УДК 517.95

В. Н. Павленко, В. В. Винокур (Челябин. гос. ун-т)

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ С НЕКОЭРЦИТИВНЫМИ РАЗРЫВНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

In the Hilbert space, we consider equations with a coercive operator equal to the sum of a linear Fredholm zero index map and a compact operator (generally speaking, discontinuous). By using the regularization and the theory of topological degree, we establish the existence of solutions that are points of continuity of the operator of equation. We apply general results in proving the existence of semiregular solutions of resonance elliptic boundary-value problems with discontinuous nonlinearities.

У гільбертовому просторі розглядаються рівняння з коерцитивним оператором, рівним сумі лінійного фредгольмова відображення нульового індексу та компактного оператора (взагалі кажучи, розривного). За допомогою регуляризації та теорії топологічного степеня встановлюється існування розв'язків, які є точками неперервності оператора рівняння. Загальні результати застосовуються потім для доведення існування напівправильних розв'язків резонансних еліптичних крайових задач з розривними нелінійностями.

1. Введение. В гильбертовом пространстве H рассматриваются уравнения вида

$$Au + Tu = f, \tag{1.1}$$

где $A : H \to H$ — линейное фредгольмово отображение нулевого индекса, что означает замкнутость области значений $R(A)$ оператора A, конечномерность ядра $\ker A$ и равенство размерностей $\ker A$ и $\ker A^*$; оператор $T : H \to H$ компактный (возможно, разрывный) и удовлетворяет условию

$$Tu / \| u \| \to 0 \quad \text{при} \quad \| u \| \to +\infty, \tag{1.2}$$

$f \in H$. Дополнительно предполагается, что оператор A принадлежит классу $(S)_+$ [1], т. е. для произвольной последовательности $(u_n) \subset H$ из $u_n \rightharpoonup u_0$ и

$$\limsup_{n \to \infty} (Au_n, u_n - u_0) \le 0 \tag{1.3}$$

следует сильная сходимость (u_n) к u_0 в H. Через (x, y) обозначается скалярное произведение элементов x, y из H.

***Определение* 1.1.** *Пусть B — линейный ограниченный оператор из H в H. Последовательность $(u_k) \subset H$ будем называть B-последовательностью, если $\| u_k \| \to \infty$, $\| u_k \|^{-1} \cdot u_k \to v \in \ker B$.*

***Определение* 1.2.** *Будем говорить, что для элемента $f \in H$ в уравнении (1.1) выполнено условие* i): *если существует линейный изоморфизм M между $\ker A$ и $\ker A^*$ такой, что для любой A-последовательности $(u_k) \subset$ $\subset H$ имеет место неравенство*

$$\limsup_{k \to \infty} (Tu_k, Mv) > (f, Mv), \tag{1.4}$$

или же для каждой A-последовательности

$$\liminf_{k \to \infty} (Tu_k, Mv) < (f, Mv), \tag{1.5}$$

где v — предел последовательности $\| u_k \|^{-1} \cdot u_k$.

При сделанных выше предположениях относительно A и T, если элемент f в уравнении (1.1) удовлетворяет условию i), то с помощью регуляризации уравнения (1.1) и теории топологической степени для многозначных компактных векторных полей устанавливается существование $u \in H$, удовлетворяющего включению

$$f - Au \in STu, \tag{1.6}$$

где ST — секвенциальное замыкание оператора T [2]: для любого $u \in H$ множество STu совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой множества слабо предельных точек для последовательностей вида (Tu_n), $u_n \to u$. Найдены условия на точки разрыва оператора T, при выполнении которых включение (1.6) влечет для u справедливость равенства (1.1) и непрерывность T в точке u.

Полученные общие теоремы применяются к исследованию резонансных краевых задач для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями. Термин „резонансная краевая задача" означает, что в ее естественной операторной постановке (1.1) ядро оператора A ненулевое и отображение $A + T$ некоэрцитивное. Устанавливаются предложения типа Ландесмана–Лазера [1, с. 52–54] о существовании полуправильных решений [3] таких задач.

Для уравнений с разрывными операторами проблема существования решений, на которых оператор уравнения непрерывен, изучалась в совместных работах М. А. Красносельского с его учениками А. В. Покровским и А. В. Лусниковым [3–5] для уравнений с монотонными отображениями в полуупорядоченных пространствах и работах В. Н. Павленко [6–9] методом монотонных операторов, а в [10–12] — вариационным методом. В отличие от перечисленных исследований в данной работе не предполагается ни монотонность, ни квазипотенциальность, ни коэрцитивность оператора уравнения.

Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью исследовались многими авторами. Наиболее общие результаты получены вариационным методом в [13] и методом верхних и нижних решений в [14–18]. В этих работах вопрос о существовании полуправильных решений исследуемых краевых задач не рассматривался. Кроме того, в отличие от [13] в данной статье не требуется самосопряженность оператора, порождаемого дифференциальной частью уравнения и граничным условием, а по сравнению с [14–16] — не предполагается монотонность нелинейности по фазовой переменной s после добавления слагаемого $M \cdot s$ с достаточно большой константой M и существование упорядоченной пары верхнего и нижнего решения краевой задачи. В [17, 18] метод верхних и нижних решений применяется к исследованию основных краевых задач для уравнений эллиптического типа с разрывной нелинейностью, равной разности неубывающих по фазовой переменной функций. В данной работе такое ограничение на нелинейность не налагается.

2. Общие результаты. Пусть Q — отображение из гильбертова пространства H в H.

Определение 2.1. *Элемент $u \in H$ называется сильно регулярной точкой для оператора Q, если существует $h \in H$ такой, что*

$$\limsup_{v \to 0} (Q(u+v), h) < 0. \tag{2.1}$$

Замечание 2.1. Если для некоторого $h \in H$

$$\liminf_{v \to 0} (Q(u+v), h) > 0,$$

то u — сильно регулярная точка отображения Q.

Определение 2.2. *Элемент $u \in H$ называется точкой разрыва оператора Q, если найдутся последовательность $(u_n) \subset H$, сильно сходящаяся к u, и вектору $y \in H$ такие, что (Qu_n, y) не сходится к (Qu, y), т. е. u не является точкой деминепрерывности оператора Q.*

Основной результат данного пункта состоит в следующей теореме.

Теорема 2.1. *Пусть выполняются следующие условия:*

1) *линейный оператор $A: H \to H$ (H — гильбертово пространство) фредгольмов нулевого индекса и принадлежит классу $(S)_+$;*

2) *отображение* $T: H \to H$ *компактное и удовлетворяет условию* (1.2);

3) *для элемента* $f \in H$ *выполнено условие* i).

Тогда существует $u_0 \in H$, *удовлетворяющее включению* (1.6). *Если дополнительно предположить, что точки разрыва оператора* $Qu = Au + Tu - f$ *сильно регулярные, то* u_0 — *решение уравнения* (1.1) *и точка непрерывности оператора* T.

Лемма 2.1. *Предположим, что отображение* $T: H \to H$ *компактное,* f *удовлетворяет условию* i) *с неравенством* (1.4) *или* (1.5) *и выполнено условие* 1 *теоремы* 2.1. *Тогда для произвольной* A*-последовательности* (u_k) *и последовательности* (g_k), $g_k \in STu_k$, *выполняется неравенство*

$$\limsup_{k \to \infty} (g_k, Mv) > (f, Mv) \tag{2.2}$$

или соответственно

$$\liminf_{k \to \infty} (g_k, Mv) < (f, Mv), \tag{2.3}$$

где ST — *секвенциальное замыкание оператора* T, M — *линейный изоморфизм между* $\ker A$ *и* $\ker A^*$.

Доказательство леммы 2.1. Множество $T_s(u) = \{ z \in H : \exists (u_k) \subset H$ такая, что $u_k \to u$, $Tu_k \to z\}$ в силу компактности оператора T совпадает с множеством $T_s(u) = \{ z \in H : \exists (u_k) \subset H$, для которой $u_k \to u$, $Tu_k \longrightarrow z \}$. Поэтому STu совпадает с замкнутой выпуклой оболочкой $\overline{\mathrm{co}}\, T_s(u)$ множества $T_s(u)$. Пусть $(u_k) \subset H$ — A-последовательность, $\|u_k\|^{-1} \cdot u_k \to v$ и $g_k \in T_s u_k$. По определению $T_s(u)$ существуют последовательности $u_{nk} \to u_k$, $k \in \mathbb{N}$, такие, что $Tu_{nk} \to g_k$ при $n \to \infty$. Отсюда следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $n(k) \in \mathbb{N}$, для которого $\left\| u_{n(k)k} - u_k \right\| < k^{-1}$ и

$$\left\| Tu_{n(k)k} - g_k \right\| < k^{-1}. \tag{2.4}$$

Так как

$$\left\| u_{n(k)k} \right\| \geq \|u_k\| - \left\| u_{n(k)k} - u_k \right\| \geq \|u_k\| - \frac{1}{k},$$

то

$$\left\| u_{n(k)k} \right\| \to +\infty.$$

Из неравенств

$$1 - \frac{\left\| u_k - u_{n(k)k} \right\|}{\left\| u_{n(k)k} \right\|} \leq \frac{\|u_k\|}{\left\| u_{n(k)k} \right\|} \leq 1 + \frac{\left\| u_k - u_{n(k)k} \right\|}{\left\| u_{n(k)k} \right\|}$$

и равенства

$$\frac{u_{n(k)k}}{\left\| u_{n(k)k} \right\|} = \frac{u_{n(k)k} - u_k}{\left\| u_{n(k)k} \right\|} + \frac{u_k}{\|u_k\|} \cdot \frac{\|u_k\|}{\left\| u_{n(k)k} \right\|}$$

следует сильная сходимость $u_{n(k)k} / \left\| u_{n(k)k} \right\|$ к v. Согласно свойству i)

$$\limsup_{k \to \infty} \left(T(u_{n(k)k}), Mv \right) > (f, Mv) \qquad \left(\liminf_{k \to \infty} \left(T(u_{n(k)k}), Mv \right) < (f, Mv) \right).$$

Отсюда и из (2.4) получаем

$$\limsup_{k\to\infty}(g_k, Mv) = \limsup_{k\to\infty}\left(T(u_{n(k)k}), Mv\right) > (f, Mv) \tag{2.5}$$

$$\left(\liminf_{k\to\infty}(g_k, Mv) = \liminf_{k\to\infty}\left(T(u_{n(k)k}), Mv\right) < (f, Mv)\right). \tag{2.6}$$

Таким образом доказано, что для любой A-последовательности $(u_k) \in H$ и последовательности (g_k) с $g_k \in T_s(u_k)$ верно (2.5) ((2.6)).

