УДК 517.5

А. А. Лигун (Днепродзержин. гос. техн. ун-т),
А. А. Шумейко (Днепропетр. юрид. ин-т МВД Украины)

ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ПО ИНФОРМАЦИИ О ЕЕ ЗНАЧЕНИЯХ В УЗЛАХ ТРЕУГОЛЬНОЙ СЕТКИ, ОСНОВАННОЕ НА ПОПОЛНЕНИИ ДАННЫХ

We consider a method of the binary supplement of two-dimensional data. By using an information about a surface based on a triangular grid, we construct a continuous polygonal surface based on a denser grid (than given one). For this method, we obtain an error value, a norm, and study its properties.

Розглянуто один метод бінарного поповнення двовимірних даних — за інформацією про поверхню за трикутною решіткою будується неперервна полігональна поверхня за більш густою (ніж задана) решіткою. Отримано величину похибки, норму методу, вивчено його властивості.

Восстановление функции по ее значениям в узлах регулярной решетки является классической задачей теории аппроксимации. В последнее время наряду с классическими методами восстановления, основанными на использовании алгебраических и тригонометрических полиномов и сплайнов, широко используются методы, основанные на использовании всплесков [1], или методы, основанные на пополнении данных.

В настоящей работе изучается линейный метод восстановления поверхности по ее значениям в узлах правильной треугольной решетки, основанный на пополнении двумерных данных. Доказывается, что построенный оператор восстановления является линейным оператором сумматорного типа с базисной функцией, имеющей малый носитель. Установлено, что базисные функции представимы в виде конечной линейной комбинации сжатых в два раза и сдвинутых тех же базисных функций, что позволяет использовать их в качестве масштабирующих функций в кратномасштабном анализе (см. [1], гл. 5; [2]).

Через $l_\infty(\mathbb{R}^2)$ обозначим линейное пространство всех ограниченных массивов $F = \{f_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ с нормой

$$\|F\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)} = \sup_{i,j\in\mathbb{Z}} |f_{i,j}|.$$

Пусть $l = \{l_0, l_1\}$ — пара неколлинеарных радиус-векторов на плоскости XOY, $\Delta^0 = \Delta^0(l) = \{i l_0 + j l_1\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ — решетка, порожденная этими векторами, и $M_{i,j}$ — ее узлы.

Зададим на множестве ограниченных массивов F^0 линейные функционалы B_1, B_2, B_3 и положим $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$.

Обозначим через $F^0_{\nu,\mu} = \{f_{i+\nu,j+\mu,0}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$ сдвиг массива F^0 и определим узлы решетки Δ^k и массив $F^k = \{f_{i,j,k}\}_{i,j\in\mathbb{Z}}$, $k\in\mathbb{N}$, рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}
M_{2i,2j,k} &= M_{i,j,k-1}, & f_{2i,2j,k} &= f_{i,j,k-1},\\
M_{2i+1,2j,k} &= 0{,}5\left(M_{i,j,k-1} + M_{i+1,j,k-1}\right), & f_{2i+1,2j,k} &= B_1\left(F^{k-1}_{i,j}\right),\\
M_{2i,2j+1,k} &= 0{,}5\left(M_{i,j,k-1} + M_{i,j+1,k-1}\right), & f_{2i,2j+1,k} &= B_2\left(F^{k-1}_{i,j}\right),\\
M_{2i+1,2j+1,k} &= 0{,}5\left(M_{i+1,j,k-1} + M_{i,j+1,k-1}\right), & f_{2i+1,2j+1,k} &= B_3\left(F^{k-1}_{i,j}\right).
\end{aligned} \tag{1}$$

Непрерывную на $\mathbb{R}^2$ функцию двух переменных назовем k-полигоном с узлами в точках $M_{i,j,k}$, если для всех $i, j \in \mathbb{Z}$ на каждом треугольнике $\mathbb{T}^+_{i,j+1,k}$ с вершинами в точках $M_{i+1,j,k}$, $M_{i,j,k}$, $M_{i,j+1,k}$ и треугольнике $\mathbb{T}^-_{i+1,j,k}$ с вершинами в точках $M_{i,j+1,k}$, $M_{i+1,j,k}$, $M_{i+1,j+1,k}$ она совпадает с некоторой плоскостью (своей для каждого треугольника).

