УДК 517.9

А. М. Кулик (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ФИЛЬТРАЦИЯ И КОНЕЧНОМЕРНАЯ ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ЛОГАРИФМИЧЕСКИ ВЫПУКЛЫХ МЕР

We study the classes $C(\alpha, \beta)$ and $C_H(\alpha, \beta)$ of bgarithmically convex measures that are a natural generalization of the notion of Boltzmann measure to an infinite-dimensional case. We prove the theorem of the characterization of these classes in terms of finite-dimensional projections of measures and obtain some applications to the theory of random series.

Вивчаються класи $C(\alpha, \beta)$ та $C_H(\alpha, \beta)$ логарифмічно опуклих мір, що є природним узагальненням поняття міри Больцмана на нескінченновимірний випадок. Доведено теорему про характеризацію цих класів у термінах скінченновимірних проекцій мір, отримано деякі застосування до теорії випадкових рядів.

1. Введение. Основным объектом, рассматриваемым в данной статье, являются логарифмически выпуклые меры на бесконечномерных пространствах. В теории гладких мер условие логарифмической выпуклости возникает в различных ситуациях как простое аналитическое условие, достаточное для того, чтобы мера имела свойства, представляющие интерес как с аналитической, так и теоретико-вероятностной точек зрения. Так, для логарифмически выпуклой меры имеет место отделенность от нуля спектра ассоциированной с мерой формы Дирихле [1], существует интегральное представление пространства квадратично интегрируемых функционалов, аналогичное представлению Ито – Кларка [2], получены оценки больших уклонений как для самой меры, так и для распределения ее логарифмической производной [3].

Целью настоящей статьи является характеризация свойства логарифмической выпуклости меры в терминах ее конечномерных распределений, а также исследование свойств ее проекций относительно линейных σ-алгебр.

2. Логарифмически выпуклые меры: определение и основные свойства. Пусть X — вещественное сепарабельное банахово пространство, H — сепарабельное гильбертово пространство, плотно вложенное в X непрерывным оператором j. Далее мы предполагаем, что вероятностная мера μ на X имеет логарифмическую производную вдоль направлений из jH со слабым вторым моментом [4]. Это означает, что для каждого $h \in H$ существует случайный элемент $(\rho, h) \in L_2(X, \mu)$ такой, что

$$\forall h \in H \;\; \exists (\rho, h) \in L_2(X, \mu) \colon \forall f \in C^1_{b,\,\mathrm{cyl}}(X)$$

$$\int_X f'_{jh}\, d\mu = -\int_X f(\rho, h)\, d\mu. \tag{1}$$

Здесь $C^1_{b,\,\mathrm{cyl}}(X)$ — пространство непрерывно дифференцируемых цилиндрических функций на X, ограниченных вместе со своей производной, т. е. функций вида

$$f(\cdot) = F\big(\langle \cdot, x_1^* \rangle, \ldots, \langle \cdot, x_n^* \rangle\big), \quad x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*, \quad F \in C_b^1(\mathbb{R}^n), \quad n \geq 1.$$

Семейство $\{(\rho, h),\ h \in H\}$ называется логарифмической производной меры μ, величина (ρ, h) — логарифмической производной в направлении h.

Для фиксированного $h \in H$ оператор D_h стохастического дифференциро-

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки Украины (проект № 01.07/103).

© А. М. КУЛИК, 2002

вания вдоль направления h определяется как замыкание в среднем квадратическом оператора

$$\nabla_h : C^1_{b,\,\mathrm{cyl}}(X) \ni f \mapsto f'_{jh},$$

условие (1) обеспечивает существования замыкания.

Далее через $W^1_2(X)$ будем обозначать пространство функционалов $f \in \in L_2(X, \mu)$ таких, что $\forall h \in H \ \ \exists D_h f$ и существует элемент $Df \in L_2(X, H, \mu)$ такой, что $D_h f = (Df, h)$, $h \in H$. Элемент Df называется стохастической производной случайной величины f. Оператор I, сопряженный к оператору $D : L_2(X, \mu) \to L_2(X, H, \mu)$, называется оператором стохастического интегрирования. Пространство $W^1_2(X)$ является банаховым относительно нормы $\|\cdot\|_{L_2(X)} + \|D\cdot\|_{L_2(X,H)}$.