Зафиксируем A-последовательность $(u_k) \subset H$, $\|u_k\|^{-1} \cdot u_k \to v$ и докажем существование $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ таких, что для любого $k > k_0$ при произвольном выборе $g_k \in T_s u_k$ имеет место неравенство

$$(g_k, Mv) > (f, Mv) + \varepsilon \quad ((g_k, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon).$$

Допустим противное, тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует $g_{n(k)} \in T_s u_{n(k)}$ таких, что верно неравенство

$$(g_{n(k)}, Mv) \le (f, Mv) + \frac{1}{k} \quad \left((g_{n(k)}, Mv) \ge (f, Mv) - \frac{1}{k}\right),$$

откуда, в свою очередь

$$\limsup_{k\to\infty}\left(g_{n(k)}, Mv\right) \le (f, Mv) \quad \left(\liminf_{k\to\infty}\left(g_{n(k)}, Mv\right) \ge (f, Mv)\right).$$

Но это противоречит доказанному выше неравенству (2.5) ((2.6)) применительно к последовательностям $(u_{n(k)})$ и $(g_{n(k)})$.

Предположим, что дана A-последовательность $(u_k) \subset H$, $\|u_k\|^{-1} \cdot u_k \to v$ и $g_k \in \operatorname{co} T_s(u_k)$. Тогда

$$g_k = \sum_{j=1}^{n(k)} \alpha_{jk} g_{jk}, \quad g_{jk} \in T_s(u_k), \quad \alpha_{jk} \ge 0$$

и

$$\sum_{j=1}^{n(k)} \alpha_{jk} = 1.$$

Как показано выше, существуют $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$ такие, что для любого $k > k_0$

$$(g_{jk}, Mv) > (f, Mv) + \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, n(k)$$

$$((g_{jk}, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon, \quad j = 1, \ldots, n(k)).$$

Поэтому для произвольного $k > k_0$

$$(g_k, Mv) = \sum_{j=1}^{n(k)} \alpha_{jk}\left(g_{jk}, Mv\right) > (f, Mv) + \varepsilon \quad ((g_k, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon).$$

Отсюда заключаем, что

$$\limsup_{k\to\infty}(g_k, Mv) \ge (f, Mv) + \varepsilon, \tag{2.7}$$

$$\liminf_{k\to\infty}(g_k, Mv) \le (f, Mv) - \varepsilon. \tag{2.8}$$

Пусть, наконец, дана A-последовательность $(u_k) \subset H$, $\|u_k\|^{-1} \cdot u_k \to v$ и $g_k \in$ $\in STu_k = \overline{\operatorname{co}}\, T_s(u_k)$. Тогда для любого натурального k существует последовательность $(g_{nk}) \subset \operatorname{co} T_s u_k$ такая, что $g_{nk} \to g_k$ при $n \to \infty$. Выше установлено существование $k_0 \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon > 0$, для которых

$$(g_{nk}, Mv) > (f, Mv) + \varepsilon \quad \forall k > k_0 \qquad ((g_{nk}, Mv) < (f, Mv) - \varepsilon \quad \forall k > k_0),$$

что немедленно влечет (2.7) ((2.8)). Лемма 2.1 доказана.

Лемма 2.2. *Отображение* $Q : H \to H$ *локально ограниченное и для некоторых* $u, h \in H$ *выполняется неравенство* (2.1). *Тогда для любого* $y \in SQ(u)$ *верно неравенство*

$$(y, h) < 0, \tag{2.9}$$

где SQ — *секвенциальное замыкание оператора* Q.

Доказательство леммы 2.2. *Пусть* $Q_w = \{ z \in H : \exists (u_k) \subset H$ такая, что $u_k \to u,\ Tu_k \rightharpoonup z \}$. *Тогда* $SQu = \overline{\mathrm{co}} Q_w(u)$. *Из* (2.1) *следует существование положительных* ε *и* δ *таких, что*

$$(Q(u+v), h) < -\varepsilon \tag{2.10}$$

для любого $v \in H$ с $\|v\| < \delta$. Если $y \in Q_w(u)$, то существует последовательность $(u_k) \subset H$ сильно сходящаяся к u, для которой $Qu_k \rightharpoonup y$. Отсюда и из (1.10) следует неравенство $(y, h) \le -\varepsilon$. Пусть $y \in \mathrm{co}\, Q_w(u)$. Тогда

$$y = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k y_k, \quad y_k \in Q_w(u), \qquad \alpha_k \ge 0 \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1.$$

Отсюда следует

$$(y, h) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (y_k, h) \le \sum_{k=1}^{n} \alpha_k (-\varepsilon) = -\varepsilon. \tag{2.11}$$

Наконец, если $y \in SQu$, то существует последовательность $(y_n) \subset \mathrm{co}\, Q_w(u)$, сильно сходящаяся к y. Так как в силу (2.11) $(y_n, h) \le -\varepsilon \ \forall n \in \mathbb{N}$, то в пределе при $n \to \infty$ получаем $(y, h) \le -\varepsilon$. Лемма 2.2 доказана.

Доказательство теоремы 2.1. Пусть P — ортопроектор H на $\ker A$, $C = MP$, M — линейный изоморфизм между $\ker A$ и $\ker A^*$ из условия i). Тогда, если $v \in \ker A$, то

$$(Cv, Mv) = (MPv, Mv) = (Mv, Mv) = (v, v) = \|v\|^2. \tag{2.12}$$

Рассмотрим оператор $B_\varepsilon = A + \varepsilon C$, $\varepsilon \ne 0$, и установим его непрерывную обратимость. Заметим, что $R(C) = \ker A^*$ и пространство H равно сумме ортогональных замкнутых подпространств $R(A)$ и $\ker A^*$. Поэтому из равенства $B_\varepsilon u = 0$ вытекает $u \in \ker A$ и $Cu = 0$, что в силу (2.12) возможно только для $u = 0$. Следовательно, отображение B_ε инъективно. Пусть $v \in H$. Покажем, что уравнение

$$B_\varepsilon u = v, \tag{2.13}$$

имеет решение. Элемент v однозначно представим в виде $v = v_1 + v_2$, где $v_1 \in R(A)$, $v_2 \in \ker A^*$, и уравнение (2.13) эквивалентно системе

$$\begin{aligned} Au &= v_1, \\ \varepsilon C u &= v_2. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Так как $v_2 \cdot \varepsilon^{-1} \in \ker A^*$, а $R(C) = \ker A^*$, то существует $u_2 \in \ker A$, для которого $\varepsilon C u_2 = v_2$. Из принадлежности $v_1 \in R(A)$ следует существование $y \in H$ такого, что $Ay = v_1$. Пусть $u_1 = y - Py$; тогда $u_1 \in R(A)$ и $Au_1 = v_1$. Элемент $u = u_1 + u_2$ удовлетворяет (2.14). Таким образом, сюръективность B_ε

установлена. Согласно теореме Банаха об обратном операторе отображение B_ε непрерывно обратимо. Отсюда следует существование постоянной K_ε такой, что

$$\| B_\varepsilon u \| \geq K_\varepsilon \| u \| \quad \forall u \in H. \tag{2.15}$$

Рассмотрим включение

$$-B_\varepsilon u \in STu - f, \tag{2.16}$$

где ST — секвенциальное замыкание T, $\varepsilon \neq 0$ фиксировано, $f \in H$. Оно равносильно включению

$$u \in B_\varepsilon^{-1}(f - STu) \equiv \Phi_\varepsilon(u). \tag{2.17}$$

В силу (1.2) найдется $R > 0$ такое, что $\| Tu \| < 2^{-1} \cdot K_\varepsilon \cdot \| u \|$, если $\| u \| \geq R$, и $2^{-1} \cdot K_\varepsilon (R+1) > \| f \|$. Отсюда по определению секвенциального замыкания для любого $u \in H$ с $\| u \| = R + 1$ и произвольного $g \in STu$ имеем $\| g \| \leq$ $\leq 2^{-1} \cdot K_\varepsilon \cdot (R+1)$, и значит,

$$\| B_\varepsilon u + g - f \| \geq \| B_\varepsilon u \| - \| g \| - \| f \| \geq K_\varepsilon (R+1) - 2^{-1} K_\varepsilon (R+1) - \| f \| =$$

$$= 2^{-1} K_\varepsilon (R+1) - \| f \| > 0. \tag{2.18}$$

Последнее равносильно тому, что на сфере $S_{R+1} = \{ u \in H \mid \| u \| = R + 1 \}$ отображение Φ_ε не имеет неподвижных точек. Кроме того, Φ_ε на шаре $U_{R+1} =$ $= \{ u \in H \mid \| u \| \leq R + 1 \}$ компактно [19], т. е. его значения — непустые компактные выпуклые множества, Φ_ε полунепрерывно сверху на U_{R+1} и $R(\Phi_\varepsilon) =$ $= \bigcup \{ \Phi_\varepsilon(x) : x \in U_{R+1} \}$ предкомпактно в H. Действительно, значения ST — непустые компактные выпуклые множества, отображение ST замкнуто [20] и многозначный оператор ST переводит ограниченные множества в предкомпактные (наличие перечисленных свойств у ST влечет полунепрерывность сверху этого отображения [21]), а линейный оператор B_ε^{-1} непрерывный. Таким образом, $I - \Phi_\varepsilon$ — многозначное компактное векторное поле из $C(S_{R+1},$ $U_{R+1}, 0)$ [19], I — тождественный оператор в H. Отображение $h_\varepsilon(u, t) = (1 -$ $- t)(u - \Phi_\varepsilon(u)) + tu$, $t \in [0, 1]$, — гомотопия в $C(S_{R+1}, U_{R+1}, 0)$ [19]. В противном случае для некоторого $t \in (0, 1)$ найдется $u \in S_{R+1}$, для которого $0 \in$ $\in h_\varepsilon(u, t)$, т. е. существует $g \in STu$ такое, что

$$u = (1-t) B_\varepsilon^{-1}(f - g) \Leftrightarrow B_\varepsilon u + (1-t)(g - f) = 0.$$

С другой стороны, в силу (2.18)

$$\| B_\varepsilon u + (1-t)(g - f) \| \geq \| B_\varepsilon u \| - (1-t) \| g - f \| \geq \| B_\varepsilon u \| - \| g \| - \| f \| > 0.$$

Получено противоречие. Так как $h_\varepsilon(u, 0) = u - \Phi_\varepsilon(u)$, $h_\varepsilon(u, 1) = u$, то векторные поля $I - \Phi_\varepsilon$ и I гомотопны в $C(S_{R+1}, U_{R+1}, 0)$. Последнее влечет равенство топологических степеней [19]

$$d(U_{R+1}, 0, I - \Phi_\varepsilon) = d(U_{R+1}, 0, I) = 1.$$

Отсюда заключаем, что существует $u \in U_{R+1}$, удовлетворяющее включению $u \in \Phi_\varepsilon(u)$ [19]. Таким образом, для любого $\varepsilon \neq 0$ включение (2.16) имеет решение.