Через $g_k(F, \mathcal{B}, l, x, y)$ обозначим k-полигон, интерполирующий в узлах $M_{i,j,k}$ значения $f_{i,j,k}$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ $g_k(F, \mathcal{B}, l)$ — линейный оператор, отображающий пространство $l_\infty(\mathbb{R}^2)$ в пространство ограниченных на всей плоскости k-полигонов.

Если при $k \to \infty$ предел последовательности $g_k(F, \mathcal{B}, l, x, y)$ существует, то будем обозначать его через $g(F, \mathcal{B}, l, x, y)$. В дальнейшем будем рассматривать лишь те функционалы B_ν, $\nu = 1, 2, 3$, для которых $g(F, \mathcal{B}, l, x, y)$ существует.

Если функция f определена в точках $M_{i,j}$ и $f_{i,j} = f(M_{i,j})$, $i, j \in \mathbb{Z}$, то вместо $g_k(F, \mathcal{B}, l)$ и $g(F, \mathcal{B}, l)$ будем писать $g_k(1, \mathcal{B}, l)$ и $g(1, \mathcal{B}, l)$ соответственно.

Из способа построения оператора $g_k(\mathcal{B}, l)$ следует, что для любых $k, \nu = 0, 1, 2, \ldots$ имеет место равенство

$$g_k\left(F^\nu, \mathcal{B}, 2^{-\nu} l\right) = g_{k+\nu}(F, \mathcal{B}, l) \tag{2}$$

и для $\nu \le k$

$$g_k(F, \mathcal{B}, l) = g_k(g_\nu(F, \mathcal{B}, l), \mathcal{B}, l). \tag{3}$$

Переходя к пределу в (2) при $k \to \infty$, получаем

$$g_k\left(F^\nu, \mathcal{B}, 2^{-\nu} l\right) = g(F, \mathcal{B}, l), \tag{4}$$

а предельный переход в (3) дает равенство

$$g(F, \mathcal{B}, l) = g(g(F, \mathcal{B}, l), \mathcal{B}, l). \tag{5}$$

Кроме того,

$$g\left(F_{\nu,\mu}, \mathcal{B}, l, x, y\right) = g(F, \mathcal{B}, l, x - \nu|l_0|, y - \mu|l_1|) \tag{6}$$

и, если $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$, $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$, и $l(\boldsymbol{\alpha}) = \{\alpha_0 l_0, \alpha_1 l_1\}$, то

$$g(F, \mathcal{B}, l, x, y) = g\left(F, \mathcal{B}, l(\boldsymbol{\alpha}), \frac{\alpha_0}{|l_0|} x, \frac{\alpha_1}{|l_1|} y\right). \tag{7}$$

Положим

$$B_1\left(F^0\right) = \frac{f_{1,0,0} + f_{0,0,0}}{2} - \frac{1}{8} \Delta_x^2 \left(\frac{f_{1,0,0} + f_{0,0,0}}{2}\right), \tag{8}$$

$$B_2\left(F^0\right) = \frac{f_{0,0,0} + f_{0,1,0}}{2} - \frac{1}{8} \Delta_y^2 \left(\frac{f_{0,0,0} + f_{0,1,0}}{2}\right), \tag{9}$$

$$B_3\left(F^0\right) = \frac{f_{1,0,0} + f_{0,1,0}}{2} - \frac{1}{8} \Delta_{x,y}^2 \left(\frac{f_{1,0,0} + f_{0,1,0}}{2}\right), \tag{10}$$

где

$$\Delta_x^2 Z_{i,j} = Z_{i+1,i} - 2Z_{i,j} + Z_{i-1,i},$$

$$\Delta_y^2 Z_{i,j} = Z_{i,j+1} - 2Z_{i,j} + Z_{i,j-1},$$

$$\Delta_{x,y}^2 Z_{i,j} = Z_{i-1,j+1} - 2Z_{i,j} + Z_{i+1,j-1}.$$

В этом случае вместо $g_k(F, \mathcal{B}, l, x, y)$ будем писать $g_k(F, l, x, y)$.

Функционалы вида (8) неоднократно использовались в задачах, связанных с пополнением данных (см., например, [2–4]).

