УДК 517.986

Є. В. Черемних (Ун-т „Львівська політехніка")

ПРО СТІЙКІСТЬ З ЧАСОМ ПРОСТОРОВОЇ АСИМПТОТИКИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЕВОЛЮЦІЙНИХ РІВНЯНЬ

We obtain some solutions of the heat conduction equation on a semi-axis which preserve in time the asymptotic representation of a function determining solutions at initial time. This property is true in the presence of complex-valued power decreasing potential. We present some estimate for the rate of "destruction" of solution structure.

Одержано деякі розв'язки рівняння теплопровідності на півосі, що зберігають з часом асимптотичне зображення функції, яка задає розв'язок у початковий момент часу. Вказана властивість зберігається і при наявності комплекснозначного степенево спадного потенціалу. Наведено деяку оцінку для швидкості „руйнування" структури розв'язку.

Відомо, що задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad u|_{t=0} = u_0(x), \quad x > 0, \qquad u|_{x=0} = 0, \tag{1}$$

має розв'язок [1, с. 233]

$$u(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a^2 t}} \left\{ e^{-(y-x)^2/4a^2 t} - e^{-(y+x)^2/4a^2 t} \right\} u_0(y)\, dy. \tag{2}$$

Розглянемо асимптотику розв'язку $u(x,t)$, $x \to \infty$, при фіксованому значенні t у випадку, коли $u_0(x) = 0$, $0 < x < 1$, і $u_0(x) = x^{-\beta}$, $1/2 < \beta < 1$, $x > 1$. Нехай для спрощення $4a^2 t = 1$.

Розіб'ємо величину

$$I(x) \equiv \int_1^\infty e^{-(x-y)^2} \frac{dy}{y^\beta}$$

на два інтеграли відповідно по проміжках $(1, x)$ і (x, ∞). Після заміни змінної одержуємо

$$I_1(x) \equiv \int_1^x e^{-(x-y)^2} \frac{dy}{y^\beta} = \int_0^{x-1} e^{-s^2} \frac{ds}{(x-s)^\beta} =$$

$$= x^{-\beta} \int_0^{x-1} e^{-s^2} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{-\beta} ds = x^{-\beta} \int_0^{x-1} e^{-s^2} \left(1 + \sum_{k=1}^\infty c_k \frac{s^k}{x^k}\right) ds$$

і, позначаючи $\Phi(s) = -\int_x^\infty e^{-u^2}\, du$, одержуємо

$$I_2(x) \equiv \int_x^\infty e^{-(x-y)^2} \frac{dy}{y^\beta} = -\Phi(0) x^{-\beta} + \beta \int_0^\infty \frac{\Phi(s)}{(s+x)^{\beta+1}}\, ds,$$

де

$$\left| \int_0^\infty \frac{\Phi(s)}{(s+x)^{\beta+1}}\, ds \right| \le x^{-\beta-1} \int_0^\infty |\Phi(s)|\, ds.$$

Таким чином,

© Є. В. ЧЕРЕМНИХ, 2002

$$I(x) = I_1(x) + I_2(x) = Cx^{-\beta}\left[1+O(x^{-1})\right], \quad x \to \infty, \tag{3}$$

де $C = 1 - \Phi(0)$. Очевидно, для всіх $t > 0$ розв'язок (2) має вигляд (3) при деякому значенні $C = C(t)$.

Наведений приклад підводить до питання, яке і розглядається в даній статті, про розширення як множини початкових даних, так і класу рівнянь, для яких має місце збереження асимптотичного зображення.

Позначимо через $U \subset L^2(0,\infty)$ множину функцій $u(x)$ таких, що $u(0) = 0$, похідні $u'(x)$, $u''(x)$ обмежені при $x \to 0$, $xu'(x)$, $x^2u''(x) \to 0$, $x \to \infty$, а також $u^{(k)} \in L^2(0,\infty)$, $k = 0, 1, 2, 3$. Нехай L — оператор в $L^2(0,\infty)$, породжений виразом $ly = -y''$ і умовою $y(0) = 0$, і

$$\mathcal{F}u(\sigma) = \int_0^\infty u(x)\frac{\sin x\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\,dx$$

— перетворення, що діагоналізує оператор L.