Предположим, что элемент $f \in H$ удовлетворяет условию i). Возьмем числовую последовательность $\varepsilon_k \to 0+$, если в условиях i) фигурирует неравенство (1.4), и $\varepsilon_k \to 0-$ при наличии в условии i) неравенства (1.5). Как показано выше, для любого натурального k существуют $u_k \in H$ и $g_k \in STu_k$ такие, что

$$Au_k + \varepsilon_k Cu_k + g_k = f. \tag{2.19}$$

Покажем, что последовательность (u_k) ограничена в H. Допустим противное. Тогда существует последовательность (u_{nk}) последовательности (u_k), для которой $\|u_{nk}\| \to +\infty$. Будем далее обозначать ее через (u_k). Рассмотрим последовательность $v_k = \|u_k\|^{-1} \cdot u_k$. Тогда $\|v_k\| = 1$ и, следовательно, можно выделить слабо сходящуюся подпоследовательность из (v_k). Обозначим эту подпоследовательность через (v_k), а ее слабый предел — через v. Поделим обе части (2.19) на $\|u_k\|$. Получаем

$$Av_k = -\varepsilon_k Cv_k - \frac{g_k}{\|u_k\|} + \frac{f}{\|u_k\|} \to 0$$

при $k \to +\infty$, поскольку $\|Cv_k\| \le \|v_k\|$ и в силу (1.2) $g_k \cdot \|u_k\|^{-1} \to 0$. Отсюда следует

$$\lim_{k\to\infty}(Av_k, v_k - v) = 0.$$

Отсюда заключаем, что $v_k \to v$, так как оператор A принадлежит классу $(S)_+$. Поскольку $Av_k \to Av$, то $v \in \ker A$. В силу предположения i) и леммы 1.1 выполняется неравенство (2.2) ((2.3)). С другой стороны, из (2.19) имеем

$$(g_k, Mv) = (f, Mv) - \varepsilon_k(Cu_k, Mv) - (Au_k, Mv) =$$

$$= (f, Mv) - \varepsilon_k \cdot \|u_k\| \cdot (Cv_k, Mv)$$

(Au_k и Mv ортогональны!). Отсюда следует

$$\limsup_{k\to\infty}(g_k, Mv_k) \le (f, Mv) \quad \left(\liminf_{k\to\infty}(g_k, Mv) \ge (f, Mv)\right),$$

поскольку согласно (2.12)

$$\lim_{k\to\infty}(Cv_k, Mv) = (Cv, Mv) = \|v\|^2 = 1.$$

Полученное неравенство противоречит (2.2) ((2.3)). Ограниченность последовательности (u_k) установлена. Не умаляя общности, можно считать, $u_k \rightharpoonup u$, $g_k \to g$ (последнее следует из компактности T). Докажем сильную сходимость (u_k) к u. Из (2.19) делаем заключение о сильной сходимости (Au_k) к $f - g$. Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}(Au_k, u_k - u) = 0.$$

Отсюда и из принадлежности A к классу $(S)_+$ следует, что $u_k \to u$. Так как $g_k \to g$ и отображение ST замкнуто [20], то $g \in STu$. Переходя в (2.19) к пределу при $k \to \infty$, получаем

$$Au + g = f, \tag{2.20}$$

что равносильно включению (1.6).

Если дополнительно предположить, что точки разрыва оператора $Av + Tv - f$ регулярны, то u, удовлетворяющее (2.20) с $g \in STu$, — точка непрерывности оператора T. В противном случае существует $h \in H$, для которого выполняется неравенство (2.1) и согласно лемме 2.2 $(Au + g - f, h) < 0$, что противоречит (2.20). Для точки непрерывности u оператора T значение STu совпадает с Tu и в этом случае (1.6) совпадает с (1.1). Теорема 2.1 доказана.

3. Приложения. Изучается вопрос о существовании решений краевых задач вида

$$Lu + g(x, u) = r(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.1}$$

$$Bu|_\Gamma = 0, \tag{3.2}$$

где

$$Lu(x) = -\sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x)u_{x_j} + c(x)u(x)$$

— равномерно эллиптический дифференциальный оператор в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с границей Γ класса $C_{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1]$ [22, с. 23], его коэффициенты $a_{ij}, b_j \in C_{1,\alpha}(\overline{\Omega})$, $c \in C_{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ на $\overline{\Omega}$; (3.2) — одно из основных краевых условий: либо условие Дирихле $u|_\Gamma = 0$; либо условие Неймана $\left.\frac{\partial u}{\partial n_L}\right|_\Gamma = 0$ с конормальной производной

$$\frac{\partial u}{\partial n_L} \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_i} \cos(n, x_j),$$

n — внешняя нормаль к границе Γ, $\cos(n, x_j)$ — направляющие косинусы n; либо третье краевое условие

$$\frac{\partial u}{\partial n_L} + \sigma(x)u|_\Gamma = 0,$$

$\sigma \in C_{1,\alpha}(\Gamma)$ неотрицательна и не равна тождественно нулю на Γ; нелинейность $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ суперпозиционно измерима и для почти всех $x \in \Omega$ сечение $g(x, \cdot)$ имеет на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода и $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$,

$$g_-(x, u) = \liminf_{\eta \to u} g(x, \eta), \qquad g_+(x, u) = \limsup_{\eta \to u} g(x, \eta);$$

$$r \in \mathbf{L}_q(\Omega), \quad q > 2n \cdot (n+2)^{-1}.$$

Последнее неравенство обеспечивает компактное вложение соболевского пространства $H^1(\Omega)$ в $\mathbf{L}_p(\Omega)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Кроме того, предполагается, что задача

$$\begin{cases} Lu = 0, & x \in \Omega, \\ Bu|_\Gamma = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

имеет ненулевое решение, а для нелинейности g для почти всех $x \in \Omega$ справедлива оценка

$$|g(x, u)| \le a(x) \quad \forall u \in \mathbb{R}, \tag{3.4}$$

где a — некоторая функция из $\mathbf{L}_q(\Omega)$.

Определение 3.1. *Сильным решением задачи* (3.1), (3.2) *называется функция* $u \in W_q^2(\Omega)$, *удовлетворяющая для почти всех* $x \in \Omega$ *уравнению* (3.1), *для которой след* Bu *на границу* Γ *равен нулю.*

Определение 3.2. *Сильное решение задачи* (3.1), (3.2) *называется полуправильным, если для почти всех* $x \in \Omega$ *значения* $u(x)$ *являются точками непрерывности сечения* $g(x, \cdot)$.

Приведем операторную постановку задачи (3.1), (3.2). Пусть гильбертово пространство H совпадает с соболевским пространством $\mathring{H}^1(\Omega)$ в случае граничного условия Дирихле и с $H^1(\Omega)$, если (3.2) — условие Неймана или третье краевое условие. Дифференциальный оператор L и граничное условие (3.2) порождают оператор $A : H \to H$, определяемый равенством

$$(Au, v) = \int\limits_{\Omega} \left(\sum_{i, j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) u_{x_j} \cdot v + a(x) \cdot u(x) v \right) dx \equiv$$

$$\equiv a(u, v) \;\; \forall\, u, v \in H$$

для первого и второго краевого условия, а если (3.2) — третье краевое условие, то равенством

$$(Au, v) = a(u, v) + \int\limits_{\Gamma} \sigma(y) u(y) \cdot v(y) dS \quad \forall\, u, v \in H.$$

Поскольку оператор L равномерно эллиптический, то равенства

$$(u, v)_0 = \sum_{i, j=1}^{n} \int\limits_{\Omega} a_{ij}(x) u_{x_i} v_{x_j}\, dx \quad \forall\, u, v \in \mathring{H}^1(\Omega),$$

$$(u, v)_1 = (u, v)_0 + \int\limits_{\Omega} u \cdot v dx \quad \forall\, u, v \in H^1(\Omega)$$

задают на пространствах $\mathring{H}^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ соответственно скалярные произведения, причем порожденные ими нормы эквивалентны нормам этих пространств. Зафиксируем на пространствах $\mathring{H}^1(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ скалярные произведения $(\cdot, \cdot)_0$, $(\cdot, \cdot)_1$ и порожденные ими нормы. Тогда оператор A равен сумме тождественного оператора I и линейного компактного K. Следовательно, A фредгольмов нулевого индекса [23] и принадлежит классу $(S)_+$. Докажем последнее.

Пусть $u_n \rightharpoonup u_0$ в H и

$$\limsup_{n \to \infty} (Au_n, u_n - u_0) \le 0. \tag{3.5}$$

Имеем

$$(Au_n, u_n - u_0) = ((I + K)u_n, u_n - u_0) = \|u_n - u_0\|^2 + (u_0, u_n - u_0) + (Ku_n, u_n - u_0).$$

Так как K компактный, то $(Ku_n, u_n - u_0) \to 0$. Поэтому

$$\limsup_{n \to \infty} (Au_n, u_n - u_0) = \limsup_{n \to \infty} \|u_n - u_0\|^2.$$

Отсюда и из (3.5) следует сильная сходимость (u_n) к u_0.