Пусть

$$\Delta_x g_k(F, l, x, y) = g_k\left(F, l, x + 2^{-k}|l_0|, y\right) - g_k(F, l, x, y),$$

$$\Delta_y g_k(F, l, x, y) = g_k\left(F, l, x, y + 2^{-k}|l_1|\right) - g_k(F, l, x, y),$$

$$\Delta_{x,y} g_k(F, l, x, y) = g_k\left(F, l, x - 2^{-k}|l_0|, y + 2^{-k}|l_1|\right) - g_k(F, l, x, y)$$

и

$$\|\delta g_k(F, l)\|_{C(\mathbb{R}^2)} =$$

$$= \max\left\{\|\Delta_x g_k(F, l)\|_{C(\mathbb{R}^2)}, \|\Delta_y g_k(F, l)\|_{C(\mathbb{R}^2)}, \|\Delta_{x,y} g_k(F, l)\|_{C(\mathbb{R}^2)}\right\}, \tag{11}$$

где, как обычно,

$$\|Z\|_{C(\mathbb{R}^2)} = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} |Z(x, y)|.$$

Теорема 1. *Для любого массива* $F \in l_\infty\left(\mathbb{R}^2\right)$ *и произвольных фиксированных* $k, \mu \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\left\|g_{k+\mu}(F, l) - g_k(F, l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} < \frac{5}{24}\|\delta g_k(F, l)\|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{12}$$

Доказательство. Для ограниченной последовательности $f = \left\{f_{i,0}\right\}_{i\in\mathbb{Z}}$ и равномерного разбиения оси точками $x_{i,0} = ih$, $i \in \mathbb{Z}$, $h > 0$ положим

$$x_{2i,k} = x_{i,k-1}, \qquad f_{2i,k} = f_{i,k-1}, \tag{13}$$

и

$$x_{2i+1,k} = \frac{x_{i,k-1} + x_{i+1,k-1}}{2}, \tag{14}$$

$$f_{2i+1,k} = \frac{f_{i,k} + f_{i+1,k}}{2} - \frac{1}{8}\Delta^2\left(\frac{f_{i,k} + f_{i+1,k}}{2}\right). \tag{15}$$

Через $\varphi_{k,h}(f)$ обозначим ломаную с узлами в точках $x_{i,k}$, принимающую значения $f_{i,k}$ в узлах. Предел этой ломаной при $k \to \infty$ обозначим через $\varphi_h(f)$.

Подробно методы восстановления $\varphi_{k,h}(f)$ и $\varphi_h(f)$ изучались в работе [2]. Здесь, в частности, доказано, что для любой ограниченной последовательности и произвольных фиксированных $k, \mu \in \mathbb{N}$ имеют место неравенства

$$\left\|\Delta\varphi_{k+1,h}(f)\right\|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{5}{8}\left\|\Delta\varphi_{k,h}(f)\right\|_{C(\mathbb{R})} \tag{16}$$

и

$$\left|\varphi_{k+1,h}\left(f, x_{2\nu+1,k+1}\right) - \varphi_{k,h}\left(f, x_{2\nu+1,k+1}\right)\right|_{C(\mathbb{R})} \le \frac{5}{64}\left\|\Delta\varphi_{k,h}(f)\right\|_{C(\mathbb{R})}, \tag{17}$$

где

$$\Delta\varphi_{k,h}(f,x) = \varphi_{k,h}\left(f, x+\frac{h}{2^k}\right) - \varphi_{k,h}(f,x).$$

Из определения (11), соотношения (16), конструкции метода и очевидного равенства

$$\|\delta g_0(F,l)\|_{C(\mathbb{R}^2)} = \|\delta(F)\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)}$$

следует, что для любого массива $f \in l_\infty(\mathbb{R}^2)$ и произвольного фиксированного $k \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство

$$\left\|\delta g_{k+1}(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le \left(\frac{5}{8}\right)^{k+1} \|\delta(F)\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)}, \tag{18}$$

где

$$\|\delta(F)\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max\left\{\|\Delta_x F\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)}, \left\|\Delta_y F\right\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)}, \left\|\Delta_{x,y} F\right\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)}\right\}$$

и

$$\|\Delta_x F\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|f_{i+1,j,0} - f_{i,j,0}\right|, \qquad \left\|\Delta_y F\right\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|f_{i,j+1,0} - f_{i,j,0}\right|,$$

$$\left\|\Delta_{x,y} F\right\|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)} = \max_{i,j\in\mathbb{Z}} \left|f_{i+1,j,0} - f_{i,j+1,0}\right|.$$

