УДК 517.9

Г. П. Пелюх (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

О ГЛОБАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОТКЛОНЕНИЯМИ АРГУМЕНТА, ЗАВИСЯЩИМИ ОТ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

For a system of nonlinear functional-differential equations with nonlinear deviations of an argument, we obtain sufficient conditions for the existence of a continuously differentiable solution finite for $t \in R$.

Одержано достатні умови існування неперервно диференційовного і обмеженого при $t \in R$ розв'язку системи нелінійних диференціально-функціональних рівнянь з нелінійними відхиленнями аргумента.

В настоящее время имеется большое количество работ (достаточно полную библиографию можно найти в [1, 2]), посвященных развитию теории дифференциально-функциональных уравнений вида

$$x'(t) = f\big(t, x(t), x(\varphi(t, x(t), x'(t))), x'(\psi(t, x(t), x'(t)))\big).$$

Достаточно хорошо исследован случай, когда функции φ, ψ являются линейными функциями аргумента t. Но для случая, когда отклонения аргумента зависят от неизвестной функции и ее производной (такие уравнения нередко встречаются при описании реальных процессов), имеются лишь отдельные результаты. Так, в [3–6] получены условия существования и единственности непрерывно дифференцируемого решения таких уравнений в случае $\varphi = \varphi(t, x(t))$, $\psi = \psi(t, x(t))$, а в [7] аналогичные результаты установлены для случая, когда функции φ, ψ зависят от неизвестной функции и ее производной. Основной целью настоящей статьи является получение условий существования и единственности на R решений системы нелинейных дифференциально-функциональных уравнений вида

$$x'(t) = \Lambda x(t) + f\big(t, x(t), x(\varphi(t, x(t), x'(t))), x'(\psi(t, x(t), x'(t)))\big), \tag{1}$$

где Λ — постоянная $(n \times n)$-мерная матрица, $f: R \times R^n \times R^n \times R^n \to R^n$, $\varphi: R \times R^n \times R^n \to R$, $\psi: R \times R^n \times R^n \to R$. Систему (1) можно рассматривать как возмущенную линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений $x'(t) = \Lambda x(t)$.

Далее будем предполагать, что вещественные части собственных значений λ_i, $i = \overline{1, n}$, матрицы Λ отличны от нуля. Тогда, как известно, существует неособая постоянная $(n \times n)$-мерная матрица C, приводящая матрицу Λ к виду

$$\Lambda = C^{-1} \operatorname{diag}(\Lambda_1, \Lambda_2) C,$$

где Λ_1, Λ_2 — постоянные $(p \times p)$- и $(n-p) \times (n-p)$-мерные матрицы, собственные значения которых удовлетворяют условиям

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\Lambda_1) > 0, \qquad i = \overline{1, p},$$

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\Lambda_2) < 0, \qquad i = \overline{p+1, n}.$$

Обозначим через $G(t) = (q_{ij}(t))$ матричную функцию

$$G(t) = \begin{cases} -C^{-1}\mathrm{diag}(e^{\Lambda_1 t}, 0)C & \text{при } t < 0, \\ C^{-1}\mathrm{diag}(0, e^{\Lambda_2 t})C & \text{при } t > 0 \end{cases}$$

и рассмотрим систему интегро-дифференциальных уравнений

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) f(\tau, x(\tau), x(\varphi(\tau, x(\tau), x'(\tau))), x'(\psi(\tau, x(\tau), x'(\tau))))\, d\tau. \qquad (2)$$

Принимая во внимание свойства функции $G(t)$:

а) $G(+0) - G(-0) = E$, где E — единичная $(n \times n)$-мерная матрица;

б) $|G(t)| \leq \bar{L} e^{-\alpha t}$ при всех $t \neq 0$, где $\bar{L}$, α — некоторые положительные постоянные, $|G| = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} |q_{ij}|$;

в) $G'(t) = \Lambda G(t)$, $t \neq 0$,

можно показать, что если $x(t)$ — ограниченное при $t \in R$ решение системы уравнений (2), то $x(t)$ является также решением системы (1).

