$

$$= \tau_1(\beta_1(i(b_0)))\tau_1(\beta_1(v_1))\tau_2(\beta_1(v_1')) \ldots \tau_1(\beta_1(v_n))\tau_2(\beta_1(v_n')) \in \pi_1(B_{2g}).$$

Заметим, что поскольку $j\beta = \beta_1 i$ и β_1 — эпиморфизм, тот факт, что $v_i \notin \operatorname{Im} i$, влечет $\beta_1(v_1) \notin \operatorname{Im} j$; аналогично, $v_i' \notin \operatorname{Im} i$ влечет $\beta_1(v_i') \notin \operatorname{Im} j$. Кроме того,

$$\varphi(d_0) = \tau_1(\beta_1(i(b_0))) = \tau_1(j(\beta(b_0))),$$

а значит, $\tau_1(\beta_1 i(b_0)) \notin \operatorname{Im} \tau_1 j$. Таким образом, запись

$$\tau_1(\beta_1(i(b_0)))\tau_1(\beta_1(v_1))\tau_2(\beta_1(v_1')) \ldots \tau_1(\beta_1(v_n))\tau_2(\beta_1(v_n')) = 0$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[d, equal] & & \pi_1(M_i^3) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[d, "i"] & & \mathbf{Z} \arrow[rr] \arrow[d, "j"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[dr, equal] & & \pi_1(M^4) \arrow[rr, "\beta_1"] \arrow[dr, "i_1"] & & \pi_1(B_{g,n}) \arrow[rr] \arrow[dr, "r_1"] & & 0 \\
 & 0 \arrow[r, dotted] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[rr, dotted, "\alpha'"] & & \pi_1(N^4) \arrow[rr, dotted, "\varphi"] & & \pi_1(B_{2g,2n-2}) \arrow[r, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha_1"] \arrow[ur, equal] & & \pi_1(M^4) \arrow[rr, "\beta_1"] \arrow[ur, "i_2"] & & \pi_1(B_{g,n}) \arrow[rr] \arrow[ur, "r_2"] & & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[u, equal] & & \pi_1(M_i^3) \arrow[rr, "\beta"] \arrow[u, "i"] & & \mathbf{Z} \arrow[rr] \arrow[u, "j"] & & 0 \\
 & & & 0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}
$$

Идея дальнейшего доказательства состоит в том, чтобы представить склейку дубля многообразия с несколькими компонентами края в 2 этапа. Сначала склеим вдоль одной компоненты края (что даст в фундаментальной группе эффект амальгамированного произведения вдоль подгруппы — образа вложения этой компоненты края); обозначим результат склейки N^4. Затем склеим все оставшиеся компоненты края (что в фундаментальной группе даст HNN-расширения вдоль подгрупп — образов вложения соответствующих компонент края, см. рис. 3, на котором 4-многообразия схематически изображены поверхностями).

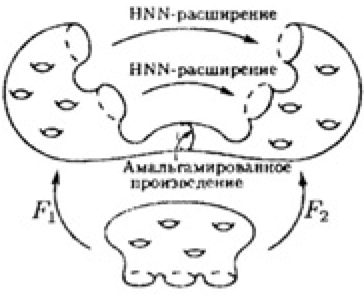

Рис. 3. Последовательная склейка дубля многообразия M^4.

Итак, на первом этапе для группы $\pi_1(N^4)$ согласно изложенному будет иметь место точная последовательность

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha'} \pi_1(N^4) \xrightarrow{\varphi} \pi_1(B_{2g,\,2n-2}) \to 0.$$

На втором этапе нужно показать, что если группа $\pi_1(N^4)$ содержится в предыдущей последовательности, то группа $\pi_1(2M^4)$, которая является HNN-расширением группы $\pi_1(N^4)$ по $2n-2$ подгруппам, соответствующим вложениям оставшихся компонент края, содержится в последовательности

$$0 \to \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \xrightarrow{\alpha''} \pi_1(2M^4) \xrightarrow{\varphi'} \pi_1(B_{2g+n-1}) \to 0.$$