Пусть $\mu = 1$ и, например, $(x,y) \in \mathbb{T}^+_{i,j,k}$. Ясно, что $g_{k+1}(F,l,x,y) - g_k(F,l,x,y)$ является $(k+1)$-полигоном. Отсюда и из того факта, что

$$g_{k+1}\left(F,l,x_{i,j,k},y_{i,j,k}\right) - g_k\left(F,l,x_{i,j,k},y_{i,j,k}\right) = 0,$$

имеем

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^+_{i,j,k}} \left\|g_{k+1}(F,l) - g_k(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} =$$

$$= \max\Big\{\left|g_{k+1}\left(F,l,M_{2i+1,2j-2,k+1}\right) - g_k\left(F,l,M_{2i+1,2j-2,k+1}\right)\right|,$$

$$\left|g_{k+1}\left(F,l,M_{2i+1,2j-1,k+1}\right) - g_k\left(F,l,M_{2i+1,2j-1,k+1}\right)\right|,$$

$$\left|g_{k+1}\left(F,l,M_{2i,2j-1,k+1}\right) - g_k\left(F,l,M_{2i,2j-1,k+1}\right)\right|\Big\}.$$

Из последнего соотношения и (17) получаем

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{T}^+_{i,j,k}} \left\|g_{k+1}(F,l,x,y) - g_k(F,l,x,y)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le \frac{5}{64}\|\delta g_k(F,l)\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Для $(x,y)\in\mathbb{T}^-_{i,j,k}$ доказательство проводится аналогично.

Пусть теперь $\mu > 1$, тогда

$$\left\|g_{k+\mu}(F,l) - g_k(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le \left\|g_{k+1}(F,l) - g_k(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} +$$

$$+ \left\|g_{k+2}(F,l) - g_{k+1}(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} + \ldots + \left\|g_{k+\mu}(F,l) - g_{k+\mu-1}(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le$$

$$\le \frac{5}{64}\|\delta g_k(F,l)\|_{C(\mathbb{R}^2)} + \frac{5}{64}\left\|\delta g_{k+1}(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} + \ldots + \frac{5}{64}\left\|\delta g_{k+\mu-1}(F,l)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Отсюда и из (18) следует

$$\left\| g_{k+\mu}(F,l) - g_k(F,l) \right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le \frac{5}{64} \| \delta g_k(F,l) \|_{C(\mathbb{R}^2)} \left(1 + \frac{5}{8} + \left(\frac{5}{8}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{5}{8}\right)^{\mu-1} \right) <$$

$$< \frac{5}{64} \| \delta g_k(F,l) \|_{C(\mathbb{R}^2)} \frac{8}{3} = \frac{5}{24} \| \delta g_k(F,l) \|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 1 и неравенства (18) получаем

$$\left\| g_{k+\mu}(F,l) - g_k(F,l) \right\|_{C(\mathbb{R}^2)} < \frac{5}{24} \left(\frac{5}{8}\right)^k \| \delta(F) \|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)}. \tag{19}$$

Следовательно, последовательность $g_k(F,l,x,y)$ сходится в себе. Нетрудно видеть, что $g_k(F,l,x,y)$ ограничена (более того, далее мы покажем, что нормы операторов $g_k(l)$, действующих из $l_\infty(\mathbb{R}^2)$ в $C(\mathbb{R}^2)$ по правилу $F \to g_k(F,l)$, ограничены в совокупности и невелики). Отсюда следует, что равномерный предел $g_k(F,l,x,y)$ при $k \to \infty$ существует. Обозначим этот предел через $g(F,l,x,y)$.

Переходя к пределу по $\mu \to \infty$ в (19), получаем следующее утверждение.