***Определение* 1.** *Мера* μ *называется логарифмически выпуклой мерой класса* $C_H(\alpha, \beta)$, $0 \le \alpha \le \beta \le +\infty$, *если для произвольного* $h \in H$ $(\rho, h) \in \in W^1_2(X)$ *и существует ограниченный случайный оператор* B *в* H [5] *такой, что:*

1) $D_g(\rho, h) = -(Bh, h)_H$, $h, g \in H$;

2) $\alpha I_H \le B \le \beta I_H$ п.н.

***Пример* 1.** Пусть $X = H = \mathbb{R}^d$, $j = I_{\mathbb{R}^d}$. Тогда условие принадлежности меры μ на X классу $C_H(\alpha, \beta)$, $\alpha > 0$, $\beta < +\infty$ эквивалентно условию

$$d\mu = \exp(-V)\,d\lambda^d, \qquad \alpha I_{\mathbb{R}^d} \le V'' \le \beta I_{\mathbb{R}^d}.$$

Для такой меры $(\rho, h) = -l(h) = -(\nabla V, h)$, $h \in H$.

***Пример* 2.** Пусть μ — гауссовская мера на X, H — пространство Камерона – Мартина (т. е. пространство измеримых линейных функционалов), соответствующее мере μ. Тогда $B = I_H$ и мера μ принадлежит классу $C_H(1, 1)$.

Лемма 1. *Пусть* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$, $\beta < +\infty$. *Тогда:*

1) *мера* μ *квазиинвариантна вдоль направлений из* H, *т. е.*

$$\mu(\cdot + jh) \sim \mu(\cdot), \qquad h \in H;$$

2) *оператор* I *равен замыканию своего сужения на множество* $C^1_{b,\,\mathrm{cyl}}(X, H)$ *функционалов вида*

$$g = \sum_{k=1}^{n} f_k h_k, \qquad f \in C^1_{b,\,\mathrm{cyl}}(X), \qquad h_k \in H, \qquad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Известно, что в силу формулы интегрирования по частям (1) оператор I определяется на элементе вида (2) равенством

$$I(g) = -\sum_{k=1}^{n} (\rho, h_k) f_k - \sum_{k=1}^{n} (Df_k, h_k).$$

Отметим также, что утверждение 2 дает следующий удобный критерий проверки стохастической дифференцируемости величины f: $f \to W^1_2(X) \Leftrightarrow \Leftrightarrow \exists g \in L_2(\Omega, P, H)$:

$$\forall \phi \in C^1_{b,\,\mathrm{cyl}}(X),\ h \in H \quad Ef\,I(\phi h) \equiv -Ef[(\rho, h)\phi + (D\phi, h)] = E(g, \phi h)_H,$$

при этом $Df = g$.

***Доказательство леммы* 1.** Известно [6], что достаточным условием для выполнения условий 1, 2, является существование для каждого $h \in H$ момента $E \exp[\gamma_h|(\rho, h)|] < +\infty$ при некотором $\gamma_h > 0$. Согласно [3] условие логарифмической выпуклости обеспечивает существование всех моментов $E \exp[C|(\rho, h)|] < +\infty$, $h \in H$, $C < +\infty$. Лемма доказана.

Обозначим $\mathcal{F}_0 \equiv \sigma\{f | Df = 0 \text{ п.н.}\}$.

***Определение* 2.** *Мера* μ *называется эргодической, если каждая* $\mathcal{F}_0$*-измеримая функция п. н. совпадает с константой.*

***Пример* 3.** Пусть (X, H, μ) — те же, что и в примере 2. Тогда μ эргодическая. Зафиксируем $x \in X \setminus jH$ и положим $\nu(\cdot) = (\mu(\cdot) + \mu(\cdot + x))/2$. Тогда σ-алгебра $\mathcal{F}_0$ содержит множество $A \in \mathcal{B}(X)$ такое, что $\mu(A) = 1$, $\mu(A + x) = 0$, и следовательно, мера ν не является эргодической.