Теорема. *Пусть выполняются условия:*

1) *функции* $f(t, x, y, z)$, $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$ *являются непрерывными и ограниченными при* $t \in R$, $x \in R^n$, $y \in R^n$, $z \in R^n$ *и*

$$\sup_{\substack{t \in R, \\ x \in R^n, y \in R^n, z \in R^n}} |f(t, x, y, z)| = M;$$

2) $$\left| f(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) - f(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}}) \right| \leq L_0 \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + L_1 \left| \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right| + L_2 \left| \bar{y} - \bar{\bar{y}} \right| + L_3 \left| \bar{z} - \bar{\bar{z}} \right|,$$

$$\left| \varphi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) - \varphi(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \right| \leq l'_0 \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + l'_1 \left| \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right| + l'_2 \left| \bar{y} - \bar{\bar{y}} \right|,$$

$$\left| \psi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}) - \psi(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \right| \leq l''_0 \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right| + l''_1 \left| \bar{x} - \bar{\bar{x}} \right| + l''_2 \left| \bar{y} - \bar{\bar{y}} \right|,$$

где L_3, L_i, l'_i, l''_i, $i = 0, 1, 2,$ — *некоторые положительные постоянные* $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}, \bar{\bar{z}}) \in R \times R^n \times R^n \times R^n$, $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{y})$, $(\bar{\bar{t}}, \bar{\bar{x}}, \bar{\bar{y}}) \in R \times R^n \times R^n$;

3) $\theta = \max\{|\Lambda| + L_1 + L_2 + L_3, l(L_1 + L_2 + L_3)\} < 1$, $0 < l'_i < 1$,

$$0 < l''_i < 1, \quad i = 0, 1, 2, \qquad L_0 + (|\Lambda| l + 1)M \leq \frac{(1-\theta)^2}{4\theta},$$

где

$$l = \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t)|\, dt.$$

Тогда при достаточно малых l'_i, l''_i, $i = 0, 1, 2$, *система уравнений* (2) *имеет единственное непрерывно дифференцируемое при* $t \in R$ *решение, удовлетворяющее условиям.*

$$|x(t)| \leq M_0, \qquad |x'(t)| \leq M_1, \qquad t \in R,$$

$$\left| x'(\bar{t}) - x'(\bar{\bar{t}}) \right| \leq L \left| \bar{t} - \bar{\bar{t}} \right|, \qquad \bar{t}, \ \bar{\bar{t}} \in R,$$

где

$$M_0 = lM, \qquad M_1 = (|\Lambda| l + 1)M, \qquad L = \frac{1-\theta}{2\theta} + \frac{1-\theta}{2\theta} \sqrt{1 - \frac{4\theta(L_0 + (|\Lambda| l + 1)M)}{(1-\theta)^2}}.$$

Доказательство. Пусть $C^1(R)$ — множество непрерывно дифференцируемых вектор-функций $x(t)$, являющихся ограниченными вместе с первыми производными при $t \in R$. Полагая

$$\rho(x(t), x(t)) = \max\{\|x(t)-y(t)\|, \|x'(t)-y'(t)\|\},$$

где

$$\|x(t)-y(t)\| = \sup_t |x(t)-y(t)|, \qquad \|x'(t)-y'(t)\| = \sup_t |x'(t)-y'(t)|,$$

введем в $C^1(R)$ метрику ρ. Тогда множество $C^1(R)$ с метрикой ρ является полным метрическим пространством. Обозначим через $C^{1,L}(R)$ множество вектор-функций $x(t)$, принадлежащих пространству $C^1(R)$ и удовлетворяющих условиям

$$|x(t)| \le M_0, \qquad |x'(t)| \le M_1, \qquad t \in R, \tag{3}$$

$$\left|x'(\bar{t}) - x'(\bar{\bar{t}})\right| \le L\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|, \qquad \bar{t},\ \bar{\bar{t}} \in R, \tag{4}$$

Нетрудно показать, что множество $C^{1,L}(R)$ является компактным в себе.

