УДК 512.544

Т. Д. Лукашова (Сум. пед. ун-т)

ПРО НЕЦИКЛІЧНУ НОРМУ НЕСКІНЧЕННИХ ЛОКАЛЬНО СКІНЧЕННИХ ГРУП

We study relations between properties of a group and its noncyclic norm. We obtain the description of infinite locally finite groups whose noncyclic norms are non-Dedekind.

Вивчаються зв'язки між властивостями групи та її нециклічної норми. Одержано опис нескінченних локально скінченних груп, нециклічна норма яких недедекіндова.

Нехай G — група і $\Sigma \neq \varnothing$ — система всіх підгруп групи G, що мають певну теоретико-групову властивість. Максимальну підгрупу групи G, що нормалізує кожну підгрупу системи Σ, називають Σ-нормою цієї групи. Σ-норма містить центр групи, збігається з перетином нормалізаторів усіх підгруп системи Σ та є характеристичною підгрупою групи.

Якщо Σ-норма збігається з групою G, то в G інваріантні всі підгрупи системи Σ. Дослідженням таких груп активно займалися алгебраїсти різних країн та, особливо, С. М. Черніков і його учні. Тому природно розглядати більш загальну ситуацію, коли Σ-норма є підгрупою групи G.

У випадку, коли систему Σ складають усі підгрупи групи G, Σ-норму у відповідності з роботами [1, 2] будемо називати нормою групи і позначимо її через $N(G)$. Норма $N(G)$ є абелевою або гамільтоновою підгрупою та міститься у будь-якій іншій Σ-нормі групи G. Тому поняття норми можна узагальнити, звужуючи систему підгруп Σ. До таких узагальнень належать, зокрема, поняття A-норми як перетину нормалізаторів усіх максимальних абелевих підгруп [3], поняття субнормальної норми або підгрупи Віландта, як перетину нормалізаторів усіх субнормальних підгруп групи [4] та інші (див., наприклад, [5, 6]).

Оскільки норма групи збігається з нормою циклічних підгруп групи, то систему Σ всіх підгруп природно звузити до системи нециклічних підгруп. Згідно з [7] відповідну Σ-норму будемо називати нециклічною нормою групи й позначатимемо її через N_G. Якщо підгрупа N_G нециклічна, то в ній інваріантні всі нециклічні підгрупи. Неабелеві групи з інваріантними нециклічними підгрупами вивчалися, зокрема, у роботах [8 – 10] та були названі там $\overline{H}$-групами. Отже, нециклічна норма є дедекіндовою або негамільтоновою $\overline{H}$-групою.

Обмеження на нециклічну норму групи суттєво впливають як на властивості цієї норми, так і на властивості групи. Зокрема, в [7] було встановлено, що нескінченні групи, нециклічна норма яких локально ступінчаста та має скінченний індекс у групі, вичерпуються скінченними розширеннями своїх центрів.

У даній роботі вивчаються нескінченні локально скінченні групи, що мають недедекіндову нециклічну норму без обмежень на її індекс. Встановлено, що такі групи локально нільпотентні та є скінченними розширеннями квазіциклічних підгруп. Одержано їх конструктивний опис (теореми 3, 4).

Лема 1. *Нехай N_G — нециклічна норма групи G і H — нециклічна інваріантна підгрупа цієї групи. Тоді $\overline{N_G} = N_G H/H \leq N(\overline{G}) = N(G/H)$, де $N(\overline{G})$ — норма групи $\overline{G}$.*

Доведення. Для доведення леми достатньо показати, що підгрупа $N(\overline{G})$ нормалізує кожну підгрупу групи $\overline{G}$.

Нехай $\overline{M} \leq \overline{G}$. Повний прообраз M групи $\overline{M}$ у G є нециклічною підгрупою, тому $N_G \subseteq N_G(M)$ і $\overline{N_G} \subseteq N_{\overline{G}}(\overline{M})$. З означення норми групи та довільності вибору підгрупи $\overline{M}$ випливає, що $\overline{N_G} \subseteq N(\overline{G})$, що й треба було довести.

Теорема 1. *Нескінченна локально скінченна група G з недедекіндовою нециклічною нормою N_G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи A, причому $N_G \subseteq C_G(A)$.*

Доведення. Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. Якщо $G = N_G$, то G є негамільтоновою $\overline{H}$-групою і твердження теореми випливає з опису таких груп (див.[10], теореми 1.2 – 1.4). Отже, далі будемо вважати, що $G \neq N_G$.