Лема 1. 1) *Якщо* $u \in U$, *то функція* $\varphi = \mathcal{F}u$ *задовольняє умови*

$$\text{а)} \int_0^\infty \left|\left(\sqrt{\sigma}\varphi(\sigma)\right)'\right| d\sigma < \infty; \qquad \text{б)} \int_0^\infty \sqrt{\sigma}|\varphi(\sigma)|\,d\sigma < \infty; \tag{4}$$

2) *якщо* $\varphi = \mathcal{F}u$ *задовольняє умову* (4а), *то*

$$u(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty.$$

Доведення. 1) Оскільки $u \in U$, то інтегруванням частинами знаходимо

$$\sqrt{\sigma}\varphi(\sigma) = \int_0^\infty u(x)\sin x\sqrt{\sigma}\,dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\int_0^\infty u'(x)(\cos x\sqrt{\sigma} - 1)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\int_0^\infty u''(x)\left(\frac{\sin x\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}} - x\right)dx = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\int_0^\infty u''(x)\left(-\frac{\cos x\sqrt{\sigma}}{\sigma} - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{\sigma}\right)dx,$$

але

$$\int_0^\infty u'''(x)x^2\,dx = -2\int_0^\infty xu''(x)\,dx = 2\int_0^\infty u'(x)\,dx = 0,$$

отже, $\sqrt{\sigma}\varphi(\sigma) = O(1/\sigma\sqrt{\sigma})$, $\sigma \to \infty$, і оцінку (4б) доведено. Аналогічно доводиться оцінка 4а).

2) З умови 4а) і тотожності

$$\sqrt{\sigma_1}\varphi(\sigma_1) - \sqrt{\sigma}\varphi(\sigma) = \int_\sigma^{\sigma_1}\left(\sqrt{\sigma}\varphi(\sigma)\right)' d\sigma$$

випливає існування скінченних границь функції $\sqrt{\sigma}\varphi(\sigma)$ при $\sigma \to 0$ і $\sigma \to \infty$. Тому з тотожності

$$\int_a^b \varphi(\sigma)\sin x\sqrt{\sigma}\,d\sigma = -\frac{2}{x}\sqrt{\sigma}\varphi(\sigma)\cos x\sqrt{\sigma}\Big|_a^b + \frac{2}{x}\int_a^b\left(\sqrt{\sigma}\varphi(\sigma)\right)'\cos x\sqrt{\sigma}\,d\sigma$$

випливає

$$\left|\int_a^b \varphi(\sigma)\sin x\sqrt{\sigma}\,d\sigma\right| \le \frac{C}{x},$$

де значення C не залежить від a і b. Використовуючи вираз оберненого перетворення $\mathcal{F}^{-1}$, маємо

$$u(x) = \left(\mathcal{F}^{-1}\varphi\right)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \varphi(\sigma)\sin x\sqrt{\sigma}\,d\sigma = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty.$$

Лему доведено.

Лема 2. *Нехай k, l — дійсні числа. Тоді функція*

$$z(\tau) = \int_0^\tau \exp\left(i\left[k\sigma + l\sqrt{\sigma}\,\right]\right)d\sigma$$

обмежена при $\tau\to\infty$ рівномірно відносно $l\in(-\infty,\infty)$ при $k = \mathrm{const}$, $k\ne 0$.

Доведення. Нехай $\theta = \sqrt{\sigma}$, $l_1 = -l^2/4k$. Тоді, виконуючи заміну $z = \theta + l/2k$, одержуємо

$$z(\tau) = 2\int_0^{\sqrt{\tau}} \theta\exp\left(i\left[k\theta^2 + l\theta\right]\right)d\theta = 2\int_{1/2k}^{\sqrt{\tau}+l/2k}\left(z - \frac{1}{2k}\right)\exp\left(i\left[kz^2 + l_1\right]\right)dz =$$

$$= \frac{1}{ik}e^{il_1}\left[e^{ik(\sqrt{\tau}+l/2k)^2} - e^{ik(l/2k)^2}\right] - \frac{l}{k}e^{il_1}\int_{l/k}^{\sqrt{\tau}+l/k} e^{ikz^2}\,dz.$$

Рівномірність оцінки відносно l випливає з асимптотичного зображення інтегралів Френеля [2, с. 124–125]. Лему доведено.