С помощью соотношения

$$Tx(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t-\tau) f(\tau, x(\tau), x(\varphi(\tau, x(\tau), x'(\tau))), x'(\psi(\tau, x(\tau), x'(\tau))))\,d\tau \tag{5}$$

определим отображение T и покажем, что оно является сжатым отображением множества $C^{1,L}(R)$ в себе.

Сначала покажем, что отображение T переводит множество $C^{1,L}(R)$ в себя. В самом деле, если $x(t) \in C^{1,L}(R)$, то

$$\frac{d(Tx(t))}{dt} = \Lambda x(t) + f(t, x(t), x(\varphi(t, x(t), x'(t))), x'(\psi(t, x(t), x'(t)))). \tag{6}$$

Тогда в силу условий 1, 2 вектор-функция $Tx(t)$ является непрерывно дифференцируемой при $t \in R$ и согласно (5), (6) имеем

$$|Tx(t)| \le M \int_{-\infty}^{\infty} |G(t-\tau)|\,dt \le Ml = M_0,$$

$$\left|\frac{dTx(t)}{dt}\right| \le |\Lambda| M_0 + M \le M_1,$$

т. е. вектор-функция $Tx(t)$ удовлетворяет условию (3). Далее, поскольку в силу условия 3 при достаточно малых l_i', l_i'', $i = 0, 1, 2$, имеем

$$|\Lambda| + L_1 + L_2\left(l_0' + l_1' M_1\right) \le 1,$$

$$L_2 l_2' M_1 + L_3\left(l_0'' + l_1'' M_1\right) \le \theta, \qquad L_3 l_2'' \le \theta,$$

$$l\left[L_1 + L_2 + L_3 + L_2\left(l_1' + l_2'\right)M_1 + L_3\left(l_1'' + l_2''\right)L\right] \le \Delta < 1,$$

$$|\Lambda| + L_1 + L_2 + L_3 + L_2\left(l_1' + l_2'\right)M_1 + L_3\left(l_1'' + l_2''\right)L \le \Delta,$$

то, принимая во внимание (6) и условия 1–3, получаем

$$\left|\frac{d(Tx(\bar{t}))}{dt} - \frac{d(Tx(\bar{\bar{t}}))}{dt}\right| \le |\Lambda|\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| + L_0\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + L_1\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| +$$

$$+ L_2\left|x(\varphi(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t}))) - x\left(\varphi(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}), x'(\bar{\bar{t}}))\right)\right| +$$

$$+ L_3\left|x'(\psi(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t}))) - x'\left(\psi(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}), x'(\bar{\bar{t}}))\right)\right| \le$$

$$\le |\Lambda| M_1\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + L_0\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + L_1 M_1\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| +$$

$$+ L_2 M_1\left|\varphi(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t})) - \varphi(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}), x'(\bar{\bar{t}}))\right| +$$

$$+ L_3 L\left|\psi(\bar{t}, x(\bar{t}), x'(\bar{t})) - \psi(\bar{\bar{t}}, x(\bar{\bar{t}}), x'(\bar{\bar{t}}))\right| \le$$

$$\le (L_0 + |\Lambda| M_1 + L_1 M_1)\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| +$$

$$+ L_2 M_1\left(l'_0\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + l'_1\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| + l'_2\left|x'(\bar{t}) - x'(\bar{\bar{t}})\right|\right) +$$

$$+ L_3 L\left(l''_0\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + l''_1\left|x(\bar{t}) - x(\bar{\bar{t}})\right| + l''_2\left|x'(\bar{t}) - x'(\bar{\bar{t}})\right|\right) \le$$

$$\le (L_0 + |\Lambda| M_1 + L_1 M_1)\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| + L_2 M_1\left(l'_0 + l'_1 M_1 + l'_2 L\right)\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| +$$

$$+ L_3 L\left(l''_0 + l''_1 M_1 + l''_2 L\right)\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| \le$$

$$\le \left(L_0 + M_1 + \theta L + \theta L^2\right)\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right| = L\left|\bar{t} - \bar{\bar{t}}\right|.$$

Следовательно, вектор-функция $Tx(t)$ принадлежит множеству $C^{1,L}(R)$.