Покажемо, що група G задовольняє умову мінімальності для абелевих підгруп. Якщо це не так, то вона містить нескінченну абелеву підгрупу A, яка є прямим добутком підгруп простих порядків. З недедекіндовості підгрупи N_G та опису негамільтонових $\overline{H}$-груп (див. [10], теореми 1.2 – 1.4) випливає, що $|A \cap N_G| < \infty$. Розглянемо групу $G_1 = N_G A = N_G A_2$, де $A = A_1 \times A_2$, $A_1 = A \cap \cap N_G$, $A_2 \cap N_G = E$. Оскільки $|A_2| = \infty$, то підгрупа A_2 нециклічна, звідки $A_2 \lhd G_1$ і $G_1 = N_G \times A_2$. Отже, $G_1 = N_{G_1}$ і G_1 є негамільтоновою $\overline{H}$-групою, що неможливо згідно з [10]. Тому група G задовольняє умову мінімальності для абелевих, а з урахуванням [11] і для всіх підгруп.

Припустимо, що G містить прямий добуток P двох квазіциклічних підгруп та покладемо $G_2 = N_G P$. Враховуючи, що N_G є негамільтоновою $\overline{H}$-групою та використовуючи теореми 1.2 – 1.4 роботи [10], одержуємо $[P : P \cap N_G] = \infty$. Тому фактор-група $G_2 / N_G \cong P / P \cap N_G$ повна абелева і за теоремою 1.16 з [12] G_2 скінченна над центром. У такому випадку за теоремою 3 роботи [7] G_2 є $\overline{H}$-групою, що неможливо. Отже, G є скінченним розширенням квазіциклічної підгрупи A.

Покажемо, що $N_G \subseteq C_G(A)$. Якщо $|N_G| = \infty$, то за результатами роботи [10] $A \subseteq Z(N_G)$. Нехай $|N_G| < \infty$. Тоді $[G : C_G(N_G)] < \infty$ і $A \subseteq C_G(N_G)$. Отже, у будь-якому випадку $N_G \subseteq C_G(A)$. Теорему доведено.

З теореми 1 та теореми 3 роботи [7] випливають такі наслідки.

Наслідок 1. *Якщо нециклічна норма N_G нескінченної локально скінченної групи G є нескінченною негамільтоновою $\overline{H}$-групою, то в G інваріантні всі нециклічні підгрупи і $N_G = G$.*

Наслідок 2. *Якщо нециклічна норма N_G недедекіндова та є власною підгрупою нескінченної локально скінченної групи G, то N_G скінченна.*

Теорема 2. *Будь-яка локально скінченна p-група $(p \neq 2)$ G з власною неабелевою нециклічною нормою скінченна.*

Доведення. Справді, інакше за теоремою 1 $G = AH$, де A — квазіциклічна p-група і $|H| < \infty$. За наслідком 1.13 роботи [12] $A \subseteq Z(G)$, тому $A \subset N_G$ і $|N_G| = \infty$. Застосовуючи наслідок 1, одержуємо $G = N_G$, що неможливо за умовою. Отже, $|G| < \infty$. Теорему доведено.

Наслідок 3. *Якщо нескінченна локально скінченна p-група G $(p \neq 2)$ містить неінваріантну нециклічну підгрупу, то її нециклічна норма абелева.*

Позначимо через $\omega(G)$ — нижній шар групи G — підгрупу, породжену всіма елементами простого порядку групи G.

Лема 2. *Якщо локально скінченна 2-група G має недедекіндову нециклічну норму N_G, нижній шар якої є групою типу*

$$\omega(N_G) = (\langle a_1 \rangle \times \langle a_2 \rangle), \quad |a_1| = |a_2| = 2, \quad \omega(N_G) \subseteq Z(G),$$

то $\omega(G) = \omega(N_G)$.

Доведення. Припустимо, що всупереч твердженню леми існує інволюція $x \in G \setminus N_G$. Тоді $\langle x \rangle = \langle x, a_1 \rangle \cap \langle x, a_2 \rangle \lhd G_1 = \langle x \rangle N_G$ і $x \in Z(G_1) \leq N_{G_1}$. Звідси $|\omega(N_{G_1})| = 8$, що неможливо для $\overline{H_2}$-груп. Лему доведено.