Позначимо через $\mathcal{H}$ множину двічі неперервно диференційовних обмежених разом з 1-ю похідною в $[0,\infty)$ функцій $h(\sigma)$ таких, що: а) $h(\sigma) = e^{ik\sigma}$, $\operatorname{Im} k = 0$ або б) існують $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ такі, що

$$|h(\sigma)| < Ce^{-\varepsilon_1\sigma}, \qquad |h'(\sigma)| < Ce^{-(1+\varepsilon_2)\sigma}, \quad \sigma > 0. \tag{5}$$

Для довільних $x_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, $0 < \alpha < 1/2$ позначимо

$$u_{\sigma_0\alpha}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x^{1-\alpha}}\left[C_1\cos x\sqrt{\sigma_0} + C_2\sin x\sqrt{\sigma_0}\,\right], & x > x_0, \\ 0, & 0 < x < x_0, \end{cases} \tag{6}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі величини.

Лема 3. *Нехай $h\in\mathcal{H}$. Тоді*:

а) якщо $u\in U$, то

$$(h(L)u)(x) = O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty; \tag{7}$$

б) якщо $u = u_{\sigma_0\alpha}$, то

$$(h(L)u)(x) = h(\sigma_0)u(x) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x\to\infty. \tag{8}$$

Доведення. а) Оскільки відображення $\mathcal{F}$ діагоналізує оператор L, то $\psi(\sigma)\equiv(\mathcal{F}h(L)\varphi)(\sigma) = h(\sigma)\varphi(\sigma)$, $\varphi = \mathcal{F}u$. Згідно з лемою 1 функція φ задовольняє умову (4), тому з тотожності

$$\left(\sqrt{\sigma}\,\varphi(\sigma)h(\sigma)\right)' = \left(\sqrt{\sigma}\,\varphi(\sigma)\right)' h(\sigma) + \sqrt{\sigma}\,\varphi(\sigma)h'(\sigma)$$

випливає, що функція ψ задовольняє умову 4а), що й доводить (7).

б) Обмежуємося випадком $C_1 = 0$, $C_2 = 1$; випадок $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ розглядається аналогічно. Маємо

$$\mathcal{F}u_{\sigma_0\alpha}(\sigma) = \int_{x_0}^{\infty} x^{\alpha-1} \sin x\sqrt{\sigma_0}\,\frac{\sin x\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sigma}}\int_{x_0}^{\infty} x^{\alpha-1}\left[\cos x\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right| - \cos x\left(\left|\sqrt{\sigma}+\sqrt{\sigma_0}\right|\right)\right]dx =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\sigma}\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right|^{\alpha}}\int_{x_0\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right|}^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau - \frac{1}{2\sqrt{\sigma}\left(\sqrt{\sigma}+\sqrt{\sigma_0}\right)^{\alpha}}\int_{x_0\left|\sqrt{\sigma}+\sqrt{\sigma_0}\right|}^{\infty}\frac{\cos\tau}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau.$$

Відповідно до різниці цих інтегралів розглянемо різницю двох функцій

$$\varphi(\sigma) = \mathcal{F}\left(h(L)-h(\sigma_0)\right)u_{\sigma_0\alpha}(\alpha) = \left(h(\sigma)-h(\sigma_0)\right)\mathcal{F}u_{\sigma_0\alpha}(\sigma) \equiv \varphi_1(\sigma) - \varphi_2(\sigma).$$

Спочатку використаємо умову 4а). Розглянемо тільки функцію $\varphi_1(\sigma)$, функція $\varphi_2(\sigma)$ розглядається аналогічно. Позначимо

$$h_1(\sigma) \equiv \frac{h(\sigma)-h(\sigma_0)}{\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right|^{\alpha}}.$$