Теперь покажем, что отображение T сжато. В самом деле, принимая во внимание (3)–(6) и условия 1–3, имеем

$$|Tx(t) - Ty(t)| \le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|\, |f(\tau, x(\tau), x(\varphi(\tau, x(\tau), x'(\tau))), x'(\psi(\tau, x(\tau), x'(\tau)))) -$$

$$- f(\tau, y(\tau), y(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau))), y'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau))))|\, d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|\, (L_1|x(\tau) - y(\tau)| + L_1|x(\varphi(\tau, x(\tau), x'(\tau))) - y(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))| +$$

$$+ L_3|x'(\psi(\tau, x(\tau), x'(\tau))) - y'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))|)\, d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|\, (L_1|x(\tau) - y(\tau)| + L_2|x(\varphi(\tau, x(\tau), x'(\tau))) - x(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))| +$$

$$+ L_2|x(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau))) - y(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))| +$$

$$+ L_3|x'(\psi(\tau, x(\tau), x'(\tau))) - x'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))| +$$

$$+ L_3|x'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau))) - y'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))|\,)\, d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)|\, (L_1|x(\tau) - y(\tau)| + L_2 M_1|\varphi(\tau, x(\tau), x'(\tau)) - \varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau))| +$$

$$+ L_2|x(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau))) - y(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))| +$$

$$+ L_3 L|\psi(\tau, x(\tau), x'(\tau)) - \psi(\tau, y(\tau), y'(\tau))| +$$

$$+ L_3|x'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau))) - y'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))|)\, d\tau \le$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| \Big(L_1 |x(\tau) - y(\tau)| + L_2 M_1 \big(l_1' |x(\tau) - y(\tau)| + l_2' |x'(\tau) - y'(\tau)| \big) +$$

$$+ L_2 |x(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau))) - y(\varphi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))| +$$

$$+ L_3 L \big(l_1'' |x(\tau) - y(\tau)| + l_2'' |x'(\tau) - y'(\tau)| \big) +$$

$$L_3 |x'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau))) - y'(\psi(\tau, y(\tau), y'(\tau)))| \Big) d\tau \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |G(t-\tau)| \big[(L_1 + L_2 M_1 l_1' + L_2 + L_3 L\, l_1'') \| x(\tau) - y(\tau) \| +$$

$$+ (L_2 M_1 l_2' + L_3 L\, l_2'' + L_3) \| x'(\tau) - y'(\tau) \| \big] d\tau \leq$$

$$\leq l \big[L_1 + L_2 + L_3 + L_2 M_1 (l_1' + l_2') + L_3 L (l_1'' + l_2'') \big] \rho(x(t), y(t)) \leq \Delta \rho(x(t), y(t)),$$

$$\left| \frac{d(Tx(t))}{dt} - \frac{d(Ty(t))}{dt} \right| \leq |\Lambda| |x(t) - y(t)| +$$