Чтобы увидеть это, можно рассуждать аналогично случаю одной компоненты края, потому что подобно амальгамам HNN-расширения имеют следующее универсальное свойство (см. [4], предложение 30). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[d, equal] & \pi_1(M_i^3) \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[d, "I^i_{1*}"] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[d] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[dr, equal] & \pi_1(N^4) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[dr, "j"] \arrow[drr, "\psi"] & \pi_1(B_{2g,2n-2}) \arrow[r] \arrow[dr, "\tau_1"] & 0 & \\
 & 0 \arrow[r, dotted] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, dotted, "\alpha''"] & \pi_1(2M^4) \arrow[r, dotted, "\varphi'"] & \pi_1(B_{2g+n-1}) \arrow[r, dotted] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[ur, equal] \arrow[d, equal] & \pi_1(N^4) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[ur, "j"] \arrow[urr, "\psi"] & \pi_1(B_{2g,2n-2}) \arrow[r] \arrow[ur, "\tau_2"] & 0 & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z} \arrow[r, "\alpha_i"] & \pi_1(M_i^3) \arrow[r, "\beta_i"] \arrow[u, "I^i_{2*}"] & \mathbf{Z} \arrow[r] \arrow[u] & 0 & \\
 & & 0 \arrow[u] & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Здесь гомоморфизм j является естественным вложением группы в свое HNN-расширение, а I^i_{1*} и I^i_{2*} — гомоморфизмы, индуцированные вложениями $I^i_1 : M_i^3 \hookrightarrow N^4$ и $I^i_2 : M_i^3 \hookrightarrow N^4$ i-й компоненты края, $i = 2, \ldots, n$ (см. рис. 2). Тогда из универсального свойства HNN-расширений видно следующее. Пусть HNN-расширение $\pi_1(2M^4)$ порождается дополнительными образующими t_i, $i = 2, \ldots, n$, и дан гомоморфизм $\psi : \pi_1(N^4) \to \pi_1(B_{2g+n-1})$ (это верно для произвольной группы K, значит, мы можем использовать в качестве K группу $\pi_1(B_{2g+n-1})$). Если в группе $\pi_1(B_{2g+n-1})$ существуют элементы k_i, $i = 2, \ldots, n$, такие, что

$$k_i^{-1}\psi\big(I^i_{1*}(a)\big)k_i = \psi\big(I^i_{2*}(a)\big)$$

для всех $a \in \pi_1(M_i^3)$, то существует и единствен гомоморфизм

$$\varphi' : \pi_1(2M^4) \to \pi_1(B_{2g+n-1})$$

такой, что $j\varphi = \psi$ и $\varphi(t_i) = k_i$. Эти свойства позволяют проверить точность средней последовательности рассматриваемой диаграммы, что завершает доказательство леммы.

Итак, для дубля $2M^4$ исходного многообразия M^4 имеется точная последовательность, заданная предыдущей леммой. Кроме того, его эйлерова характеристика $\chi(2M^4) = 2\chi(M^4) = 0^*$. Теперь, применяя теорему Хиллмана ([1], гл. 6, теорема 1), видим, что многообразие $2M^4$ гомотопически эквивалентно тотальному пространству расслоения на 2-торы над замкнутой 2-поверхностью.

---

* В более общем случае расслоения на асферические поверхности F^2 надо было бы удостовериться, что $\chi(2M^4) = \chi(F^2)\chi(B_{2g+n-1})$. Предположив в условии $\chi(M^4) = \chi(F^2)\chi(B_{g,n})$, непосредственно получим $\chi(2M^4) = 2\chi(M^4) = 2\chi(F^2)\chi(B_{g,n}) = \chi(F^2)(2\chi(B_{g,n})) = \chi(F^2)\chi(B_{2g+n-1})$.

В частности, $2M^4$ имеет гомотопический тип $K(\pi, 1)$ (асферичен).

Лемма 2. *Если край ∂M^4 многообразия M^4 асферичен и его вложение π_1-инъективно, то дубль $2M^4$ асферичен тогда и только тогда, когда M^4 асферично.*

Доказательство. *Достаточность* следует из общего факта, что тотальное пространство графа асферичных пространств — асферично [5] (предложение 3.6 (ii)).

Необходимость. Покажем сначала, что если $\pi_2(2M^4) = 0$, то и $\pi_2(M^4) = 0$. В силу теоремы Гуревича $\pi_2(M^4) = \pi_2(\widetilde{M^4}) = H_2(\widetilde{M^4})$. Учитывая, что $2\widetilde{M^4}$ и $\partial\widetilde{M^4}$ стягиваемы, из гомологических последовательностей пар $(2\widetilde{M^4}; \widetilde{M^4})$ и $(\widetilde{M^4}; \partial\widetilde{M^4})$ и аксиомы вырезания (вырезаем $\widetilde{M^4} \setminus \partial\widetilde{M^4}$ из пары $(2\widetilde{M^4}; \widetilde{M^4})$) имеем

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & & & & 0 & & \\
 & & \| & & & & \| & & \\
\cdots \to H_2(\widetilde{M^4}) & \to & H_2(2\widetilde{M^4}) & \to & H_2(2\widetilde{M^4}; \widetilde{M^4}) & \to & H_1(\widetilde{M^4}) & \to & \cdots \\
 & & & & \| & & & & \\
\cdots \to H_2(\partial\widetilde{M^4}) & \to & H_2(\widetilde{M^4}) & \to & H_2(\widetilde{M^4}; \partial\widetilde{M^4}) & \to & H_1(\partial\widetilde{M^4}) & \to & \cdots \\
\| & & & & \| & & \| & & \\
0 & & & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

Отсюда $H_2(\widetilde{M^4}) = 0$, а значит и $\pi_2(\widetilde{M^4}) = 0$. Применяя теперь последовательно теорему Гуревича, видим, что M^4 имеет гомотопический тип $K(\pi_1(M^4); 1)$.