Теорема 2. *Для любого массива* $F \in l_\infty(\mathbb{R}^2)$ *и* $k \in \mathbb{N}$ *имеет место неравенство*

$$\| g(F,l) - g_k(F,l) \|_{C(\mathbb{R}^2)} < \frac{5}{24} \| \delta g_k(F,l) \|_{C(\mathbb{R}^2)} < \frac{5}{24} \left(\frac{5}{8}\right)^k \| \delta(F) \|_{l_\infty(\mathbb{R}^2)}.$$

Если $\mathfrak{S} \in \mathbb{R}^2$ — множество конечной меры, то положим

$$\| f \|_{p(\mathfrak{S})} = \left(\int_{\mathfrak{S}} | f(x,y) |^p \, dx\, dy \right)^{1/p}, \quad \| f \|_{C(\mathfrak{S})} = \max_{(x,y) \in \mathfrak{S}} | f(x,y) |.$$

***Следствие* 1.** *Пусть* $p \in [1, \infty)$, $k \in \mathbb{N}$. *Для любого массива* $f \in l_\infty(\mathbb{R}^2)$ *имеют место неравенства*

$$\| g(F,l) \|_{p(\mathfrak{S})} - \| g_k(F,l) \|_{p(\mathfrak{S})} \le (\operatorname{mes} \mathfrak{S})^{1/p} \frac{5}{24} \| \delta g_k(F,l) \|_{C(\mathbb{R}^2)} \tag{20}$$

и

$$\| g_k(F,l) \|_{C(\mathfrak{S})} \le \| g(F,l) \|_{C(\mathfrak{S})} \le \| g_k(F,l) \|_{C(\mathfrak{S})} + \frac{5}{24} \| \delta g_k(F,l) \|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{21}$$

Соотношение (21) *верно и для случая, когда* $\mathfrak{S} \in \mathbb{R}^2$.

Левая часть неравенства (21) следует из того факта, что $g_k(F,l)$ — полигон, интерполирующий $g(F,l)$ у узлах.

Всюду далее будем считать, что $l_0 = (h, 0)$ и $l_1 = \left(\frac{h}{2}, h^*\right)$, где $h^* = h\frac{\sqrt{3}}{2}$. В этом случае вместо $g_k(F,l)$ и $g(F,l)$ будем писать $g_{k,h}(F)$ и $g_h(F)$ соответственно.

Пусть $h = 1$ и $F^* = F^{*,0} = \left\{ f_{i,j}^* \right\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ такова, что $f_{i,j}^* = \delta_{|i|+|j|,0}$ ($\delta_{\nu,\mu}$ — символ Кронекера). Положим

$$G_k(x,y) = g_{k,1}(F^*, x, y), \qquad G(x,y) = g_1(F^*, x, y).$$

Из линейности операторов $g_{k,h}$ и g_h следует, что для любого массива $F \in l_\infty(\mathbb{R}^2)$, любых $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и $h > 0$ имеют место равенства

$$g_h(f, x, y) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} f_{i,j}\, G\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h^*} - j\right) \tag{22}$$

и

$$g_{k,h}(f, x, y) = \sum_{i, j \in \mathbb{Z}} f_{i,j}\, G_k\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h^*} - j\right). \tag{23}$$

Ясно, что носителем функции $G_k(x, y)$ является шестиугольник $\mathfrak{D}_k$ с вершинами в точках

$$M_1^k\left(\left(-3 + \frac{1}{2^k}\right), 0\right), \qquad M_2^k\left(\left(\frac{-3 + 1/2^k}{2}\right), \left(-3 + \frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$M_3^k\left(\left(\frac{3 - 1/2^k}{2}\right), \left(3 - \frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad M_4^k\left(\left(3 - \frac{1}{2^k}\right), 0\right),$$

$$M_5^k\left(\left(\frac{3 - 1/2^k}{2}\right), \left(-3 + \frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \qquad M_6^k\left(\left(\frac{-3 + 1/2^k}{2}\right), \left(-3 + \frac{1}{2^k}\right)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

и, следовательно, носителем функции $G(x, y)$ является правильный шестиугольник $\mathfrak{D}$ с вершинами в точках $(\pm 3, 0)$, $(\pm 3/2, \pm 3\sqrt{3}/2)$.