Лемма 2. *Пусть* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$. *Тогда существует регулярный вариант условной вероятности* $\{\mu_x, x \in X\}$ *для меры* μ *относительно* σ*-алгебры* $\mathcal{F}_0$ *такой, что для каждого* $x \in X$ $\mu_x \in C_H(\alpha, \beta)$.

Доказательство проводится аналогично доказательству из [7] соответствующего утверждения для квазиинвариантных мер.

***Следствие* 1.** *Для произвольной меры* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$ *имеет место разложение в сумму эргодических мер класса* $C_H(\alpha, \beta)$:

$$\mu(A) = \int_X \mu_x(A) d\nu, \quad \nu = \mu\big|_{\mathcal{F}_0}. \tag{3}$$

3. Фильтрация относительно линейных σ-алгебр и измеримые линейные функционалы.

Теорема 1. *Пусть* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$ — *эргодическая мера на* X, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in X^*$, $H_n \equiv \langle j^* x_1^*, \ldots, j^* x_n^* \rangle$ — *подпространство* H. *Тогда* $\mu_n \equiv \mu\big|_{\sigma\langle x_1^*, \ldots, x_n^* \rangle}$ *является мерой класса* $C_{H_n}(\alpha, \beta)$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что система $j^* x_1^*, \ldots, j^* x_n^*$ ортонормирована в H. Используя метод ортогонализации Грамма – Шмидта, выберем в X^* последовательность $\{y_m^*, m \geq 1\}$ так, чтобы последовательность $\{j^* x_k^*\} \cup \{j^* y_m^*\}$ образовывала ОНБ в H. Положим $\mathcal{F}^r = \sigma(x_k^*, k = 1, \ldots, n, y_m^*, m > r)$, $r \geq 1$, H^r — подпространство в H, натянутое на векторы $j^* x_k^*$, $k = 1, \ldots, n$, $j^* y_m^*$, $m > r$, $H^\infty = H_n$. Покажем, что $\mu^r \equiv \mu\big|_{\mathcal{F}^r} \in C_{H^r}(\alpha, \beta)$, $r \geq 1$.

Рассмотрим случай $r = 1$. Непосредственно из формулы интегрирования по частям следует, что мера μ^1 логарифмически дифференцируема вдоль направлений из H^1 и соответствующая производная равна

$$(\rho^1, h) = E\left[(\rho, h) \middle| \mathcal{F}^1\right], \quad h \in H^1.$$

Используя формулу для фильтрации оператора стохастического дифференцирования [6], получаем равенство

$$(B^1 h, h) = E\left[(Bh, h) \middle| \mathcal{F}^1\right] - E\left[I^2(h) \middle| \mathcal{F}^1\right] + \left(E\left[I(h) \middle| \mathcal{F}^1\right]\right)^2, \quad h \in H^1. \tag{4}$$

Непосредственно из формулы (4) следует оценка $B^1 \le \beta I_{H^1}$ п.н. Проверим выполнение неравенства $B^1 \ge \alpha I_{H^1}$. Разложим пространство X в прямую сумму $X = X^1 + \langle jj^* y_1^* \rangle$, $X^1 = \overline{jH^1}$, меру μ^1 можно рассматривать как проекцию μ на первую координату в этом разложении. Обозначим через $\{\mu_x,\ x \in X^1\}$ соответствующее семейство условных мер на $\langle jj^* y_1^* \rangle \equiv \mathbb{R}$. Несложно проверить [8], что для μ^1-п.в. $x \in X^1$ мера μ_x имеет логарифмическую производную, равную $\rho_x(t) = (\rho, j^* y_1^*)(x, t)$, $t \in \mathbb{R}$, и следовательно, логарифмически выпукла. Для таких $x \in X^1$ обозначим через $a(x)$ такую точку $t \in \mathbb{R}$, для которой $\rho_x(t) = 0$. В силу логарифмической выпуклости мер μ_x функция $a(\cdot)$ корректно определена и измерима. Для $h \in H^1$, $x \in X^1$ имеем