Заметим, что в силу теоремы Столлингса [6] все M_k^3 расслаиваются на 2-торы над окружностью, а значит, также имеют гомотопические типы $K(\pi_1(M_k^3); 1)$. Значит, *набор* $(M^4; M_1^3, \ldots, M_n^3)$ *есть набор Эйленберга–Маклейна.*

Построим теперь W^4-расслоение на 2-торы над поверхностью $B_{g,n}$ такое, что $\pi_1(W^4) \cong \pi_1(M^4)$ и на краях $\pi_1(M_k^3) \cong \pi_1(W_k^3)$. Строки в диаграмме

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, equal] & \pi_1(M_k^3) \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "i_k"] & \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "j_k"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \arrow[r, "\alpha_1"] & \pi_1(M^4) \arrow[r, "\beta_1"] & F_r \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

определяются гомоморфизмами

$$\xi_k : \mathbb{Z} \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}), \qquad \Xi : F_r \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}).$$

Поскольку $H^2(F_m; *)$ (см. [7]), то эти гомоморфизмы определяют расслоения на 2-торы над соответствующими базами с точностью до изоморфизма (т. е. послойной эквивалентности). Возьмем в качестве W^4 расслоение на торы над базой $B_{g,n}$ (или $S_{g,n}$), соответствующее монодромии Ξ. Поскольку диаграмма коммутативна, то $\xi_k = j_k \Xi$. Следовательно, на краях у расслоения W^4 стоят расслоения с монодромиями ξ_k, т. е. с фундаментальными группами, изоморфными $\pi_1(M_k^3)$. Таким образом, мы имеем группу $\pi_1(M^4)$ и систему ее подгрупп $\pi_1(M_k^3)$, определенных с точностью до сопряжения (поскольку фундаментальная группа зависит от точки, а для разных компонент края мы берем разные начальные точки). Кроме того, существует изоморфизм $A : \pi_1(M^4) \to$ $\to \pi_1(M^4)$, который по построению переводит систему $\pi_1(M_1^3), \ldots, \pi_1(M_n^3)$ в систему $\pi_1(W_1^3), \ldots, \pi_1(W_n^3)$. Таким образом, выполнены условия утверждения 2, что и завершает доказательство теоремы.

Замечание 2. Теорема верна для расслоений на любые замкнутые асферические поверхности над поверхностью с краем. Действительно, теорема Столлингса и (с учетом сноски на с. 246) теорема Хиллмана справедливы для таких поверхностей. Единственное место, где мы воспользовались коммутативностью фундаментальной группы тора, — это при построении расслоения W^4 мы не использовали внутренние автоморфизмы фундаментальной группы слоя; но это препятствие легко обойти, взяв в качестве монодромии искомого расслоения W^4 элементы группы внешних автоморфизмов фундаментальной группы слоя.

Автор благодарит профессоров К. Хайат-Легран и В. В. Шарко за внимание к работе и многочисленные полезные обсуждения.

1. *Hillman F.* The algebraic characterisation of geometric 4-manifolds // London. Math. Soc. Lect. Note Ser. – 1994. – **198**. – 170 p.
2. *Фоменко А. Т., Фукс Д. Б.* Курс гомотопической топологии. – М.: Наука, 1989. – 496 с.
3. *Zieschang H., Vogt E., Coldewey H.-D.* Surfaces and planar discontinuous groups // Lect. Notes Math. – 1980. – **835**. – 334 p.
4. *Cohen D. E.* Combinatorial group theory: a topological approach // London Math. Soc. Student Texts. – 1989. – **14**. – 310 p.
5. *Scott P., Wall T.* Topological methods in group theory // Homological Group Theory / Ed. C. T. C. Wall. – Cambridge; New York: Cambridge Univ. Press, 1979. –394 p.
6. *Stallings J.* On fibering certain 3-manifolds // Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. Univ. Georgia Inst., Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1961). – P. 95–100.
7. *Brown J.* Cohomology of groups // Grad. Texts Math. – 1994. – **87**. – 306 p.

Получено 16.07.2001