Таким образом, для $(x, y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$ выполняются равенства

$$g_{k,h}(f, x, y) = \sum_{\nu, \mu :\, (\nu - i, \mu - j) \in \mathfrak{D}_k} f_{\nu,\mu} G_k\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right) \tag{24}$$

и

$$g_h(f, x, y) = \sum_{\nu, \mu :\, (\nu - i, \mu - j) \in \mathfrak{D}} f_{\nu,\mu} G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right). \tag{25}$$

Теорема 3. *Для всех* $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ *имеет место равенство*

$$G(x, y) = G(2x, 2y) +$$

$$+ \frac{1}{16}\sum_{\nu=0}^{5}\left(9G\left(2x - \cos\frac{\pi}{3}\nu, 2y - \sin\frac{\pi}{3}\nu\right) - G\left(2x - 3\cos\frac{\pi}{3}\nu, 2y - 3\sin\frac{\pi}{3}\nu\right)\right). \tag{26}$$

Доказательство. Из (25) и (4) следует

$$G(x, y) = g_1\left(F^{*,0}, x, y\right) = g_{1/2}\left(F^{*,1}, x, y\right) =$$

$$= g_{1/2}\left(\sum_{(\nu,\mu) \in \mathfrak{D}} f^{*,1}_{\nu,\mu} F^{*,0}_{\nu,\mu}, x, y\right) = \sum_{(\nu,\mu) \in \mathfrak{D}} f^{*,1}_{\nu,\mu}\, g_{1/2}\left(F^{*,0}_{\nu,\mu}, x, y\right).$$

Теперь, последовательно используя равенства (6) и (7), получаем

$$G(x, y) = \sum_{(\nu,\mu) \in \mathfrak{D}} f^{*,1}_{\nu,\mu}\, g_{1/2}\left(F^{*,0}, x - \nu h, y - \mu h^*\right) =$$

$$= \sum_{(\nu,\mu) \in \mathfrak{D}} f^{*,1}_{\nu,\mu}\, g_1\left(F^{*,0}, 2x - \nu h, 2y - \mu h^*\right)$$

или, что то же,

$$G(x, y) = \sum_{(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} f^*_{\nu,\mu,1} G\left(2x - \nu\frac{1}{2}, 2y - \mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{27}$$

Непосредственно вычисляя значения $f^*_{\nu,\mu,1}$, отсюда получаем утверждение теоремы 3.

Пусть $f \in C\left(\mathbb{R}^2\right)$ и $\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)}$ — норма оператора g, действующего из пространства $C\left(\mathbb{R}^2\right)$ в пространство $C\left(\mathbb{R}^2\right)$, т. е.

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} = \sup_{\|f\|_{C(\mathbb{R}^2)}\le 1} \|g_h(f)\|_{C(\mathbb{R}^2)}.$$

Положим

$$N_k(x, y) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left| G_k\left(x - i\frac{1}{2}, y - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|$$

и

$$N(x, y) = \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left| G\left(x - i\frac{1}{2}, y - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|. \tag{28}$$

Теорема 4. *Справедливо равенство*

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} = \|N\|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{29}$$

Кроме того, для любого $k \in \mathbb{N}$ *и* $h > 0$

$$\|N_k\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le \|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} \le \|N_k\|_{C(\mathbb{R}^2)} + 12\|\delta N_k\|_{C(\mathbb{R}^2)}. \tag{30}$$

Доказательство. Пусть f — произвольная функция из $C\left(\mathbb{R}^2\right)$ такая, что $\|f\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le 1$. Тогда в силу (22)

$$\|g_h(f)\|_{C(\mathbb{R}^2)} \le \left\| \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} f_{i,j} G\left(\frac{(\cdot)}{h} - i, \frac{(\cdot)}{h^*} - j\right)\right\|_{C(\mathbb{R}^2)} =$$

$$= \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \left| \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} f_{i,j} G\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h^*} - j\right)\right| \le \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left| f_{i,j} G\left(\frac{x}{h} - i, \frac{y}{h^*} - j\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{i,j\in\mathbb{Z}} |f_{i,j}| \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left| G\left(x - i\frac{1}{2}, y - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| \le$$

$$\le \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \left| G\left(x - i\frac{1}{2}, y - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right| = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N(x, y). \tag{31}$$