$$\left[E\left[I^2(h) \middle| \mathcal{F}^1 \right] - \left(E\left[I(h) \middle| \mathcal{F}^1 \right] \right)^2 \right](x) \le \int_{\mathbb{R}} [\, I(h)(x,t) - I(h)(x, a(x)) \,]^2 \mu_x(dt) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left[\int_{a(x)}^{t} \left(Bh, j^* y_1^* \right)(x,s)\, ds \right]^2 \mu_x(dt).$$

Отметим, что поскольку $B - \alpha I_H \ge 0$ и $h \perp j^* y_1^*$, то

$$\left(Bh, j^* y_1^* \right)^2 = \left(Bh - \alpha h, j^* y_1^* \right)^2 \le (Bh - \alpha h, h)\left(B j^* y_1^*, j^* y_1^* \right).$$

Поэтому по неравенству Коши

$$\left[E\left[I^2(h) \middle| \mathcal{F}^1 \right] - \left(E\left[I(h) \middle| \mathcal{F}^1 \right] \right)^2 \right](x) \le$$

$$\le \int_{\mathbb{R}} \int_{a(x)}^{t} \left[(Bh, h) - \alpha \|h\|^2 \right](x,s)\, ds \int_{a(x)}^{t} \left(B j^* y_1^*, j^* y_1^* \right)(x,s)\, ds\, \mu_x(dt). \tag{5}$$

Замечая, что

$$\int_{a(x)}^{t} \left(B j^* y_1^*, j^* y_1^* \right)(x,s)\, ds = \rho_x(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

и интегрируя по частям в (5), получаем оценку $B^1 \ge \alpha I_{H^1}$. Утверждение для $r < +\infty$ доказывается по индукции.

Имеет место равенство [2]

$$\mathcal{F}^r \vee \mathcal{F}_0 = \mathcal{G}^r \equiv \sigma\left\{ \phi \in W_2^1(X) \middle| D\phi \in H^r \text{ п.н.} \right\}, \quad r \in \mathbb{N} \cup \infty.$$

Поэтому в силу эргодичности меры μ и леммы 5 [2] для $h, g \in H$

$$(\rho^\infty, h) = L_2 - \lim_{r \to +\infty} (\rho^r, h),$$

$$(B^\infty h, g) = L_2 - \lim_{r \to +\infty} (B^r h, g),$$

что и завершает доказательство. Теорема доказана.

***Замечание* 1.** Условие эргодичности, использованное в теореме как вспомогательное техническое условие, опустить нельзя. Действительно, пусть ν —

мера из примера 3, тогда ее одномерная проекция, задаваемая функционалом $x^* \in X^*$, имеет плотность

$$p(t) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}\| j^*x^* \|_H}\left[\exp\left(-\frac{t^2}{2\| j^*x^* \|^2}\right) + \exp\left(-\frac{\left(t - \langle x, x^* \rangle\right)^2}{2\| j^*x^* \|^2}\right)\right], \quad t \in \mathbb{R},$$

которая при достаточно большом значении $\dfrac{\langle x, x^* \rangle}{\| j^*x^* \|_H}$ имеет два локальных максимума, и следовательно, не является плотностью логарифмически выпуклой меры.

Определение 3. *Пусть мера* μ *имеет слабый порядок* $+\infty$, *т. е.*

$$\int\limits_X \left|\langle x, x^* \rangle\right|^p \mu(dx) < +\infty, \qquad x^* \in X^*, \quad p < +\infty.$$

Пространством $K_p(\mu)$ *измеримых линейных функционалов на* (X, μ), *интегрируемых в степени* $p \geq 0$, *называется подпространство* $L_p(X, \mu)$, *натянутое на семейство* $\left\{\langle \cdot, x^* \rangle,\ x^* \in X^*\right\}$.