Тоді

$$2\sqrt{\sigma}\,\varphi_1(\sigma) = h_1(\sigma)\int_{x_0\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right|}\frac{\cos\tau}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau,$$

звідки

$$2\left(\sqrt{\sigma}\,\varphi_1(\sigma)\right)' = h_1'(\sigma)\int_{x_0\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right|}\frac{\cos\tau}{\tau^{1-\alpha}}\,d\tau - x_0^{\alpha}h_1(\sigma)\frac{\cos x_0\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right|}{2\sqrt{\sigma}\left|\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}\right|^{1-\alpha}} \equiv$$

$$\equiv \psi_1(\sigma) - \psi_2(\sigma).$$

Нехай спочатку функція $h(\sigma)$ задовольняє умову 5б); тоді, як легко бачити, $h_1'(\sigma) = O\left(\sigma^{-1-\alpha/2}\right)$, $\sigma\to\infty$. Оскільки функція $h''(\sigma)$ неперервна, то функція $h_1'(\sigma)$ має інтегровну особливість у точці σ_0 і, отже, $h_1'(\sigma)\in L^1(0,\infty)$, а тому $\psi_1(\sigma)\in L^1(0,\infty)$.

Зауважимо, що умову 4а) в твердженні 2 леми 1 можна замінити наступною:

$$\left|\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\left(\sqrt{\sigma}\,\varphi(\sigma)\right)'\cos x\sqrt{\sigma}\,d\sigma\right| \le M, \quad x > x_0, \tag{4'}$$

де значення M не залежить від $\sigma_1, \sigma_2 > \sigma_0$ та x. Тепер, якщо $h(\sigma)$ задовольняє 5а), то інтеграл (4′), що містить $\psi_1(\sigma)$, достатньо проінтегрувати частинами. Більш детально розглянемо цю дію тільки у випадку функції $\psi_2(\sigma)$, тому що обидва випадки аналогічні. Отже, залишається оцінити інтеграл $\int_{\sigma_1}^{\sigma_2}\psi_2(\sigma)\cos x\sqrt{\sigma}\,d\sigma$ або (перетворюючи добуток косинусів у суму) довести, наприклад, нерівність

$$\left|\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{h(\sigma)-h(\sigma_0)}{\sqrt{\sigma}(\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0})}\cos((x+x_0)\sqrt{\sigma}-x_0\sqrt{\sigma_0})\,d\sigma\right| \le M, \quad \sigma_1,\ \sigma_2>\sigma_0.$$

Інтегруванням частинами переконуємося, що інтеграл

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\sqrt{\sigma}(\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}))^{-1}\cos((x+x_0)\sqrt{\sigma}-x_0\sqrt{\sigma_0})d\sigma$$

має рівномірну оцінку в області $\sigma_1, \sigma_2 > \sigma_0 + 1$, $x > 1$. Залишається розглянути інтеграл

$$I(x) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{h(\sigma))}{\sqrt{\sigma}(\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0})}\cos((x+x_0)\sqrt{\sigma}-x_0\sqrt{\sigma_0})d\sigma.$$

У випадку 5б) оцінка $|I(x)| \le M$, $x > x_0$, є тривіальною, у випадку 5а) використаємо допоміжну функцію

$$\Phi(\sigma) = \int_{\sigma_1}^{\sigma} \frac{e^{iku}}{\sqrt{u}}\cos((x+x_0)\sqrt{u}-x_0\sqrt{\sigma_0})du.$$

Тоді

$$I(x) = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\Phi(\sigma)}{\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}} = \left.\frac{\Phi(\sigma)}{\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0}}\right|_{\sigma_1}^{\sigma_2} + \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{\Phi(\sigma)}{(\sqrt{\sigma}-\sqrt{\sigma_0})^2}\frac{d\sigma}{2\sqrt{\sigma}}$$

і оцінка $|I(x)| \le M$, $x \in [0,\infty)$, випливає з леми 2. Лему доведено.

Теорема. *Нехай* $u(x,t)$, $t > 0$, *— розв'язок задачі* (1). *Тоді якщо*

$$u_0(x) = u_{\sigma_0\alpha}(x) + u_1(x), \quad u_1 \in U, \tag{9}$$

то

$$u(x,t) = e^{-t\sigma_0}u_{\sigma_0\alpha}(x) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty. \tag{10}$$

Доведення випливає з леми 3 у випадку $h(\sigma) = e^{-\sigma t}$.