Из 1-периодичности функции $N(x, y)$ по переменной x и $\sqrt{3}$-периодичности по переменной y, а также из ее непрерывности следует, что существует точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{T}^+_{0,0,0}$ такая, что

$$N(x_0, y_0) = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N(x, y).$$

Через $f_0(x, y)$ обозначим непрерывную функцию, принимающую значения

$$\operatorname{sgn} G(x_0 - i, y_0 - j)$$

в точках (ih, jh^*) и любые значения из $(-1,1)$ в остальных точках из $\mathbb{R}^2$. Тогда

$$\|g_h\|_{C(\mathbb{R}^2)\to C(\mathbb{R}^2)} \geq \frac{\|g_h(f_0)\|_{C(\mathbb{R}^2)}}{\|f_0\|_{C(\mathbb{R}^2)}} = \|g_h(f_0)\|_{C(\mathbb{R}^2)} \geq \left|f_0\left(x_0 h, y_0 h^*\right)\right| =$$

$$= \sum_{i,j\in\mathbb{Z}} \operatorname{sgn} G(x_0-i, y_0-j) G(x-i, y-j) = \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} N(x,y),$$

что вместе с (31) доказывает равенство (29).

Для доказательства равенства (30) достаточно учесть равенство (21) и тот факт, что в соотношении (22) не более чем 54 слагаемых, отличных от нуля.

Отметим, что функция $N(x, y)$ имеет более сильную симметрию, чем периодичность по каждой переменной, а именно, если через (x_φ, y_φ) обозначим точку $(x, y)\in\mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$, полученную поворотом на угол φ (в положительном направлении) вокруг центра треугольника $\mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$, то для любых $n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ имеет место равенство

$$N(x,y) = N\left(x_{n_0\pi/3} \pm n_1 h, y_{n_0\pi/3} \pm n_2 h^*\right).$$

Положим для $(x, y)\in\mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}$

$$K_{n,m}(x,y) = x^n y^m - \sum_{\nu,\mu:\,(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n\left(\mu\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h}-\nu, \frac{y}{h^*}-\mu\right),$$

где $n, m \geq 0$: $n+m=4$.

Для функции f такой, что

$$\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \in C\left(\mathbb{R}^2\right), \quad \nu, \mu = 0, 1, \ldots, 4, \ \nu+\mu = 4,$$

введем модуль непрерывности

$$\omega\left(f^{\mathrm{IV}}, t\right) = \max_{\nu+\mu=4} \sup_{|M'-M''|<t} \left|\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu}(M') - \frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu}(M'')\right|.$$

Теорема 5. *Пусть функция f такова, что*

$$\frac{\partial f^{\nu+\mu}}{\partial x^\nu \partial y^\mu} \in C\left(\mathbb{R}^2\right), \qquad \nu, \mu = 0, 1, \ldots, 4, \quad \nu+\mu \leq 4.$$

Тогда для $(x, y)\in\mathbb{T}^{\pm}_{i,j,k}$ равномерно по $i, j \in \mathbb{Z}$ и $(x, y)\in\mathbb{R}^2$ выполняется соотношение

$$|f(x,y) - g_h(f,x,y)| =$$

$$= \frac{h^4}{24}\left|\sum_{n,m\geq 0:\,n+m=4} C_4^n \left.\frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\right|_{(ih,jh^*)} K_{n,m}(x,y)\right| + O\left(h^4\omega\left(f^{\mathrm{IV}}, h\right)\right). \qquad (32)$$

Доказательство. Без потери общности можно считать, что $(x, y)\in\mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}$.

В работе [2] доказано, что для произвольного кубического полинома $P_3(x)$ имеет место равенство $\varphi_h(P_3, x) = P_3(x)$, где оператор $\varphi_h(f)$ определен ранее.

Отсюда и из того факта, что след полинома двух переменных на любую прямую есть полином одной переменной той же степени и из конструкции метода

$g_h(f)$ следует, что если $P_3(x, y)$ — кубический полином по переменным x и y, то $g_h(P_3(x, y)) = P_3(x, y)$.

Таким образом, для $n, m = 1, 2, \ldots, n + m \leq 3$ и $(x, y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}$ имеем

$$x^n y^m = g_h\left(x^n y^m, x, y\right) = \sum_{\nu,\mu:(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n \left(\mu \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right). \tag{33}$$

Если непустое множество $\mathfrak{R}$ лежит в круге радиуса Mh (M — абсолютная константа), то для $(x, y) \in \mathfrak{R}$ формулу Тейлора для функции двух переменных f можно записать в виде

$$f(x, y) = \sum_{n,m\geq 0:\, n+m\leq 4} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} x^n y^m + \alpha(x, y) h^4 \omega\left(f^{\mathrm{IV}}, hM\right),$$

где $|\alpha(x, y)| \leq M^4/24$.