Результат теоремы 1 позволяет описать структуру пространств измеримых линейных функционалов для логарифмически выпуклой меры.

Лемма 3. *Для* $0 < \alpha \leq \beta < +\infty$ *эргодическая мера* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$ *имеет слабый порядок* $+\infty$. *При этом для произвольного* $p \in \mathbb{R}^+$ *существуют константы* $c_p = (\alpha, \beta, p)$, $C_p = C(\alpha, \beta, p)$ *такие, что для произвольной центрированной эргодической меры* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$, $x^* \in X^*$

$$c_p\| j^*x^* \|_H^p \leq \int\limits_X \left|\langle x, x^* \rangle\right|^p \leq C_p\| j^*x^* \|_H^p.$$

Доказательство. В силу теоремы 1 случайная величина $\langle \cdot, x^* \rangle$ имеет плотность

$$r = \exp(-V), \qquad \alpha\| j^*x^* \|_H^{-2} \leq V'' \leq \beta\| j^*x^* \|_H^{-2}.$$

Обозначим через $a_{x^*} \in \mathbb{R}$ такую точку, что $V'(a_{x^*}) = 0$; тогда

$$V(a_{x^*}) + \alpha\| j^*x^* \|_H^{-2}\tau^2 \leq V(a_{x^*} + \tau) \leq V(a_{x^*}) + \beta\| j^*x^* \|_H^{-2}\tau^2.$$

Обозначим через $I_{x^*}^0$, $I_{x^*}^1$ интервалы $(a_{x^*}, +\infty)$ и $(-\infty, a_{x^*})$ соответственно. Тогда в силу приведенных оценок на V имеют место неравенства

$$d_p\| j^*x^* \|_H^{p+1} \leq \exp\left\{V(a_{x^*})\right\} \int\limits_{I_{x^*}^i} \left|t - a_{x^*}\right|^p r(t)dt \leq D_p\| j^*x^* \|_H^{p+1},$$

$$p \geq 0, \quad i = 0, 1,$$

с константами

$$d_p = \int\limits_0^\infty t^p \exp\left\{-\beta t^2\right\}dt, \qquad D_p = \int\limits_0^\infty t^p \exp\left\{-\alpha t^2\right\}dt.$$

В силу равенства $\int r(t)dt = 1$ имеем

$$2d_0\|j^*x^*\|_H \le \exp\{V(a_{x^*})\} \le 2D_0\|j^*x^*\|_H.$$

Кроме того,

$$\left|\int_{\mathbb{R}}(t-a_{x^*})r(t)dt\right| \le \left[\int_{I^0_{x^*}} + \int_{I^1_{x^*}}\right]|t-a_{x^*}|r(t)dt \le \frac{D_1}{d_0}\|j^*x^*\|_H.$$

В силу центрированности исходной меры из последней оценки получаем

$$|a_{x^*}| \le \frac{D_1}{d_0}\|j^*x^*\|_H,$$

откуда и следует требуемое утверждение. Лемма доказана.

Далее мы предполагаем, что $0 < \alpha \le \beta < +\infty$.

Меру класса $C_H(\alpha, \beta)$ будем называть послойно центрированной, если в разложении (3) для почти всех $x \in X$ $\int_X u\mu_x(du) = 0$.

Теорема 2. *Пусть* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$ *послойно центрирована. Тогда*:

1) $K_p(\mu) = K_{p'}(\mu)$, $0 \le p,\ p' < +\infty$;

2) *нормы, индуцируемые на* X^* *пространствами* $K_2(\mu)$ *и* H *эквивалентны.*