Нелинейность $g(x, u)$ в уравнении (3.1) порождает оператор $T : H \to H$, определяемый равенством

$$(Tu, v) = \int\limits_{\Omega} g(x, u(x)) v(x) dx \quad \forall u, v \in H.$$

Заметим, что

$$T = \Psi J^* G J, \tag{3.6}$$

где $Gu = g(x, u(x))\ \forall\, u \in \mathbf{L}_p(\Omega)$ как оператор из $\mathbf{L}_p(\Omega)$ в $\mathbf{L}_q(\Omega)$ $(p^{-1} + q^{-1} = 1)$ в силу (3.4) ограничен на $\mathbf{L}_p(\Omega)$ ($\|Gu\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \le \|a\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)}\ \forall\, u \in \mathbf{L}_p(\Omega)$, a — функция в оценке (3.4)), J — оператор вложения H^1 в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ (он компактен, так как $q > 2n/(n+2)$), Ψ — естественный изоморфизм между H и H^*. Отсюда следует компактность оператора T и его ограниченность на H. Последнее влечет выполнимость условия (1.2) для T. Функция $r \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ в уравнении (3.1) порождает элемент $f \in H$, определяемый равенством

$$(v, f) = \int_\Omega r(x) \cdot v(x)\, dx \quad \forall\ v \in H.$$

Таким образом, мы приходим к операторному уравнению (1.1), причем существование решения $u \in H$ уравнения (1.1) равносильно тому, что u — обобщенное решение задачи (3.1), (3.2) в смысле выполнения интегрального тождества [22]:

$$(Au + Tu, v) = (v, f)\ \forall\ v \in H. \tag{3.7}$$

Отображение $Qv = Av + Tv - f$ будем называть оператором краевой задачи (3.1), (3.2). Так как $r \in \mathbf{L}_q(\Omega)$ и $q > 2n \cdot (n+2)^{-1}$, то из теорем о регулярности обобщенных решений эллиптических краевых задач [24] следует, что функция u, удовлетворяющая (3.7), принадлежит $W_q^2(\Omega)$ и является сильным решением задачи (3.1), (3.2). Отсюда заключаем, что существование сильного решения задачи (3.1), (3.2) равносильно существованию решения (1.1) при соответствующем выборе пространства H, операторов A, T и элемента f.

Лемма 3.1. *Если* $u \in H$ *— решение уравнения* (1.1), *являющееся точкой непрерывности оператора* T, *то* u *— полуправильное решение задачи* (3.1), (3.2).

Доказательство. Достаточно доказать, что для любой точки непрерывности оператора T мера множества $\omega = \{x \in \Omega \mid g(x, u(x)-) \ne g(x, u(x)-)\}$ равна нулю, где

$$g(x, v\pm) = \lim_{\eta \to v\pm} g(x, \eta)$$

— односторонние пределы $g(x, \cdot)$ в точке v. Допустим, что это не так. Тогда найдется $\varepsilon > 0$ такое, что хотя бы одно из множеств

$$\omega_\varepsilon^+ = \{x \in \Omega \mid g(x, u(x)+) - g(x, u(x)-) > \varepsilon\},$$

$$\omega_\varepsilon^- = \{x \in \Omega \mid g(x, u(x)+) - g(x, u(x)-) < -\varepsilon\}$$

имеет ненулевую меру. Пусть для определенности $\operatorname{mes} \omega_\varepsilon^+ = d > 0$. Так как функция a в оценке (3.4) суммируема на Ω, то существует $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого множества $e \subset \Omega$, мера которого меньше δ, верно неравенство

$$\int_l a(x)\, dx < 8^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d. \tag{3.8}$$

Существует замкнутое множество $F \subset \omega_\varepsilon^+$, мера которого больше $d \cdot 2^{-1}$, и открытое $D \supset F$, $\overline{D} \subset \Omega$ такие, что $\operatorname{mes}(D \setminus F) < \delta$ [6]. Пусть $h \in C^\infty(\Omega)$ равна единице на F, нулю вне D и $0 \le h \le 1$ на $D \setminus F$. Тогда $h \in H$ и

$$\lim_{t \to 0+} (T(u+th), h) - \lim_{t \to 0-} (T(u+th), h) =$$

$$= \lim_{t \to 0+} \int_\Omega g(x, u(x)+th(x)) \cdot h(x)dx - \lim_{t \to 0-} \int_\Omega g(x, u(x)+th(x)) \cdot h(x)dx =$$

$$= \int_\Omega \left(\lim_{t \to 0+} g(x, u(x)+th(x)) - \lim_{t \to 0-} g(x, u(x)+th(x)) \right) \cdot h(x)dx \geq$$

$$\geq \int_F (g(x, u(x)+) - g(x, u(x)-))dx - 2\int_{D \setminus F} a(x)dx > 2^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d - 4^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d = 4^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d$$

(воспользовались оценками (3.4), (3.8), выбором множеств F, D и теоремой Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла). Полученное неравенство противоречит непрерывности T в точке u. Случай $\operatorname{mes} \omega_\varepsilon^-$ рассматривается аналогично. Лемма 3.1 доказана.

Определение 3.3. *Будем говорить, что для уравнения* (3.1) *выполнено сильное* A*-условие, если*

1) *нелинейность* $g: \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *суперпозиционно измерима и для почти всех* $x \in \Omega$ *сечение* $g(x, \cdot)$ *имеет на* $\mathbb{R}$ *разрывы только первого рода и* $g(x, u) \in [g_-(x, u), g_+(x, u)]$;

2) *существует не более чем счетное семейство поверхностей* $\{S_i, i \in \Lambda\}$, $S_i = \left\{(x, u) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u = \varphi_i(x), x \in \Omega\right\}$, $\varphi_i \in W^2_{\mathrm{loc},1}(\Omega)$, *таких, что для почти всех* $x \in \Omega$ *неравенство* $g(x, u-) \neq g(x, u+)$ *влечет существование* $i \in \Lambda$, *для которого* $u = \varphi_i(x)$ *и* $(L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)+) - r(x)) \cdot (L\varphi_i(x) + g(x, \varphi_i(x)-) - r(x)) > 0$.

Лемма 3.2. *Пусть для уравнения* (3.1) *выполнено сильное* A*-условие и верна оценка* (3.4). *Тогда все точки разрыва оператора* $Qv = Av + Tv - f$ *краевой задачи* (3.1), (3.2) *сильно регулярны.*

Доказательство. Допустим противное, т. е. существует точка разрыва u оператора Q, которая не является сильно регулярной. Отсюда следует

$$\limsup_{v \to 0} (Q(u+v), h) \geq 0 \quad \forall h \in H. \tag{3.9}$$

Последнее неравенство запишем в виде

$$(Au, h) \geq -\limsup_{v \to 0} (T(u+v), h) + (f, h) \quad \forall h \in H.$$

Отсюда с учетом оценки (3.4) получаем

$$(Au, h) \geq -\left(\|a\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} + \|r\|_{\mathbf{L}_q(\Omega)} \right) \cdot \|h\|_{\mathbf{L}_p(\Omega)} \quad \forall h \in H.$$

Отсюда заключаем, что линейный функционал $\varphi(h) = (Au, h)$ определен и ограничен на плотном в $\mathbf{L}_p(\Omega)$ линейном подпространстве H. Следовательно, φ однозначно продолжается по непрерывности на все $\mathbf{L}_p(\Omega)$. Поэтому найдется $z \in \mathbf{L}_p(\Omega)$, для которого верно равенство

$$(Au, h) = \int_\Omega z(x)h(x)dx \quad \forall h \in H,$$

а значит, u — обобщенное решение задачи

$$Lu(x) = z(x), \quad x \in \Omega,$$

$$Bu|_\Gamma = 0.$$

В силу теоремы о регулярности решений эллиптических краевых задач $u \in W^2_q(\Omega)$.

Так как u — точка разрыва оператора T, то мера множества

$$\omega = \{x \in \Omega \mid g(x, u(x)+) \neq g(x, u(x)-)\}$$

не равна нулю. В противном случае u — точка непрерывности оператора Немыцкого G в представлении (3.6) оператора T [25], а значит, и точка непрерывности T. Неравенство $\operatorname{mes}\omega \neq 0$ и сильное A-условие для уравнения (3.1) влекут существование $\varepsilon > 0$ и $i \in \Lambda$, для которых хотя бы одно из множеств

$$\omega_i^+(\varepsilon) = \{x \in \Omega \mid u = \varphi_i(x),\ L\varphi_i(x) + g_-(x, \varphi_i(x)) - r(x) > \varepsilon\},$$

$$\omega_i^-(\varepsilon) = \{x \in \Omega \mid u = \varphi_i(x),\ L\varphi_i(x) + g_+(x, \varphi_i(x)) - r(x) < -\varepsilon\}$$

имеет положительную меру, поскольку ω с точностью до множества меры нуль содержится в объединении

$$\bigcup_{j \in \Lambda} \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\omega_j^+(n^{-1}) \cup \omega_j^-(n^{-1})\right).$$

Пусть для определенности $\operatorname{mes}\omega_i^+(\varepsilon) = d > 0$. Так как функция $Lu(x)$, $r(x)$ и функция $a(x)$ из оценки (3.4) суммируемы на Ω, то существует $\delta > 0$ такое, что для произвольного измеримого множества $e \in \Omega$ с $\operatorname{mes} e < \delta$ справедливо неравенство

$$\int_e (a(x) + |Lu(x)| + |f(x)|)dx < 4^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d. \tag{3.10}$$

Существует замкнутое множество $F \subset \omega_i^+(\varepsilon)$ и открытое множество D, замыкание которого содержится в Ω, такие, что $\operatorname{mes} F > d/2$, $\operatorname{mes}(D \setminus F) < \delta$ [6]. Пусть $h \in C^\infty(\Omega)$ равна -1 на F, нулю вне D и $-1 \leq h(x) \leq 0$ на $D \setminus F$. Существует последовательность $(v_n) \subset H$, для которой

$$\limsup_{v \to 0} (Q(u+v), h) = \lim_{n \to \infty} (Q(u+v_n), h).$$

Не умаляя общности, можно считать, что $v_n(x) \to 0$ почти всюду на Ω, при необходимости переходя к подпоследовательности. Из совпадения $u(x)$ и $\varphi_i(x)$ на F следует, что $Lu(x) = L\varphi_i(x)$ почти всюду на F [26, с. 151].