Розглянемо інтерпретацію розкладу (9), а також (8) у термінах C^∞-векторів оператора L [3, с. 224]. Виберемо довільну функцію $w_{\sigma_0\alpha}(x)$ таку, що функція

$$v_{\sigma_0\alpha}(x) = \begin{cases} u_{\sigma_0\alpha}(x), & x > x_0, \\ w_{\sigma_0\alpha}(x), & 0 < x < x_0, \end{cases}$$

належить до простору $C^\infty(0,\infty)$ і $v_{\sigma_0\alpha}(x) \equiv 0$ в околі точки $x = 0$. Безпосередньо з (6) випливає

$$L^k v_{\sigma_0\alpha}(x) = \sigma_0^k v_{\sigma_0\alpha}(x) + O\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \to \infty, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

тобто $v_{\sigma_0\alpha}$ є C^∞-вектором оператора L.

Позначимо через $H_0 \subset L^2(0,\infty)$ лінійний підпростір, породжений елементами $(h(L)-h(\sigma_0))v_{\sigma_0\alpha}$ для всіх $x_0 > 0$, $\sigma_0 > 0$, $0 < \alpha < 1/2$ та всіх функцій $h(\sigma)$, що задовольняють умову 5б).

Лема 4. 1) *Множина* H_0 *утворена* C^∞*-векторами оператора* L *і є щільною в просторі* $L^2(0, \infty)$;

2) $(L-\zeta)^{-1}H_0 \subset H_0$, $\zeta \notin [0, \infty)$;

3) *якщо* $u \in H_0$, *то* $u(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to \infty$.

Доведення. 1) тривіальне.

2) Якщо $(\sigma-\zeta)^{-1}(h(\sigma)-h(\sigma_0)) = g(\sigma)-g(\sigma_0)$, де $g(\sigma_0)=0$ і функція $h(\sigma)$ задовольняє 5б), то функція $g(\sigma)$ також задовольняє 5б).

3) Нехай $u(x) = (h(L)-h(\sigma_0))v_{\sigma_0\alpha} = (h(L)-h(\sigma_0))u_{\sigma_0\alpha} + (h(L)-h(\sigma_0))w_{\sigma_0\alpha}$, де функція $w_{\sigma_0\alpha}$ продовжена нулем на (x_0, ∞). Враховуючи лему 3, достатньо довести, що функція $\tilde{u}(x) = (h(L)-h(\sigma_0))w_{\sigma_0\alpha}(x)$ має оцінку $\tilde{u}(x) = O\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \to \infty$. Згідно з (4′) достатньо довести, що

$$\left|\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (\sqrt{\sigma}\mathcal{F}u(\sigma))' \cos x\sqrt{\sigma}\, d\sigma\right| \le M, \quad x > x_0,$$

або

$$\left|\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \left((h(\sigma)-h(\sigma_0)) \int_0^{x_0} w_{\sigma_0\alpha}(y)\sin y\sqrt{\sigma}\, dy\right)' \cos x\sqrt{\sigma}\, d\sigma\right| \le M, \quad x > x_0.$$

Остання нерівність випливає з властивостей функції $h \in \mathcal{H}$, наприклад, при розгляді виразу

$$\int_0^{x_0} y w_{\sigma_0\alpha}(y)\left(\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (h(\sigma)-h(\sigma_0))\sin y\sqrt{\sigma}\cos x\sqrt{\sigma}\frac{d\sigma}{\sqrt{\sigma}}\right)dy$$

можна використати інтегрування частинами такого типу:

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} (h(\sigma)-h(\sigma_0))d\Psi(\sigma) = (h(\sigma)-h(\sigma_0))\Psi(\sigma)\Big|_{\sigma_1}^{\sigma_2} - \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \Psi(\sigma)h'(\sigma)d\sigma.$$

Лему доведено.