Доказательство. Утверждения 1 и 2 для $p, p' > 0$ следуют из утверждения леммы 3. Покажем справедливость утверждения 1 для $p = 0$. В силу доказанного достаточно проверить, что для произвольной последовательности $\{x_n^*,\ n \ge 1\}$ такой, что случайные величины $\langle \cdot, x_n^* \rangle$ сходятся к нулю по вероятности, имеет место сходимость $\|j^*x_n^*\|_H \to 0,\ n \to +\infty$. Осталось заметить, что слабая сходимость к константе последовательности случайных величин $\{\xi_n\}$, имеющих плотности

$$p_n = \exp(-V_n), \qquad \alpha k_n^{-1} \le V_n'' \le \beta k_n^{-1}, \quad n \ge 1,$$

влечет за собой сходимость $k_n \to 0,\ n \to +\infty$. Отсюда, учитывая, что последовательность $\{x_n^*,\ n \ge 1\}$ сходится к нулю по мере μ_x для почти всех x, получаем требуемое утверждение. Теорема доказана.

Следствие 2. *При выполненных условиях теоремы существует взаимно однозначный и взаимно непрерывный оператор* $T: H \to K_2(\mu)$ *такой, что* $\langle \cdot, x^* \rangle = Tj^*x^*$, $x^* \in X^*$.

Теорема 3. *Пусть* $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$ *— эргодическая мера,* M *— подпространство* H, $\mathcal{F}_M = \sigma(TM)$, $\mu_M = \mu|_{\mathcal{F}_M}$. *Тогда* $\mu \in C_M(\alpha, \beta)$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 1.

4. Конечномерная характеризация и спектральное разложение для логарифмически выпуклых мер.

Определение 4. *Пусть мера* μ *на* X *имеет слабый второй момент,* $j_2: K_2(\mu) \to X$ *— канонический оператор вложения* [9]. *Будем говорить, что* $\mu \in C(\alpha, \beta)$, *если* $\mu \in C_{K_2(\mu)}(\alpha, \beta)$.

Далее, если это не будет вызывать недоразумений, мы будем опускать символ j_2 и образ элемента $x^* \in X^*$ в $K_2(\mu)$ обозначать тем же символом x^*.

Отметим, что в силу результатов предыдущего пункта для произвольных $0 < \alpha \le \beta < +\infty$ существуют $0 < \alpha' \le \beta' < +\infty$ такие, что каждая послойно центрированная мера $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$ лежит в классе $C_H(\alpha', \beta')$.

Теорема 4. *Для того чтобы центрированная мера* μ *являлась логарифмически выпуклой мерой класса* $C(\alpha, \beta)$, *достаточно, чтобы все ее конечномерные распределения были мерами класса* $C(\alpha, \beta)$. *Для эргодической меры это условие является также и необходимым.*

Доказательство. *Необходимость* доказана в теореме 1. Докажем *достаточность*. Выберем последовательность $\{x_n^*\} \subset X^*$, тотальную в X^* и являющуюся ОНБ в $K_2(\mu)$; положим $\mu_m = \mu|_{\sigma(x_1^*, \dots, x_m^*)}$. Пусть

$$h = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^* \in K_2(\mu)$$

— ненулевой вектор, тогда по условию теоремы для $m \geq k$ мера μ_m имеет логарифмическую производную (ρ_m, h) в направлении h, и $|D_h(\rho_m, h)| \leq \leq \beta \|h\|^2_{K_2(\mu)}$. Тогда

$$E(\rho, h)^2 = -ED_h(\rho_m, h) \leq \beta \|h\|^2_{K_2(\mu)}.$$

Следовательно, последовательность $\{(\rho_m, h),\ m \geq k\}$ слабо компактна в $L_2(X, \mu)$ и из нее можно выбрать слабо сходящуюся последовательность $\{(\rho_{m_r}, h)\}$. Пусть (ρ, h) — слабый предел этой последовательности. Тогда для произвольной функции вида

$$f(\cdot) = F(\langle \cdot, x_1^* \rangle, \dots, \langle \cdot, x_n^* \rangle), \qquad F \in C_b^1(\mathbb{R}^n), \qquad n \geq 1,$$

имеет место равенство

$$\int_X f_h' \, d\mu = \lim_{r \to +\infty} \int_X f_h' \, d\mu_{m_r} = \lim_{r \to +\infty} \int_X f(\rho_{m_r}, h) d\mu = \int_X f(\rho, h) d\mu,$$

т. е. мера μ имеет логарифмическую производную в направлении h и $\|(\rho, h)\|_{L_2(\mu)} \leq K \|h\|_{K_2(\mu)}$. Поскольку множество $\{x_n^*\}$ тотально в $K_2(\mu)$, отсюда получаем, что мера μ логарифмически дифференцируема вдоль всех направлений из $K_2(\mu)$.