Используя лемму Лебега – Фату [27], неположительность h, оценку (3.10) и выбор множеств F и D, получаем

$$\limsup_{v \to 0} (Q(u+v), h) = \lim_{n \to \infty} (Q(u+v_n), h) \leq$$

$$\leq \int_\Omega \left(Lu(x) + \liminf_{n \to \infty} g(x, u(x) + v_n(x)) - f(x)\right) \cdot h(x)dx \leq$$

$$\leq -\int_F (L\varphi_i(x) + g_-(x, \varphi_i(x)) - f(x))dx +$$

$$+ \int_{D \setminus F} (|Lu(x)| + a(x) + |f(x)|)dx \leq -2^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d + 4^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d = -4^{-1} \cdot \varepsilon \cdot d.$$

Но это противоречит (3.9). Случай, когда $\operatorname{mes}\omega_i^-(\varepsilon)$, рассматривается аналогично. Лемма 3.2 доказана.

Основным результатом данного пункта является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Предположим, что:*

1) *для уравнения* (3.1) *выполнено сильное* A*-условие;*

2) *для нелинейности* $g(x, u)$ *в уравнении* (3.1) *верна оценка* (3.4) *с* $a \in \mathbf{L}_q(\Omega)$, $q > 2n/(n+2)$;

3) *для произвольного ненулевого решения* v *граничной задачи*

$$L^* v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \tag{3.11}$$

$$B v + \sum_{j=1}^{n} b_j(x) \cos(n, x_j) v \Big|_{\Gamma} = 0, \tag{3.12}$$

где

$$L^* v = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a_{ij}(x) v_{x_j}\right)_{x_i} - \sum_{j=1}^{n} \left(b_j(x) v\right)_{x_j} + c(x) v(x)$$

— *формально сопряженный с* L *дифференциальный оператор* [26],

$$\int_{\Omega} r(x) v(x) dx < \int_{\Omega^+(v)} \underline{g}_+(x) v(x) dx + \int_{\Omega^-(v)} \overline{g}_-(x) v(x) dx \tag{3.13}$$

$$\left(\int_{\Omega} r(x) v(x) dx > \int_{\Omega^+(v)} \overline{g}_+(x) v(x) dx + \int_{\Omega^-(v)} \underline{g}_-(x) v(x) dx \right), \tag{3.14}$$

$$\overline{g}_{\pm}(x) = \limsup_{s \to \pm\infty} g(x, s), \qquad \underline{g}_{\pm}(x) = \liminf_{s \to \pm\infty} g(x, s),$$

$$\Omega^{\pm}(v) = \{ x \in \Omega : \pm v(x) > 0 \};$$

4) *существует линейный изоморфизм* M *между подпространствами* $H^1(\Omega)$ *решений задач* (3.3) *и* (3.11), (3.12) *такой, что любое решение* w *задачи* (3.3) *почти всюду на* $\Omega^+(Mw)$ $(\Omega^-(Mw))$ *положительно (отрицательно).*

Тогда задача (3.1), (3.2) *имеет полуправильное решение из пространства* $W_q^2(\Omega)$.

Доказательство. Проверим выполнение условий теоремы 3.1 для рассмотренной выше операторной постановки (1.1) задачи (3.1), (3.2). Уже доказано, что операторы A и T в уравнении (1.1) удовлетворяют условиям 1 и 2 теоремы 3.1, а в силу леммы 3.2 из условия 1 теоремы 3.1 следует сильная регулярность точек разрыва оператора $Qw = Aw + Tw - f$. Используя теоремы о регулярности обобщенных решений эллиптических краевых задач, стандартным рассуждением можно показать, что ядра операторов A и A^* совпадают с множествами решений задач (3.3) и (3.11), (3.12) соответственно. Покажем, что для элемента f в уравнении (1.1) выполнено условие i) в котором M — линейный изоморфизм между $\ker A$ и $\ker A^*$ из условия 4 теоремы 3.1. Допустим противное. Тогда найдется последовательность $(u_k) \subset H$ такая, что $\| u_k \| \to \infty$, $w_k = \| u_k \|^{-1} \cdot u_k \to w \in \ker A$, для которой

$$\limsup_{k \to \infty} (T u_k, M w) \leq (f, M w) \tag{3.15}$$

$$\left(\liminf_{k \to \infty} (T u_k, M w) \geq (f, M w) \right). \tag{3.16}$$

Не умаляя общности, можно считать, что существует $\lim\limits_{k \to \infty} (T u_k, M w)$ и $w_k(x) \to w(x)$ почти всюду на Ω, переходя при необходимости к подпоследовательности. Так как M — линейный изоморфизм между $\ker A$ и $\ker A^*$, то $v =$

$= Mw \in \ker A^*$ и отлично от нуля. Следовательно, v — ненулевое решение задачи (3.11), (3.12). Так как w — ненулевое решение задачи (3.3), то почти всюду на $\Omega^+(v)$ в силу условия 4 теоремы 3.1 $w(x) > 0$ $(w(x) < 0)$. Поэтому для почти всех $x \in \Omega^+(v)$ $(x \in \Omega^-(v))$

$$\liminf_{k\to\infty} g(x, u_k(x)) = \liminf_{k\to\infty} g(x, \|u_k\| \cdot w_k(x)) = \underline{g}_+,$$

$$\limsup_{k\to\infty} g(x, u_k(x)) = \bar{g}_+$$

$$\left(\liminf_{k\to\infty} g(x, u_k(x)) = \underline{g}_-, \quad \limsup_{k\to\infty} g(x, u_k(x)) = \bar{g}_-\right).$$

Пусть $(u_{n(k)})$ — подпоследовательность (u_k) такая, что

$$\limsup_{k\to\infty} (Tu_k, Mw) = \lim_{k\to\infty} (Tu_{n(k)}, Mw)$$

$$\left(\liminf_{k\to\infty} (Tu_k, Mw) = \lim_{k\to\infty} (Tu_{n(k)}, Mw)\right)$$

и $w_{n(k)} \to w(x)$ почти всюду на Ω. Применяя лемму Лебега – Фату [27] и учитывая неравенство (3.13) ((3.14)), получаем

$$\limsup_{k\to\infty} (Tu_k, Mw) = \lim_{k\to\infty} (Tu_{n(k)}, Mw) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)\, dx \geq$$

$$\geq \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega^+(v)} g(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)\, dx + \liminf_{k\to\infty} \int_{\Omega^-(v)} g(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)\, dx \geq$$

$$\geq \int_{\Omega^+(v)} \underline{g}_+(x) v(x)\, dx + \int_{\Omega^-(v)} \bar{g}_-(x) v(x)\, dx > \int_\Omega r(x) v(x)\, dx = (f, Mw)$$

$$\left(\liminf_{k\to\infty} (Tu_k, Mw) = \lim_{k\to\infty} (Tu_{n(k)}, Mw) = \lim_{k\to\infty} \int_\Omega g(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)\, dx \leq\right.$$

$$\leq \limsup_{k\to\infty} \int_{\Omega^+(v)} g(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)\, dx + \limsup_{k\to\infty} \int_{\Omega^-(v)} g(x, u_{n(k)}(x)) \cdot v(x)\, dx \leq$$

$$\left.\leq \int_{\Omega^+(v)} \bar{g}_+(x) v(x)\, dx + \int_{\Omega^-(v)} \underline{g}_-(x) v(x)\, dx < \int_\Omega r(x) v(x)\, dx = (f, Mw)\right).$$

Полученное неравенство противоречит (3.15) ((3.16)). Таким образом, доказано, что f в уравнении (1.1) удовлетворяет условию i). Поскольку выполнены условия 1 – 3 теоремы 2.1 и показано, что точки разрыва оператора $Qw = Aw + Tw - f$ регулярны, то уравнение (1.1) имеет решение u, которое является точкой непрерывности оператора T. В силу леммы 3.1 $u(x)$ — полуправильное решение задачи (3.1), (3.2). Теорема 3.1 доказана.

***Замечание* 3.1.** Условие 4 теоремы 3.1 выполняется, если: a) дифференциальный оператор L самосопряжен $(b_j(x) \equiv 0)$, а M тождествен; либо b) пространства решений задачи (3.3) и задачи (3.11), (3.12) одномерны и базисная функция в каждом из них почти всюду положительна (отрицательна), а M переводит положительную базисную функцию в положительную. Допущение b) имеет место, если дифференциальный оператор равен разности Lw из уравнения (3.1) с неотрицательным коэффициентом $c(x)$ и $\lambda_0 w$, где λ_0 — минимальное собственное значение дифференциального оператора L с однородным граничным условием Дирихле [17], а $Bu = u$.