Теорема 3. *Нескінченні локально скінченні p-групи, що мають недедекіндову нециклічну норму N_G, вичерпуються групами типів*:

1) $G = (A \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, A — *квазіциклічна p-група*, $|b| = |c| = p$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$.

2) $G = A \times H$, A — *квазіциклічна 2-група*, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$.

3) $G = (A \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$, A — *квазіциклічна 2-група*, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $d^{-1} a d = a^{-1}$ *для будь-якого елемента* $a \in A$, $[b, c] = [d, b] = [d, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$.

4) $G = (A \times H)\langle d \rangle$, A — *квазіциклічна 2-група*, $d^2 = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $d^{-1} a d = a^{-1}$ *для будь-якого елемента* $a \in A$, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $[d, h_1] = a_1$, $[d, h_2] = 1$.

При цьому $N_G = G$ *у випадках* 1 *і* 2, $N_G = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, *де* $a \in A$, $|a| = 4$ *у випадку* 3 *і* $N_G = \langle h_2 \rangle \leftthreetimes \langle h_1, a \rangle$, $|a| = 4$, $a \in A$ *у випадку* 4.

Доведення. *Необхідність.* Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. Якщо $|N_G| = \infty$, то з наслідку 1 та опису $\overline{H_p}$-груп (див. [10], теореми 1.2, 1.3) випливає, що $G = N_G$ і G є групою типів 1 або 2 теореми.

Тому далі будемо вважати, що $|N_G| < \infty$. За теоремою 1 та наслідком 3 $p = 2$ і G є скінченним розширенням квазіциклічної 2-групи A, причому $N_G \subseteq C = C_G(A)$. Оскільки $A \not\subset Z(G)$, то $[G : C] = 2$ і $G = C\langle d \rangle$, $d^2 \in C$. Елемент d індукує на підгрупі A нетотожний автоморфізм порядку 2, тому $d^{-1} a d = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$.

З наслідку 1 та умови $N_G \subseteq C$ випливає, що $N_C = C$, тому C — негамільтонова $\overline{H_2}$-група. Згідно з описом останніх (теорема 1.3 роботи [10]) C є групою одного з типів:

1) $G = (A \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, A — квазіциклічна 2-група, $|b| = |c| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$.

2) $G = A \times H$, A — квазіциклічна 2-група, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_1| = |h_2| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$.

Далі розглянемо кожен із зазначених випадків окремо.

Нехай C — група типу 1. Розглянемо фактор-групу $G/A = \overline{G} \cong \langle \overline{b}, \overline{c}, \overline{d} \rangle$, де $\overline{d^2} \in \langle \overline{b}, \overline{c} \rangle$ і $|\overline{d}| \leq 4$. Беручи до уваги недедекіндовість підгрупи N_G та умову $N_G \subseteq C$, вважаємо, що $\langle \overline{b}, \overline{c} \rangle = \overline{N_G}$. Тоді за лемою 1 з умови $[\overline{G} : \overline{N_G}] = 2$ випливає, що в $\overline{G}$ інваріантна будь-яка підгрупа, що не міститься у $\overline{N_G}$. Тому $\overline{G}$ — абелева група і $G' \subseteq A$.

Оскільки нижній шар $\omega(C)$ підгрупи C інваріантний у групі G, то $[\omega(C), G] \subseteq A \cap \omega(C) = \langle a \rangle \subseteq A$, $|a| = 4$. Враховуючи, що $a \in Z(C)$ та

$[\omega^2(C), G] = 1$, одержуємо $[\omega(C), G] \subseteq \langle a^2 \rangle = \langle a_1 \rangle$. Тому $B = \langle b, c \rangle \lhd G$, $[B, G] \subseteq \langle a_1 \rangle$ і за твердженням 1.3 роботи [10]

$$G = BC_G(B),$$

де $B \cap C_G(B) = \langle a_1 \rangle$.

Нехай $|\bar{d}| = 2$. Тоді $|d| \leq 4$. Якщо при цьому $|d| = 2$, то $[d, y] \neq 1$ для будь-якого нецентрального елемента $y \in B$. Справді, інакше $\langle d, y \rangle \lhd \langle d, y \rangle N_G$ і $[\langle y \rangle, N_G] \leq \langle d, y \rangle \cap N_G \leq \langle y \rangle$, що неможливо. Тому $[d, b] = [d, c] = a_1$ і G — група типу 3 теореми.