Аналогичные рассуждения показывают, что для фиксированного $h = \sum_{j=1}^{k} c_j x_j^*$ существует подпоследовательность $\{m_q\} \subset \mathbb{N}$ такая, что имеет место слабая сходимость

$$(\rho_{m_q}, h) \to (\rho, h) \quad \text{в} \quad L_2(X, \mu),$$

$$B_{m_q} h \to DI(h) \quad \text{в} \quad L_2(X, \mu, K_2(\mu)), \quad q \to +\infty.$$

Как и при доказательстве теоремы 1, имеем

$$\alpha \|h\|^2_{K_2(\mu)} \leq (B_m h, h) \leq E\left[(B_n h, h) \middle| x_1^*, \dots, x_m^*\right] \leq \beta \|h\|^2_{K_2(\mu)}, \quad r \leq m \leq n,$$

откуда, переходя к пределу сначала по $n \to \infty$, а затем по $m \to \infty$, получаем оценку $\alpha \|h\|^2_{K_2(\mu)} \leq (Bh, h) \leq \beta \|h\|^2_{K_2(\mu)}$. Теорема доказана.

Замечание 2. Как видно из доказательства теоремы, для того чтобы проверить, что $\mu \in C_H(\alpha, \beta)$, достаточно показать, что в классе $C(\alpha, \beta)$ лежат все проекции на первые n членов некоторой фиксированной тотальной последовательности $\{x_k^*\} \subset X^*$.

Как следствие получаем следующие свойства класса $C(\alpha, \beta)$.

Теорема 5. 1) *Пусть* X, Y — *сепарабельные банаховы пространства,* $\mu \in C(\alpha, \beta)$ — *эргодическая мера на* X, $V \in \mathcal{L}(X, Y)$. *Тогда* $\mu V^{-1} \in C(\alpha, \beta)$.

2) *Для произвольных эргодических мер* $\mu^1, \mu^2 \in C(\alpha, \beta)$ *на сепарабельных банаховых пространствах* X_1, X_2 $\mu^1 \times \mu^2 \in C(\alpha, \beta)$.

3) *Слабый предел последовательности эргодических мер из класса* $C(\alpha, \beta)$ *лежит в классе* $C(\alpha, \beta)$.

Доказательство. В силу теоремы 4 достаточно рассмотреть случай мер на конечномерных пространствах.

В случае $X = Y = \mathbb{R}^d$, $\det V \neq 0$ утверждение 1 — следствие формулы замены переменных, в случае $Y = \mathbb{R}^d \subset \mathbb{R}^m = X$, $V = \mathrm{Pr}_Y$ это утверждение доказано в теореме 1.

Утверждение 2 — следствие равенства

$$K_2(\mu^1 \times \mu^2) = K_2(\mu^1) \oplus K_2(\mu^2), \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Утверждение 3 для мер на конечномерном пространстве проверяется непосредственно. Теорема доказана.

Пример 4. Пусть случайные величины $\{\xi_n, n \geq 1\}$ имеют совместное распределение из класса $C(\alpha, \beta)$, т. е. для произвольного $n \geq 1$ распределение вектора $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ — мера класса $C(\alpha, \beta)$. Пусть последовательность $\{x_n\} \subset X$ такова, что ряд

$$\xi = \sum_{n \geq 1} \xi_n x_n \tag{6}$$

сходится по вероятности на каждом функционале, т. е.

$$\left\langle \sum_{n=1}^{N} \xi_n x_n, x^* \right\rangle \xrightarrow{P} \langle \xi, x^* \rangle, \qquad N \to \infty, \qquad x^* \in X^*.$$

Тогда распределение случайного элемента ξ — мера класса $C(\alpha, \beta)$ в X.