1. *Скрыпник И. В.* Нелинейные эллиптические дифференциальные уравнения высшего порядка // Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Совр. пробл. математики. – 1990. – **37**. – С. 3–87.
2. *Павленко В. Н.* О существовании полуправильных решений первой краевой задачи для уравнения параболического типа с разрывной немонотонной нелинейностью // Дифференц. уравнения. – 1991. – **27**, № 3. – С. 520–526.
3. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Правильные решения уравнений с разрывными нелинейностями // Докл. АН СССР. – 1976. – **226**, № 3. – С. 506–509.
4. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* Об эллиптических уравнениях с разрывными нелинейностями // Там же. – 1995. – **342**, № 6. – С. 731–734.
5. *Красносельский М. А., Лусников А. В.* Правильные неподвижные точки и устойчивые инвариантные множества монотонных операторов // Функцион. анализ и его прил. – 1996. – **30**, вып. 3. – С. 34–46.
6. *Павленко В. Н.* Существование решений у нелинейных уравнений с разрывными монотонными операторами // Вестн. Моск. ун-та. Математика. Механика. – 1973, № 6. – С. 21–29.
7. *Павленко В. Н.* Нелинейные уравнения с разрывными операторами в банаховых пространствах // Укр. мат. журн. – 1979. – **31**, № 5. – С. 569–572.
8. *Павленко В. Н.* Существование решений нелинейных уравнений с разрывными полумонотонными операторами // Там же. – 1981. – **33**, № 4. – С. 547–551.
9. *Павленко В. Н.* Метод монотонных операторов для уравнений с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. – 1991. – № 6. – С. 38–44.
10. *Павленко В. Н.* Теоремы существования для эллиптических вариационных неравенств с квазипотенциальными операторами // Дифференц. уравнения. – 1988. – **24**, № 8. – С. 1397–1402.
11. *Павленко В. Н.* Полуправильные решения эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1991. – **43**, № 2. – С. 230–235.
12. *Павленко В. Н.* Вариационный метод для уравнений с разрывными операторами // Вестн. Челяб. ун-та. Математика. Механика. – 1994. – № 1 (2). – С. 87–95.
13. *Chang K.-C.* Variational methods for nondifferential functionals and their applications to partial differential equation // J. Math. Anal. and Appl. – 1981. – **80**, № 1. – P. 102–129.
14. *Carl S., Heikilla S.* An existence result for elliptic differential inclusions with discontinuous nonlinearity // Nonlinear Anal. – 1992. – **18**, № 15. – P. 471–479.
15. *Carl S., Heikilla S.* On the existence of extremal solutions for discontinuous elliptic equations under discontinuous flux conditions // Nonlinear Anal. – 1994. – **23**, № 12. – P. 1499–1506.
16. *Carl S., Heikilla S., Lakshmikantham.* Nonlinear elliptic differential inclusions governed by state-dependent subdifferentials // Nonlinear Anal. – 1995. – **25**, № 7. – P. 729–745.
17. *Massabo I.* Elliptic boundary value problems at resonance with discontinuous nonlinearities // Boll. Un. Math. Ital. Ser. 5. – 1980. – **17-B**, № 3. – P. 1302–1320.
18. *Павленко В. Н., Ульянова О. В.* Метод верхних и нижних решений для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Изв. вузов. Математика. – 1998, № 11. – С. 69–76.
19. *Ma T. W.* Topological degree for set valued compact vector fields in locally convex spaces // Rozprawy Mat. – 1972. – **92**. – P. 3–47.
20. *Павленко В. Н.* Управление сингулярными распределенными системами параболического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, № 6. – С. 729–736.
21. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений. – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1986. – 104 с.
22. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – М.: Наука, 1964. – 540 с.
23. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1980. – 496 с.
24. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – 208 с.
25. *Красносельский М. А., Покровский А. В.* О разрывном операторе суперпозиции // Успехи мат. наук. – 1977. – **32**, вып. 1. – С. 169–170.
26. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. – М.: Наука, 1989. – 464 с.
27. *Иосида К.* Функциональный анализ. – М.: Мир, 1967. – 642 с.

Получено 16.01.01

УДК 519.21

І. В. Самойленко (Ін-т математики НАН України, Київ)

ЗАТУХАЮЧА МАРКОВСЬКА ВИПАДКОВА ЕВОЛЮЦІЯ

We introduce a notion of fading Markov random evolution and study properties and characteristics of this process.

Введено поняття затухаючої марковської випадкової еволюції, вивчено властивості та характеристики цього процесу.

1. Вступ. Відома модель Гольдштейна – Каца [1, 2] описує еволюцію частки на прямій. При цьому на частку не діють зовнішні сили і неможливо визначити граничний (при $t \to \infty$) розподіл координати частки.

У запропонованій моделі затухаючої еволюції частка рухається на прямій, перебуваючи під дією зовнішньої сили (в полі тяжіння, магнітному полі і тому подібне). У результаті частку „зносить" у деяку точку, де вона „завмирає" при $t \to \infty$. На відміну від моделі Гольдштейна – Каца у випадку затухаючої еволюції можливо визначити граничний розподіл координати процесу. Обчислено також інші характеристики затухаючої еволюції: моменти, інтегральні та диференціальні рівняння, що пов'язані з подібними еволюціями.

***Означення* 1.** Затухаючим телеграфним процесом назвемо процес $\eta_t = (-a)^{\xi(t)}$, $0 < a < 1$, $\xi(u) \in \{0, 1, \dots\}$ — марковський ланцюг, який перебуває у кожному стані час, експоненціально розподілений із параметром λ;

$$S(t) = v\int_0^t (-a)^{\xi(u)}\,du$$

— відповідна телеграфному процесу марковська випадкова еволюція, де v — додатна константа, що має зміст швидкості.

2. Кореляційна функція затухаючого телеграфного процесу. Ймовірність k пуассонівських подій на проміжку часу (t_1, t_2) дорівнює

$$p_k(t_1, t_2) = \frac{(\Lambda(t_1, t_2))^k}{k!} e^{-\Lambda(t_1, t_2)}, \quad k = 0, 1, \dots,$$

де

$$\Lambda(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)\,dt, \quad t_2 > t_1$$

($\lambda(t)$ — параметр експоненціального розподілу).

Лема 1. *Затухаючий телеграфний процес має кореляційну функцію*

$$B(t_1, t_2) = e^{-(1+a)(\Lambda(0, t_2) - a\Lambda(0, t_1))}.$$

Доведення. Кореляційна функція дорівнює математичному сподіванню добутку значень процесу в моменти часу t_1 і t_2, $t_1 < t_2$:

$$B(t_1, t_2) = m(\eta_{t_1}\eta_{t_2}) = e^{-\Lambda(0, t_2)} - ae^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{\Lambda(t_1, t_2)}{1!} \times$$

$$\times e^{-\Lambda(t_1, t_2)} + ae^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{\Lambda(0, t_1)}{1!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)} + ae^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{(\Lambda(t_1, t_2))^2}{2!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)} -$$

$$- a^3 e^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{\Lambda(0, t_1)}{1!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)}\frac{\Lambda(0, t_1)}{1!} + a^4 e^{-\Lambda(0, t_1)}\frac{(\Lambda(0, t_1))^2}{2!}e^{-\Lambda(t_1, t_2)} + \dots .$$

Застосовуючи співвідношення $e^{-\Lambda(0,t_2)} = e^{-\Lambda(0,t_1)}e^{-\Lambda(t_1,t_2)}$, отримуємо

$$B(t_1,t_2) = e^{-\Lambda(0,t_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} (-a)^n (-a)^{n-k} \frac{(\Lambda(t_1,t_2))^k}{k!} \frac{(\Lambda(0,t_1))^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-\Lambda(0,t_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-a\Lambda(t_1,t_2))^k}{k!} \frac{\left(a^2\Lambda(0,t_1)\right)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-\Lambda(0,t_2)} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(-a\Lambda(t_1,t_2))^k}{k!} \frac{\left(a^2\Lambda(0,t_1)\right)^{n-k}}{(n-k)!} =$$

$$= e^{-\Lambda(0,t_2)} e^{-a\Lambda(t_1,t_2)} e^{a^2\Lambda(0,t_1)} =$$

$$= e^{-(1+a)\Lambda(0,t_2)} e^{(a+a^2)\Lambda(0,t_2)} = e^{-(1+a)(\Lambda(0,t_2) - a\Lambda(0,t_1))}.$$

Лему доведено.

Очевидно, при $a = 1$ маємо $B(t_1,t_2) = e^{-2\Lambda(t_1,t_2)}$, що співпадає з кореляційною функцією телеграфного процесу (див., наприклад, [3, с. 225]).

Якщо $\lambda(t) = \lambda$, то $\Lambda(t_1,t_2) = \Lambda(t_2 - t_1)$ і $B(t_1,t_2) = e^{-(1+a)[\lambda t_2 - a\lambda t_1]}$, що співпадає з $e^{-2\lambda\tau}$ $(\tau = t_2 - t_1)$ при $a = 1$ (див., наприклад, [3, с. 227]).

3. Миттєвий енергетичний спектр.

Означення 2. Миттєвим енергетичним спектром назвемо функцію

$$\Phi(t,\omega) = 4\int_0^{\infty} B(t,t+\tau)\cos\omega\tau\, d\tau.$$

Це означення співпадає з означенням миттєвого енергетичного спектру з [3, с. 220].

Лема 2. *Затухаючий телеграфний процес має енергетичний спектр*

$$\Phi(t,\omega) = 4e^{-(1-a^2)\Lambda(0,t)} \int_0^{\infty} e^{-(1+a)\Lambda(t,t+\tau)} \cos\omega\tau\, d\tau.$$

Доведення. Справедливе співвідношення

$$\Phi(t,\omega) = 4\int_0^{\infty} B(t,t+\tau)\cos\omega\tau\, d\tau = 4\int_0^{\infty} e^{-(1+a)[\Lambda(0,t+\tau) - a\Lambda(0,t)]} \cos\omega\tau\, d\tau =$$

$$= 4e^{-(1-a^2)\Lambda(0,t)} \int_0^{\infty} e^{-(1+a)\Lambda(t,t+\tau)} \cos\omega\tau\, d\tau.$$

Лему доведено.

Якщо $\Lambda(t_1,t_2) = \lambda(t_2 - t_1)$, то

$$\Phi(t,\omega) = 4e^{(a^2-1)\lambda t} \frac{(1+a)\lambda}{((1+a)\lambda)^2 + \omega^2}.$$

Зауважимо, що при $a = 1$ $\Phi(t,\omega) = \dfrac{8\lambda}{4\lambda^2 + \omega^2}$ [3, с. 228], тобто миттєвий енергетичний спектр є аналогом спектра телеграфного процесу.

4. Моменти затухаючого телеграфного процесу та відповідної еволюції. Обчислимо математичне сподівання затухаючого телеграфного процесу при умові, що $\eta_0 = 1$:

$$E[\eta_t | \eta_0 = +1] = 1\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t} + (-a)\frac{(\lambda t)^1}{1!}e^{-\lambda t} + \ldots =$$

$$= e^{-\lambda t}\left[\frac{(-a\lambda t)^0}{0!} + \frac{(-a\lambda t)^1}{1!} + \ldots\right] = e^{-\lambda t}e^{-a\lambda t}.$$

Маємо аналогічно $E[\eta_t | \eta_0 = -1] = -e^{-\lambda t}e^{-a\lambda t}$. Нехай $P(\eta_0 = +1) = p$, а $P(\eta_0 = -1) = q(p + q = 1)$. Тоді

$$E[\eta_t] = E[\eta_t | \eta_0 = +1] + E[\eta_t | \eta_0 = -1] =$$

$$= pe^{-\lambda t}e^{-a\lambda t} - qe^{-\lambda t}e^{-a\lambda t} = re^{-\lambda t}e^{-a\lambda t} \quad (r = p - q),$$

що співпадає з першим моментом телеграфного процесу при $a = 1$ [4].