Нехай $|d| = 4$. Тоді, очевидно, $d^2 = a_1$ і якщо $d \in C_G(B)$, то $|dbc| = 2$. Замінюючи елемент d на dbc, знову дістаємо групу типу 3 теореми. Припустимо, що $d \notin C_G(B)$. Тоді існує така інволюція $x \in B$, що $[d, x] = a_1$. Звідси $|dx| = 2$ і, беручи замість d елемент dx та використовуючи міркування, наведені у попередньому абзаці, знову приходимо до групи типу 3.

Нехай $|\bar{d}| = 4$. Тоді $d^2 = a'y$, де $a' \in A$, $y \in B \backslash \langle a_1 \rangle$. Візьмемо такий елемент $x \in B$, що $[x, y] \neq 1$. Оскільки $[d, x] \in A \cap B = \langle a_1 \rangle$, то $[d^2, x] = 1$ всупереч співвідношенням $[d^2, x] = [y, x] \neq 1$. Випадок 1 розглянуто повністю.

Нехай C — група типу 2. Тоді $Z(G) \supseteq \langle a_1 \rangle \times \langle h^2 \rangle$, де $a_1 \in A$, $|a_1| = 2$.

Розглянемо фактор-групу $G/A = \bar{G} = \bar{H}\langle \bar{d} \rangle$, $\overline{d^2} \in \bar{H}$. З недедекіндовості підгрупи N_G випливає, що $\bar{H} = \overline{N_G}$. Тому за лемою 1 норма $N(\bar{G})$ групи $\bar{G}$ гамільтонова і за результатами Р. Бера [2] група $\bar{G}$ не містить елементів порядку 8. Отже $|\bar{d}| \leq 4$.

Якщо $|\bar{d}| = 2$, то $\langle \bar{d} \rangle \lhd \bar{G}$ і $\bar{G} = \bar{H} \times \langle \bar{d} \rangle$. Нехай $|\bar{d}| = 4$. Тоді $\overline{d^2} = \overline{h^2} \in \bar{H}$ і оскільки $\bar{G}' \subseteq \langle \bar{d} \rangle \cap \bar{H} = \left\langle \overline{h^2} \right\rangle$, то група $\bar{H}$ містить елемент $\bar{h}$ порядку 4, переставний з $\bar{d}$. Звідси $|\overline{dh}| = 2$ і $\bar{H} \subseteq N_{\bar{G}}(\langle \overline{dh} \rangle)$ за лемою 1. Отже, знову $\bar{G} = \bar{H} \times \left\langle \overline{d'} \right\rangle$, де $\overline{d'} = \overline{dh}$, $\left|\overline{d'}\right| = 2$.

З леми 3 та співвідношень $d^2 \in C$, $|\bar{d}| = 2$ випливає, що $|d| = 4$ і $\langle d \rangle \cap C = \langle a_1 \rangle \in A$. Звідси $A\langle d \rangle$ — нескінченна кватерніонна 2-група, оскільки $d^{-1}ad = a^{-1}$ для будь-якого елемента $a \in A$. Враховуючи, що $[H, \langle d \rangle] \subset A$ та $[H^2, \langle d \rangle] = 1$, дістаємо $[H, \langle d \rangle] \subseteq \langle a_1 \rangle$. Отже, $G = A\langle d \rangle \leftthreetimes H$ і G є групою типу 4 теореми.

Достатність. Якщо G є групою типу 1 або 2 теореми, то вона є $\overline{H_p}$-групою і тому $G = N_G$.

Нехай G — група типу 3 теореми. Доведемо, що її нециклічна норма збігається з групою $N = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$, де $|a| = 4$, $a \in A$.

Справді, оскільки

$$N_1 = N_G(\langle a_1, d \rangle) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle \leftthreetimes \langle d \rangle$$

і

$$N_2 = \left(N_G\langle a_1, a'd \rangle\right) = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle \leftthreetimes \langle a'd \rangle,$$

де a_1, $a' \in A$, $|a_1| = 2$, $|a'| > 4$, то $N_G \subseteq N_1 \cap N_2 = N = (\langle a \rangle \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle$. Враховуючи тепер, що кожна нециклічна підгрупа містить елемент a_1 та

$[G, N] \subseteq \langle a_1 \rangle$, робимо висновок, що N нормалізує кожну нециклічну підгрупу. Отже, $N_G = N$.