Отметим, что в силу утверждения 2 той же теоремы последовательность независимых случайных величин, распределения которых лежат в $C(\alpha, \beta)$, имеет совместное распределение из класса $C(\alpha, \beta)$.

Следующий результат представляет интерес с точки зрения теории суммирования случайных рядов.

Теорема 6. *Сходимость ряда* (6) *по вероятности на каждом функционале равносильна его сходимости на каждом функционале в среднем степени* p *для произвольного* $p < +\infty$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2.

Наконец, приведем представление случайного элемента на X с логарифмически выпуклым распределением в виде ряда (6), аналогичное спектральному разложению для гауссовских элементов.

Теорема 7. *Пусть* $\mu \in C(\alpha, \beta)$ — *эргодическая мера на сепарабельном банаховом пространстве* X. *Тогда для случайного элемента* $\xi(x) = x$, $x \in X$, *на вероятностном пространстве* $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ *существует представление в виде* (6), *где случайные величины* $\{\xi_n\}$ *имеют совместное распределение класса* $C(\alpha, \beta)$, $\mathrm{cov}(\xi_k, \xi_j) = \delta_{kj}$, $k, j \geq 1$, *и ряд сходится на каждом функционале в среднем степени* p *для произвольного* $p < +\infty$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что среднее значение меры μ равно нулю (существование среднего обеспечивается тем, что мера μ имеет слабые моменты старших порядков [9, с. 101]). Зафиксируем в X^* последовательность $\{x_n^*\}$, образующую ортонормированный базис в $K_2(\mu)$, и положим $\xi_n(x) = \langle x, x_n^* \rangle$, $x \in X$, $x_n = i^* i x_n^*$, $n \ge 1$; здесь i^*: $K_2(\mu) \to X$ — оператор, сопряженный к каноническому вложению i^*: $X^* \to K_2(\mu)$. По построению, $\operatorname{cov}(\xi_k, \xi_j) = \delta_{kj}$,

$$\xi = \sum_{n \ge 1} \xi_n x_n,$$

и ряд сходится в среднем квадратическом на каждом функционале. Для произвольного $n \ge 1$ векторы $x_1, \ldots, x_n$ линейно независимы, а совместное распределение величин $\xi_1, \ldots, \xi_n$ по теореме 1 лежит в классе $C(\alpha, \beta)$. Теорема доказана.

1. *Albeverio S., Kondratiev Yu. G., Röckner M.* Dirichlet operators via stochastic analysis // J. Func. Anal. – 1995. – **128**, № 1. – P. 102–138.
2. *Kulik A. M.* Integral representation for functionals on the space with a smooth measure // Theory of St. Proc. – 1997. – **3**, № 1–2. – P. 235–243.
3. *Kulik A. M.* Large deviations for smooth measures // Ibid. – 1998. – **4**, № 1–2. – P. 180–188.
4. *Авербух В. И., Смолянов В. И., Фомин С. В.* Обобщенные функции и дифференциальные уравнения в линейных пространствах. I. Дифференцируемые меры // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1971. – **24**. – С. 140–184.
5. *Скороход А. В.* Случайные линейные операторы. – К.: Наук думка, 1979. – 200 с.
6. *Bogachev V. I.* Differentiable measures and the Malliavin calculus // J. Math. Sci. – 1997. – **87**, № 5. – П. 3577–3731.
7. *Скороход А. В.* Интегрирование в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1975. – 232 с.
8. *Богачев В. И., Смолянов О. Г.* Аналитические свойства бесконечномерных распределений // Успехи мат. наук. – 1990. – **45**, вып. 3. – С. 3–83.
9. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобадян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. – М.: Наука, 1985. – 368 с.

Получено 24.12.99