Для другого моменту маємо $(u < t)$:

$$E\left[(-a)^{\xi(u)}(-a)^{\xi(t)}\right] = p\left[1\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u}\left(e^{-\lambda(t-u)}e^{-a\lambda(t-u)}\right) + \right.$$

$$\left. + (-a)\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u}\left((-a)\frac{(\lambda(t-u))^0}{0!}e^{-\lambda(t-u)} + (-a)^2\frac{(\lambda(t-u))^1}{1!}e^{-\lambda(t-u)} + \ldots\right) + \ldots\right] +$$

$$+ q\left[-1\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u}\left(-e^{-\lambda(t-u)}e^{-a\lambda(t-u)}\right) - \right.$$

$$\left. - (-a)\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u}\left(-(-a)\frac{(\lambda(t-u))^0}{0!}e^{-\lambda(t-u)} - (-a)^2\frac{(\lambda(t-u))^1}{1!}e^{-\lambda(t-u)} - \ldots\right) - \ldots\right] =$$

$$= p\left[\left(e^{-(1+a)\lambda(t-u)}\left(\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u} + (-a)^2\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u} + \ldots\right)\right] +$$

$$+ q\left[\left(e^{-(1+a)\lambda(t-u)}\left(\frac{(\lambda u)^0}{0!}e^{-\lambda u} + (-a)^2\frac{(\lambda u)^1}{1!}e^{-\lambda u} + \ldots\right)\right] =$$

$$= e^{-(1+a)\lambda(t-u)}e^{-\lambda u}e^{a^2\lambda u} = e^{-\lambda\left[(1+a)(t-u)+(1-a^2)u\right]},$$

оскільки $p + q = 1$. Другий момент при $a = 1$ співпадає з другим моментом в [4]. Аналогічно знаходяться моменти більш високих порядків.

Лема 3. *Моменти затухаючої марковської випадкової еволюції мають вигляд*

$$E\left(V\int_0^t (-a)^{\xi(u)}du\right) = \frac{rv}{(1+a)\lambda}\left[1 - e^{-(1+a)\lambda t}\right],$$

....

$$E\left(V\int_0^t (-a)^{\xi(u)}du\right)^k =$$

$$= k!V^k\int_0^t\int_0^{\tau_k}\ldots\int_0^{\tau_2}E\left[(-a)^{\xi(\tau_1)}(-a)^{\xi(\tau_2)}\ldots(-a)^{\xi(\tau_k)}\right]d\tau_1 d\tau_2\ldots d\tau_k, \qquad (1)$$

$$0 \le \tau_1 < \ldots < \tau_k \le t.$$

Доведення. Використовуючи формулу для математичного сподівання затухаючого телеграфного процесу, маємо

$$E\left(v\int_0^t (-a)^{\xi(u)}du\right) = v\int_0^t E\left[(-a)^{\xi(u)}\right]du =$$

$$= rv\int_0^t e^{-(1+a)\lambda t}du = \frac{rv}{(1+a)\lambda}\left[1-e^{-(1+a)\lambda t}\right].$$

Моменти старших порядків обчислюються аналогічно [4], тобто вірна формула (1). Лему доведено.

5. Граничний розподіл затухаючої випадкової еволюції. Розглянемо випадкову еволюцію

$$S(\infty) = \int_0^\infty (-a)^{\xi(u)}du = \tau_1 - a\tau_2 + a^2\tau_3 - \ldots .$$

Тут τ_i — випадкові експоненціально розподілені величини. Ряд збігається за теоремою про три ряди. Легко довести, що $S(\infty)$ визначається функцією розподілу

$$F_{S(\infty)}(x) = P\{S(\infty) < x\} = \int_0^\infty dF(y)\left[1-F\left(\frac{(y-x)}{a}\right)\right],$$

де

$$F(x) = 1 - s^{-1}\left[e^{-\lambda x} - \frac{a^2}{1-a^2}e^{-\lambda x/a^2} + \frac{a^6}{(1-a^2)(1-a^4)}e^{-\lambda x/a^4} - \ldots\right], \quad x \geq 0,$$

$$s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\prod_{k=1}^{2n}\frac{a^k}{1-a^k}. \tag{2}$$

***Зауваження* 1.** Справедливе співвідношення

$$s = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\prod_{k=1}^{2n}\frac{a^k}{1-a^k} =$$

$$= 1 - \frac{1}{c^2-1} + \frac{1}{(c^2-1)(c^4-1)} - \ldots, \quad c = \frac{1}{a} > 1. \tag{3}$$

Тоді

$$s = \sum_0^\infty (-1)^n \frac{(0)_{c^2,n}}{(c^2)_{c^2,n}} = {}_1\Phi_0(0;-1;c^2),$$

де

$$(c)_{q,n} = (1-c)(1-cq)\ldots(1-cq^n); \qquad {}_r\Phi_s\begin{pmatrix}\alpha_1,\ldots,\alpha_r;z\\ \beta_1,\ldots,\beta_s;q\end{pmatrix}$$

— базисний гіпергеометричний ряд [5, с. 196].

Очевидно, ряд (2) додатний, оскільки $0 < a < 1$, тобто $F(x) \leq 1$; ряд (3) збігається, тому що він знакозмінний і $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$, тобто $s < \infty$.

Для знаходження розподілу $F_{S(\infty)}(x)$ проведемо наступні викладки:

$$S(\infty) = \tau_1 - a\tau_2 + a^2\tau_3 - \ldots =$$

$$= [\tau_1 + a\tau_3 + \ldots] - a[\tau_2 + a\tau_4 + \ldots], \quad 0 < a < 1.$$

Оскільки τ_i однаково розподілені з параметром λ, знайдемо функцію розподілу для $\zeta = \tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots$:

$$F(x) = P\{\zeta < x\} = P\{\tau_1 + a^2\zeta' < x\} =$$

$$= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda u} P\{u + a^2\zeta' < x\} du = \lambda\int_0^x e^{-\lambda u} P\left\{\zeta' < \frac{x-u}{a^2}\right\} du.$$

Таким чином,

$$F(x) = \lambda\int_0^x e^{-\lambda u} F\left(\frac{x-u}{a^2}\right) du.$$

Очевидно, $F(0) = 0$; будемо шукати $F(x)$ у вигляді

$$F(x) = 1 + a_1 e^{-\lambda x} + a_2 e^{-\lambda x/a^2} + a_3 e^{-\lambda x/a^4} + \ldots, \tag{4}$$

$$F(x) = \lambda\int_0^x e^{-\lambda u}\left[1 + a_1 e^{-\lambda(x-u)/a^2} + a_2 e^{-\lambda(x-u)/a^4} + \ldots\right] du =$$

$$= 1 - e^{-\lambda x} + \frac{a_1 a^2 e^{-\lambda x/a^2}}{1-a^2}\left(e^{(1-a^2)\lambda x/a^2} - 1\right) +$$

$$+ \frac{a_2 a^4 e^{-\lambda x/a^4}}{1-a^4}\left(e^{(1-a^4)\lambda x/a^4} - 1\right) + \ldots .$$

Порівнюючи з (4), маємо

при $e^{-\lambda x}$: $a_1 = -1 + \dfrac{a_1 a^2}{1-a^2} + \dfrac{a_1 a^4}{1-a^4} + \ldots;$

при $e^{-\lambda x/a^2}$: $a_2 = -\dfrac{a_1 a^2}{1-a^2};$

при $e^{-\lambda x/a^4}$: $a_3 = -\dfrac{a_2 a^4}{1-a^4}$

і т. д. Далі одержуємо

$$a_1 = -1 + \frac{a_1 a^2}{1-a^2} - \frac{a_1 a^6}{(1-a^2)(1-a^4)} + \ldots,$$

звідки

$$a_1\left[1 + \frac{a^2}{1-a^2} - \frac{a^6}{(1-a^2)(1-a^4)} - \ldots\right] = -1.$$

Оскільки ряд у квадратних дужках збігається (див. зауваження 1), позначимо його суму $s < \infty$.

Таким чином,

$$a_1 = -\frac{1}{s}; \quad a_2 = -\frac{a^2}{s(1-a^2)}; \quad a_3 = -\frac{a^6}{s(1-a^2)(1-a^4)}; \quad \ldots .$$

Маємо функцію розподілу для $\zeta = \tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots$:

$$F(x) = 1 - s^{-1}\left[e^{-\lambda x} - \frac{a^2}{1-a^2}e^{-\lambda x/a^2} + \frac{a^6}{(1-a^2)(1-a^4)}e^{-\lambda x/a^4} - \ldots\right], \quad x \geq 0.$$

Функція розподілу для

$$S(\infty) = \left[\tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots\right] - a\left[\tau_2 + a^2\tau_4 + \ldots\right]$$

має вигляд

$$F_{S(\infty)}(x) = P\{S(\infty) < x\} = P\left\{-a\left[\tau_2 + a^2\tau_4 + \ldots\right] < x - \left[\tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots\right]\right\} =$$

$$= P\left\{\left[\tau_2 + a^2\tau_4 + \ldots\right] > \frac{\left[\tau_1 + a^2\tau_3 + \ldots\right] - x}{a}\right\} = \int\limits_0^\infty dF(y)\left[1 - F\left(\frac{y-x}{a}\right)\right].$$

6. Інтегральне рівняння для функціонала від затухаючої випадкової еволюції. Розглянемо функціонали випадкової еволюції вигляду

$$u_+(\upsilon, x, t) = E\left[f\left(x + \upsilon\int\limits_0^t \eta_u\, du\right)\middle|\, \eta_0 = +1\right],$$

$$u_-(\upsilon, x, t) = E\left[f\left(x + \upsilon\int\limits_0^t \eta_u\, du\right)\middle|\, \eta_0 = -1\right].$$

Запишемо інтегральні рівняння для цих функціоналів, які назвемо інтегральними рівняннями Колмогорова:

$$u_+(\upsilon, x, t) = E\left[f\left(x + \upsilon\int\limits_0^t (-a)^{\xi(u)}\, du\right)\middle|\, \eta_0 = +1\right] =$$

$$= P(N(t) = 0)Ef(x + \upsilon t) + \int\limits_0^t P(N(ds) = 1)Ef\left(x + \upsilon s - a\upsilon\int\limits_s^t (-a)^{\xi(u)}\, du\right) =$$

$$= e^{-\lambda t} f(x + \upsilon t) + \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda s} E\left[f\left(x + \upsilon s + a\upsilon\int\limits_0^{t-s} \eta_u\, du\right)\middle|\, \eta_0 = -1\right] ds =$$

$$= e^{-\lambda t} f(x + \upsilon t) + \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda s} u_-(a\upsilon, x + \upsilon s, t - s)\, ds.$$