Згідно з лемою 4 розклад

$$h(L)v_{\sigma_0\alpha} = h(\sigma_0)v_{\sigma_0\alpha} + (h(L)-h(\sigma_0))v_{\sigma_0\alpha}$$

означає розклад відповідно до прямої суми $\mathrm{Lin}\left\{v_{\sigma_0\alpha}\right\} \dotplus H_0$, тобто

$$h(L)v_{\sigma_0\alpha} = h(\sigma_0)v_{\sigma_0\alpha} (\mathrm{mod}\, H_0)$$

і значення σ_0 можна розглядати як *власне значення за* $\mathrm{mod}\, H_0$.

Розглянемо випадок $u_1(x) \equiv 0$ (див. (9)), тоді функція $u_1(x,t) \equiv u(x,t) - e^{-t\sigma_0}u_{\sigma_0\alpha}(x)$ є збуренням форми початкових даних. Найбільше значення x таке, що $|u_1(x,t)| = e^{-t\sigma_0}/x^{1-\alpha}$ будемо називати *точкою руйнування* структури розв'язку. Як випливає з доведення леми 3, має місце оцінка $|u_1(x,t)| \le n(t)/x$ де $n(t)$ — деяка функція така, що

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\ln n(t)}{t} = 0.$$

Тоді з рівності $n(t) / x = e^{-t\sigma_0} / x^{1-\alpha}$ випливає $(\ln x)/t \to \sigma_0/\alpha$, $t \to \infty$, тобто за логарифмічною шкалою середня швидкість руйнування структури розв'язку не перевищує значення σ_0/α.

Зауважимо, що асимптотичне зображення (8) відповідає точці розриву у синус — перетворення Фур'є $\varphi = \mathcal{F} u$. Дійсно, згідно з доведенням леми 3

$$\mathcal{F} u_{\sigma_0\alpha}(\alpha) = \frac{\varphi_0(\sigma)}{|\sigma - \sigma_0|^\alpha}, \quad \sigma \neq \sigma_0, \quad 0 < \alpha < \frac{1}{2}, \tag{11}$$

де функція $\varphi_0(\sigma)$ диференційовна в околі точки σ_0.

Асимптотичне зображення (8) має місце також для операторів більш загальних, ніж L. Розглянемо оператор $M = L + Q$, де $(Qu)(x) = q(x)u(x)$ і комплексно-значний потенціал $q(x)$ має степеневу швидкість спадання при $x \to \infty$ (як x^{-n}, $n \geq 2$ у випадку $\operatorname{Im} q(x) \equiv 0$).

Можна показати, що

$$\mathcal{F} h(M) \mathcal{F}^{-1} \varphi(\sigma) = h(\sigma)\varphi(\sigma) + \int_0^\infty K(\sigma, s)\varphi(s)ds,$$

де $K(\sigma, s)$ — деяка гладка функція своїх аргументів. Звідси випливає, що у випадку гладкої функції $h(\sigma)$ точка розриву типу (11) є інваріантною відносно дії оператора $\mathcal{F} h(M) \mathcal{F}^{-1}$ і твердження теореми можна перенести на випадок рівняння

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + q(x)u, \quad x > 0.$$

Отже, як характер асимптотики, так і оцінка швидкості її руйнування не залежать від теплообміну з зовнішнім середовищем, якщо коефіцієнт $q(x)$ спадає при $x \to \infty$ як степенева функція.

Відмітимо, що асимптотика при $t \to \infty$ розв'язків рівняння $u'(t) = Au(t)$, $u(0) = u_0$, де A — абстрактно заданий оператор, встановлюється для C^∞-векторів u_0 оберненого оператора A^{-1} [4, 5].

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
2. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 830 с.
3. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. – М.: Мир, 1979. – Т. 2. – 395 с.
4. *Виннишин Я. Ф., Горбачук М. Л.* Поведение на бесконечности решений дифференциально-операторных уравнений // Укр. мат. журн. – 1983. – **35**, № 4. – С. 489–493.
5. *Горбачук В. М.* Поведінка на нескінченності розв'язків еволюційних рівнянь // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1985. – № 9. – С. 13–15.

Одержано 13.03.00