Нехай G — група типу 4 теореми. Зрозуміло, що $N_G \subseteq N = N_1 \cap N_2 = \langle h_2 \rangle \leftthreetimes \langle h_1 a \rangle$, де $N_1 = N_G(\langle h_1 d, h_2 \rangle) = \langle h_1 d, h_2, h_1 a \rangle$, $|a| = 4$, $a \in A$ та $N_2 = N_G(H) = A \times H$.

Враховуючи $[G, N] \subseteq \omega(G) = \langle h^2 \rangle \times \langle a^2 \rangle$, досить показати, що підгрупа N нормалізує всі кватерніонні 2-групи. Оскільки це очевидно для підгруп, що містяться в $C = A \times H$, то розглядати будемо лише ті, що підгрупі C не належать.

Нехай Q — кватерніонна 2-група, що містить елемент da_i, де $a_i \in A$, $|a_i| = 2^i$, $i \geq 0$. Оскільки $[\langle da_i, N \rangle] \subseteq \langle d^2 \rangle$, то $N \subseteq N_G(Q)$. Якщо Q містить елемент вигляду $dh_1 a_i$, то $Q = \langle dh_1 a_i, a_1^m h_2 \rangle$. Звідси з урахуванням співвідношення $[Q, N] \subseteq \langle h^2 \rangle \subset Q$ робимо висновок, що $N \subseteq N_G(Q)$. Оскільки інших кватерніонних 2-груп, що не містяться в C, немає, то N нормалізує кожну нециклічну підгрупу і $N = N_G$. Теорему доведено.

Теорема 4. *Нециклічна норма N_G нескінченної локально скінченної групи G нільпотентна ступеня не вище 2.*

Доведення. Припустимо, що всупереч твердженню теореми підгрупа N_G ненільпотентна. Тоді $|N_G| < \infty$ за теоремою 1.4 роботи [10]. З нескінченності групи G та теореми 1 випливає, що $G = AH$, де A — квазіциклічна група і $|H| < \infty$.

Оскільки $[N_G, A] \subseteq N_G$, то група $G_1 = N_G A$ локально нормальна. За лемою 3.1 роботи [12] $A \subseteq Z(G)$ і G_1 є $\overline{H}$-групою, що суперечить опису таких груп. Отже, підгрупа N_G нільпотентна.

Висновок про ступінь нільпотентності підгрупи N_G робимо на підставі теореми 1.4 роботи [10]. Теорему доведемо.

Наслідок 4. *Якщо нециклічна норма N_G локально скінченної групи G ненільпотентна, то G скінченна.*

Теорема 4 зводить вивчення нескінченних локально скінченних непримарних груп з недедекіндовою нециклічною нормою до груп, нециклічна норма яких є нільпотентною негамільтоновою $\overline{H}$-групою.

Теорема 5. *Нескінченні локально скінченні непримарні групи, що мають недедекіндову нециклічну норму N_G, локально нільпотентні та вичерпуються групами типів*:

1) $G = ((A \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle) \times \langle x \rangle$, *$A$ — квазіциклічна p-група*, $|b| = |c| = p$, $[b, c] = a_1 \in A$, $|a_1| = p$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $(|x|, p) = 1$.

2) $G = (A \times H) \times \langle x \rangle$, *$A$ — квазіциклічна 2-група*, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_2| = |h_1| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $(|x|, 2) = 1$.

3) $G = ((A \times \langle b \rangle) \leftthreetimes \langle c \rangle) \leftthreetimes \langle d \rangle \times \langle x \rangle$, *$A$ — квазіциклічна 2-група*, $|b| = |c| = |d| = 2$, $[b, c] = [d, c] = [d, b] = a_1 \in A$, $|a_1| = 2$, $[A, \langle c \rangle] = 1$, $d^{-1} a d = a^{-1}$ *для будь-якого елемента* $a \in A$, $(|x|, 2) = 1$.

4) $G = (A \times H) \langle d \rangle \times \langle x \rangle$, *$A$ — квазіциклічна 2-група*, $H = \langle h_1, h_2 \rangle$, $|h_2| = |h_1| = 4$, $h_1^2 = h_2^2 = [h_1, h_2]$, $|d| = 4$, $d^2 = a_1 \in A$, $d^{-1} a d = a^{-1}$ *для будь-якого елемента* $a \in A$, $[h_1, d] = a_1$, $[h_2, d] = 1$, $(|x|, 2) = 1$.