Отсюда, из линейности оператора g_h, соотношения (33), из того факта, что равенство (22) содержит не более чем 54 слагаемых, отличных от нуля, из того, что носитель базисной функции содержится в круге радиуса 3, и из теоремы 4 имеем

$$g_h(f, x, y) = \sum_{n,m\geq 0:\, n+m\leq 4} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} g_h(x^n y^m, x, y) +$$
$$+ \beta(x, y) h^4 \omega\left(f^{\mathrm{IV}}, hM\right) =$$
$$= \sum_{n,m\geq 0:\, n+m\leq 3} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} x^n y^m +$$
$$+ \sum_{n,m\geq 0:\, n+m=4} \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} g_h\left(x^n y^m, x, y\right) + \beta(x, y) h^4 \omega\left(f^{\mathrm{IV}}, 4h\right),$$

где $|\beta(x, y)| \leq \|N\|_{C(\mathbb{R}^2)} 4 \cdot 4^4 \cdot 54/24$.

Отсюда и из равенства (25) следует

$$g_h(f, x, y) = \sum_{n,m\geq 0:\, n+m\leq 3} C_4^{n+m} \frac{h^{n+m}}{(n+m)!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} x^n y^m +$$
$$+ \sum_{n,m\geq 0:\, n+m=4} \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} \sum_{\nu,\mu:(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n \left(\mu \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right) +$$
$$+ \beta(x, y) h^4 \omega\left(f^{\mathrm{IV}}, 4h\right).$$

Таким образом, имеем

$$|f(x, y) - g_h(f, x, y)| =$$
$$= \frac{h^4}{24!} \left| \sum_{n,m\geq 0:\, n+m=4} C_4^n \left(x^n y^m - \sum_{\nu,\mu:(\nu,\mu)\in\mathfrak{D}} \nu^n \left(\mu \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^m G\left(\frac{x}{h} - \nu, \frac{y}{h^*} - \mu\right)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} \right| + O\left(h^4 \omega\left(f^{\mathrm{IV}}, h\right)\right) =$$
$$= \frac{h^4}{24!} \left| \sum_{n,m\geq 0:\, n+m=4} C_4^n \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m}\bigg|_{(0,0)} K_{n,m}(x, y) \right| + O\left(h^4 \omega\left(f^{\mathrm{IV}}, h\right)\right).$$

Соотношение (32) доказано.

Положим

$$\left\| f^{\mathrm{IV}} \right\| = \max_{n,m \ge 0:\, n+m=4} \left\{ \left\| \frac{\partial^4 f}{\partial x^n \partial y^m} \right\|_{C(\mathbb{R}^2)} \right\}$$

и

$$\mathbb{K} = \max_{(x,y) \in \mathbb{T}^{\pm}_{0,0,0}} \left\{ \sum_{n,m \ge 0:\, n+m=4} C_4^n \left| K_{n,m}(x,y) \right| \right\}.$$

Следствие 2. *Пусть функция f такова, что*

$$\frac{\partial^4 f^{\nu+\mu}}{\partial x^{\nu} \partial y^{\mu}} \in C(\mathbb{R}^2), \qquad \nu, \mu = 0, 1, \ldots, 4, \quad \nu + \mu \le 4.$$

Тогда

$$\| f - g_h(f) \|_{C(\mathbb{R}^2)} = \mathbb{K} \frac{h^4}{24} \left\| f^{\mathrm{IV}} \right\| + o(h^4).$$

Авторы благодарят профессора Бабенко В. Ф. за полезные советы и обсуждение результатов данной работы.

1. *Daubechies I.* Ten lectures on wavelets. – Philadelphia: SIAM, 1992.
2. *Лигун А. А., Шумейко А. А.* Линейный метод восстановления функций, основанный на бинарном пополнении данных // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 11. – С. 1501–1512.
3. *Dubuc S.* Interpolation through an iterative scheme // J. Math. Anal. and Appl. – 1986. – P. 185–204.
4. *De Marchi S.* The Dyadic iterative interpolation method and some extensions. – TR № 10/94. – Univ. Padua, 1994.

Получено 09.10.00