Тут враховується, що

$$\int\limits_s^t (-a)^{\xi(u)}\, du = \int\limits_0^{t-s} (-a)^{\xi(u)}\, du, \tag{5}$$

оскільки $\xi(u)$ однорідне. Аналогічно для $u_-(\upsilon, x, t)$ маємо

$$u_-(\upsilon, x, t) = e^{-\lambda t} f(x - \upsilon t) + \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda s} u_+(a\upsilon, x - \upsilon s, t - s)\, ds. \tag{6}$$

Підставляючи (6) у (5), одержуємо для $u_+(\upsilon, x, t)$:

$$u_+(\upsilon, x, t) = e^{-\lambda t} f(x + \upsilon t) + \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda s} e^{-\lambda(t-s)} f(x + \upsilon s - a\upsilon(t - s))\, ds +$$

$$+ \int\limits_0^t \lambda e^{-\lambda s} \int\limits_0^{t-s} e^{-\lambda l} u_+(a^2\upsilon, x + \upsilon s - a\upsilon l, t - s - l)\, dl\, ds =$$

$$= e^{-\lambda t} f(x + \upsilon t) + \lambda e^{-\lambda t} \int\limits_0^t f(x + \upsilon s - a\upsilon(t - s))\, ds +$$

$$+\ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_+(a^2 v, x + vs - avm + avs, t - m)\,dm\,ds. \tag{7}$$

Аналогічно

$$u_-(v,x,t) = e^{-\lambda t} f(x - vt) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f(x - vs + av(t-s))\,ds\ +$$

$$+\ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_-(a^2 v, x - vs + avm - avs, t - m)\,dm\,ds. \tag{8}$$

Розглянемо питання про існування розв'язків інтегральних рівнянь (7), (8) у просторі функцій (див. [6], гл. 4)

$$f(v,x,t) = f_0(v,x,t) + c, \tag{9}$$

$$c = \text{const}; \quad f_0(v,x,t) \to 0, \quad v,x,t \to \infty.$$

Теорема 1. *Для* $f(x)$ *з простору* (9) *рівняння* (7), (8) *мають єдиний розв'язок у просторі* (9). *Розв'язками є*

$$\lim_{n\to\infty} u_n(v,x,t) = \lim_{n\to\infty} Au_{n-1}(v,x,t),$$

де $u_0(v,x,t)$ — *довільна функція з простору* (9).

Доведення. У [6] доведено, що простір (9) банахів відносно sup-норми, тому можна застосувати принцип стислих відображень.

Для $u_+(v,x,t)$ запишемо рівняння (7) у вигляді

$$u_+(v,x,t) = Au_+(v,x,t),$$

де

$$A\varphi(v,x,t) = e^{-\lambda t} f(x + vt) + \lambda e^{-\lambda t} \int_0^t f(x + vs - av(t-s))\,ds\ +$$

$$+\ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} \varphi(a^2 v, x + vs - avm + avs, t - m)\,dm\,ds.$$

Легко перевірити, що оператор A діє з простору (9) у простір (9) і є оператором стиску для $f(x)$, $\varphi(v,x,t)$ з простору (9). Таким чином, A має єдину нерухому точку та існує границя $\lim_{n\to\infty} Au_{n-1}(v,x,t)$, яка є розв'язком інтегрального рівняння для $u_+(v,x,t)$ (тут $u_0(v,x,t)$ — довільна функція з простору (8)). Аналогічні викладки справедливі для $u_-(v,x,t)$. Теорему доведено.

Розв'язок існує і для деяких функцій, що не належать простору (9). Наприклад, для функцій $f(x) = x^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Приклад. $f(x) = x$. Нехай $u_0(v,x,t) = 0$, тоді для $u_+(v,x,t)$ маємо

$$u_1(v,x,t) = e^{-\lambda t}\left(x + xt + vt - \frac{avt^2}{2} + \frac{vt^2}{2}\right),$$

$$u_2(v,x,t) = u_1(v,x,t) + \lambda^2 e^{-\lambda t}\left(\frac{xt^2}{2} + \frac{xt^3}{6} + \frac{\lambda^2 t^3 v}{6}(1 - a + a^2)\right) +$$

$$+\ \frac{\lambda^3 t^4 v}{24}\left(1 - a + a^2 - a^3\right),$$

....

$$\lim_{n\to\infty} u_n(v,x,t) = x + \frac{v}{(1+a)\lambda}\left(1-e^{-(1+a)\lambda t}\right),$$

що співпадає з першим моментом затухаючої випадкової еволюції ($p = 1$, $q = 0$; $r = 1$).

Зауваження 2. При $a = 1$ маємо

$$u_+(v,x,t) = e^{-\lambda t} f(x+vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x+v(t-2s))\,ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_+(v, x+v(2s-m), t-m)\,dm\,ds.$$

Покладаючи $u_+(v,x,t) = u_+(x,t)$, отримуємо рівняння, вказане в [7] для випадкових еволюцій, що відповідають телеграфному процесу. Аналогічно для $u_-(v,x,t)$.

У моделі Каца доведено, що функціонали від випадкової еволюції є розв'язками задачі Коші для телеграфного рівняння [1]. Знайдемо аналогічну задачу Коші для рівняння в частинних похідних, яку задовольняють функціонали від затухаючої випадкової еволюції.

Нехай, як і раніше, $P(\eta_0 = +1) = p$, $P(\eta_0 = -1) = +q$, $r = p - q$. Розглянемо рівняння

$$pu_+(v,x,t) - qu_-(v,x,t) = p\Bigg\{ e^{-\lambda t} f(x+vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x+vs-av(t-s))\,ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_+\left(a^2 v, x+vs-avm+avs, t-m\right) dm\,ds \Bigg\} -$$

$$- q\Bigg\{ e^{-\lambda t} f(x-vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x-vs+av(t-s))\,ds +$$

$$+ \lambda^2 \int_0^t \int_s^t e^{-\lambda m} u_-\left(a^2 v, x-vs+avm-avs, t-m\right) dm\,ds \Bigg\}. \tag{10}$$

Теорема 2. *Задача Коші*

$$\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(v,x,t) + 3\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(v,x,t) + 3\lambda^2\frac{\partial}{\partial t}u(v,x,t) - \lambda^2\frac{\partial}{\partial t}u(a^2 v,x,t) -$$

$$- a^2 v^2 \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial t}u(v,x,t) - a^2 v^2 \lambda \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(v,x,t) -$$

$$- (1-a)\lambda^2 v u(a^2 v^2, x, t) + \lambda^3 u(v,x,t) - \lambda^3 u(a^2 v, x, t) = 0,$$

$$u(v,x,0) = f(x), \qquad \frac{\partial}{\partial t}u(v,x,t)\Big|_{t=0} = rv\frac{d}{dx}f(x),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(v,x,t)\Big|_{t=0} = -r(1+a)\lambda v\frac{d}{dx}f(x) + rv^2\frac{d^2}{dx^2}f(x), \tag{11}$$

де $u(v,x,t) = pu_+(v,x,t) - qu_-(v,x,t)$ *еквівалентна інтегральному рівнянню* (10), *тобто якщо* $u(v,x,t)$ *задовольняє* (10) *і є тричі диференційовною відносно* x *і* t, *то вона задовольняє* (11).

Доведення. Зробимо в (10) заміну змінних

$$pu_+(v,x,t) - qu_-(v,x,t) = p\Bigg\{ e^{-\lambda t} f(x+vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x+vs-av(t-s))ds -$$

$$-\lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^{t-f} e^{\lambda f} u_+\left(a^2 v, x+vs+avs+avf-avt, f\right)ds\,df\Bigg\} -$$

$$-q\Bigg\{ e^{-\lambda t} f(x-vt) + \lambda e^{-\lambda t}\int_0^t f(x-vs+av(t-s))ds -$$

$$-\lambda^2 e^{-\lambda t}\int_0^t\int_0^{t-f} e^{\lambda f} u_-\left(a^2 v, x-vs-avs-avf+avt, f\right)ds\,df\Bigg\}.$$

Диференціюючи дане рівняння по x і t та виражаючи інтеграли через функціонали і похідні функціоналів, отримуємо задачу Коші (11). Теорему доведено.

Підставляючи в рівняння і початкові умови затухаючої еволюції, безпосередньо переконуємося, що при $f(x) = x^k$ відповідні функціонали $u(v,x,t)$ задовольняють задачу Коші (11).

Зауваження 3. При $a = 1$ маємо

$$\left\{\frac{\partial^3}{\partial t^3}u(x,t) + 2\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) - v^2\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial t}u(x,t)\right\} +$$

$$+\left\{\lambda\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 2\lambda^2\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - v^2\lambda\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}u(x,t) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\} +$$

$$+\lambda\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}u(x,t) + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t}u(x,t) - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t)\right\} = 0,$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \lambda\right\}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2} + 2\lambda\frac{\partial}{\partial t} - v^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right\}u(x,t) = 0.$$

Це факторизоване рівняння, друга компонента якого співпадає з телеграфним рівнянням (див., наприклад, [8]). Відповідно, якщо $u(x,t)$ задовольняє (11) при $a = 1$, то вона задовольняє телеграфне рівняння.

1. *Кац М.* Несколько вероятностных задач физики и математики. – М.: Наука, 1967. – 176 с.
2. *Турбин А. Ф.* Одномерный процесс броуновского движения — альтернатива модели А. Эйнштейна – Н. Винера – П. Леви // Фрактал. аналіз та суміж. питання. – К: Ін-т математики НАН України, 1998.
3. *Левин Б. Р.* Теоретические основы статистической радиотехники. Книга первая. – М.: Сов. радио, 1966. – 728 с.
4. *Самойленко И. В.* Моменты марковских случайных эволюций // Укр. мат. журн. (у друці).
5. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендетные функции. – М.: Наука, 1996. – 296 с.
6. *Koroljuk V. S., Turbin A. F.* Mathematical foundation of state lumping of large systems. – Amsterdam: Kluver Acad. Press, 1990. – 280 p.
7. *Samoilenko I. V.* Integral representation of hyperparabolical equation // Nonlinear oscillations (to appear).
8. *Глиннер Э. Б., Кошляков Н. С.* Уравнения в частных производных математической физики. – М.: Высш. шк., 1970. – 712 с.

Одержано 23.01.01