При цьому $G = N_G$ *у випадках* 1, 2, $N_G = (\langle a\rangle \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle \times \langle x\rangle$, $|a| = 4$, $a \in A$ *у випадку* 3 *і* $N_G = (\langle h_2\rangle \leftthreetimes \langle a h_1\rangle) \times \langle x\rangle$, $a \in A$, $|a| = 4$ *у випадку* 4.

Доведення. *Достатність* умов теореми випливає з доведення теореми 3. Доведемо їх *необхідність*.

Нехай G — досліджувана група і N_G — її нециклічна норма. За теоремою 1 G є скінченним розширенням квазіциклічної q-підгрупи A і $N_G \subseteq C = C_G(A)$. Якщо $|N_G| = \infty$, то з наслідку 1 випливає, що $G = N_G$ і G є групою типу 1 або 2 теореми.

Нехай $|N_G| < \infty$. За теоремою 4 підгрупа N_G нільпотентна, тому, враховуючи теорему 1.4 роботи [10], одержуємо $N_G = (N_G)_p \times \langle y\rangle$, де $(N_G)_p$ — негамільтонова $\overline{H_p}$-група, що є силовською p-підгрупою норми N_G і $(|y|, p) = 1$. Розглянемо групу $G_1 = (N_G)_p A$. Оскільки $N_G \subseteq C$, то за наслідком 1 G_1 є $\overline{H}$-групою. З опису останніх ([10], теореми 1.2 – 1.4) випливає, що $q = p$ і A — p-група.

Позначимо через G_p силовську p-підгрупу групи G і припустимо, що $p \neq 2$. За наслідком 1.13 роботи [12] $A \subseteq Z(G_p)$. Тому, використовуючи наслідок 1 та теорему 1.2 з [10], робимо висновок, що G_p є $\overline{H_p}$-групою типу

$$G_p = (A \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle, \quad |b| = |c| = p, \ \ A \subseteq Z(G_p), \ \ [b, c] = a_1, \ \ |a_1| = p.$$

Оскільки $G_p = A(N_G)_p$, то $G_p \lhd G$ і за узагальненою теоремою Шура $G = G_p \leftthreetimes G_{p'}$.

Доведемо, що підгрупа $G_{p'}$ циклічна. Справді, в протилежному випадку $G_{p'} \lhd G_1 = (N_G)_p \leftthreetimes G_{p'}$. Нехай g — довільний елемент підгрупи $(N_G)_p$. Тоді $\langle g, G_{p'}\rangle \lhd G_1$ і $\langle g\rangle \lhd G_1$ як характеристична підгрупа групи $\langle g, G_{p'}\rangle$. Зрозуміло, що $\langle g\rangle \lhd (N_G)_p$ і, всупереч умові, $(N_G)_p$ — дедекіндова група. Отже, $G = G_p \leftthreetimes \langle x\rangle$, де $\langle x\rangle$ — силовська p'-підгрупа групи G.

Враховуючи попередні міркування, одержуємо $G' \subseteq G_p \cap (A \leftthreetimes \langle x\rangle) = A$, звідки $[\omega(G_p), \langle x\rangle] \subseteq \omega(G_p) \cap A = \langle a_1\rangle$. За теоремою Машке $\langle a_1, b\rangle = \langle a_1\rangle \times \langle b_1\rangle$, $\langle a_1, c\rangle = \langle a_1\rangle \times \langle c_1\rangle$, де $\langle b_1\rangle$ і $\langle c_1\rangle$ — x-інваріантні підгрупи та $[b_1, x] = [c_1, x] = 1$. Оскільки $[b_1, c_1] = a_1$, то $a_1 \in Z(G)$ і за теоремою про централізатор повної абелевої групи (див., наприклад, [12], теорема 1.14) $A \subseteq Z(G)$ і $|N_G| = \infty$. Отже, при $p \neq 2$ нескінченних непримарних груп із вказаними обмеженнями на нециклічну норму не існує.

Нехай $p = 2$. Силовська 2-підгрупа G_2 групи G містить підгрупу $(N_G)_2$, тому її нециклічна норма також недедекіндова і G_2 — група одного з типів 1 – 4 теореми 3.

Якщо G_2 — група типу 1 або 2 цієї теореми, то $A \subseteq Z(G_2)$ і $A \subseteq Z(G)$, тому що $[G : C] \leq 2$. Але у такому випадку $A \subseteq N_G$ і $|N_G| = \infty$, всупереч припущенню.

Нехай G_2 — група типу 3 теореми 3. З умов $N_G \subseteq C$, $A \subseteq Z(C)$ та наслідку 1 випливає, що C — $\overline{H}$-група. Враховуючи теорему 1.4 з [10], робимо висновок, що $C = ((A \times \langle b\rangle) \leftthreetimes \langle c\rangle) \times \langle x\rangle$, де $(|x|, 2) = 1$.

Підгрупа $\langle x\rangle$ інваріантна у G як характеристична підгрупа централізатора C і є силовською $2'$-підгрупою групи G. Якщо $[d,x]=1$, то $x\in Z(G)$ і G є групою типу 3 цієї теореми. Нехай $[d,x]\neq 1$. Тоді $\langle x,d\rangle$ — нециклічна група і $N_G\subseteq N_G(\langle x,d\rangle)$. Неважко переконатися, що останнє співвідношення не має місця, тому що $[\omega((N_G)_2),\langle d\rangle]=\langle a_1\rangle\not\subset\langle x,d\rangle$. Отже, цей випадок неможливий.

Нехай G_2 — група типу 4 теореми 3. За цих умов централізатор C є групою типу $C=A\times H\times\langle x\rangle$, де $H=\langle h_1,h_2\rangle$ — група кватерніонів і $(|x|,2)=1$. Припустимо, що $[d,x]\neq 1$. Тоді $[d,x]\in\langle x\rangle$, оскільки $\langle x\rangle$ є характеристичною підгрупою групи $C\lhd G$. З недедекіндовості підгрупи $(N_G)_2$ та співвідношення $(N_G)_2\subseteq N_{G_2}=\langle h_2\rangle\leftthreetimes\langle h_1a\rangle$, $a\in A$, $|a|=4$ випливає, що $(N_G)_2=N_{G_2}$. Це неможливо, тому що $h_1a\notin N_G(\langle x\rangle\leftthreetimes\langle dh_2\rangle)$. Отже, $[d,x]=1$, $x\in Z(G)$ і G є групою типу 4 теореми. Теорему доведено.

1. *Baer R.* Der Kern, eine Charakteristische Untergruppe // Comp. Math. – 1934. – **1**. – S. 254–283.
2. *Baer R.* Zentrum und Kern von Gruppen mit Elementen Unendlicher Ordnung // Ibid. – 1935. – **2**. – S. 247–249.
3. *Kappe W.* Die A-Norm einer Gruppe // Ill. J. Math. – 1961. – **5**, № 2. – S. 187–197.
4. *Wielandt H.* Über der Normalisator der Subnormalen Untergruppen // Mat. Z. – 1958. – **69**, № 5. – S. 463–465.
5. *Kappe W.* E-Normen Endlicher Gruppen // Arch. Math. – 1968. – **19**, № 3. – S. 256–264.
6. *Лиман Ф. М., Лукашова Т. Д.* Про нескінченні групи з заданими властивостями норми нескінченних підгруп // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, № 5. – С. 625–630.
7. *Лиман Ф. Н.* О бесконечных группах, нециклическая норма которых имеет конечный индекс // Там же. – 1997. – **49**, № 5. – С. 678–684.
8. *Лиман Ф. М.* Групи з інваріантними нециклічними підгрупами // Доп. АН УРСР. – 1967. – № 12. – С. 1073–1075.
9. *Лиман Ф. Н.* 2-группы с инвариантными нециклическими подгруппами // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 1. – С. 75–83.
10. *Лиман Ф. М.* Групи з обмеженнями на нормалізатори різних систем підгруп // Деп. в ДНТБ України 24.11.97, № 577-Ук 97. – 293 с.
11. *Шунков В. П.* О локально конечных группах с условием минимальности для абелевых подгрупп // Алгебра и логика. – 1970. – **9**. – С. 579–615.
12. *Черников С. Н.* Группы с заданными свойствами системы подгрупп. – М.: Наука, 1980. – 384 с.

Одержано 13.11.00