$$+ | f(t, x(t), x(\varphi(t, x(t), x'(t))), x'(\psi(t, x(t), x'(t)))) -$$

$$- f(t, y(t), y(\varphi(t, y(t), y'(t))), y'(\psi(t, y(t), y'(t)))) | \leq$$

$$\leq |\Lambda| |x(t) - y(t)| + L_1 |x(t) - y(t)| +$$

$$+ L_2 |x(\varphi(t, x(t), x'(t))) - y(\varphi(t, y(t), y'(t)))| +$$

$$+ L_3 |x'(\psi(t, x(t), x'(t))) - y'(\psi(t, y(t), y'(t)))| \leq$$

$$\leq |\Lambda| |x(t) - y(t)| + L_1 |x(t) - y(t)| +$$

$$+ L_2 |x(\varphi(t, x(t), x'(t))) - x(\varphi(t, y(t), y'(t)))| +$$

$$+ L_2 |x(\varphi(t, y(t), y'(t))) - y(\varphi(t, y(t), y'(t)))| +$$

$$+ L_3 |x'(\psi(t, x(t), x'(t))) - x'(\psi(t, y(t), y'(t)))| +$$

$$+ L_3 |x'(\psi(t, y(t), y'(t))) - y'(\psi(t, y(t), y'(t)))| \leq$$

$$\leq (|\Lambda| + L_1) |x(t) - y(t)| + L_2 M_1 \big(l_1' |x(t) - y(t)| + l_2' |x'(t) - y'(t)| \big) +$$

$$+ L_2 |x(\varphi(t, y(t), y'(t))) - y(\varphi(t, y(t), y'(t)))| +$$

$$+ L_3 L \big(l_1'' |x(t) - y(t)| + l_2'' |x'(t) - y'(t)| \big) +$$

$$+ L_3 |x'(\psi(t, y(t), y'(t))) - y'(\psi(t, y(t), y'(t)))| \leq$$

$$\leq \big(|\Lambda| + L_1 + L_2 M_1 l_1' + L_2 + L_3 L\, l_1'' \big) \| x(t) - y(t) \| +$$

$$+ \big(L_2 M_1 l_2' + L_3 L\, l_2'' + L_3 \big) \| x'(t) - y'(t) \| \leq$$

$$\leq \big[|\Lambda| + L_1 + L_2 + L_3 + L_2 M_1 (l_1' + l_2') + L_3 L (l_1'' + l_2'') \big] \rho(x(t), y(t)) \leq \Delta \rho(x(t), y(t)).$$

Из последних соотношений вытекает

$$\| Tx(t) - Ty(t) \| \leq \Delta \rho(x(t), y(t)),$$

$$\left\| \frac{d(Tx(t))}{dt} - \frac{d(Ty(t))}{dt} \right\| \leq \Delta \rho(x(t), y(t)),$$

и следовательно, имеем

$$\rho(Tx(t), Ty(t)) \leq \Delta\rho(x(t), y(t)),$$

т. е., отображение T сжато.

Таким образом, отображение T, определенное формулой (5), переводит $C^{1,L}(R)$ в себя и является сжатым. Тогда, как известно, T имеет единственную неподвижную точку $x \in C^{1,L}(R)$ и

$$x(t) = \lim_{m \to \infty} T^m x_0(t),$$

где $x_0(t)$ — произвольная вектор-функция из $C^{1,L}(R)$. Теорема доказана.

Замечание. Если выполняются условия теоремы и функции $f(t, x, y, z)$, $\varphi(t, x, y)$, $\psi(t, x, y)$ являются $\bar{T}$-периодическими по t, то решение $x(t) \in C^{1,L}(R)$ является $\bar{T}$-периодическим.

1. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения. – М.: Мир, 1967. – 548 с.
2. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1984. – 421 с.
3. *Driver R. D.* Existence and continuous dependence of solutions of a neutral functional-differential equation // Arch. Rat. Mech. and Anal. – 1965. – **19**, № 2. – P. 149–166.
4. *Cruz M. A., Hale J. K.* Existence, uniqueness and continuous dependence for hereditary system // Annali. Mat. Pura Appl. – 1970. – **85** (4). – P. 63–82.
5. *Grimm L. J.* Existence and continuous dependence for a class of nonlinear neutral-differential equation // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – **29**, № 3. – P. 467–473.
6. *Kwapisz M.* On the existence and uniqueness of solutions of certain integral-functional equation // Ann. Pol. Math. – 1975. – **31**, № 1. – P. 23–41.
7. *Животовский Л. А.* О существовании и единственности решений дифференциальных уравнений с запаздыванием, зависящим от решения и его производной // Дифференц. уравнения. – 1969. – **5**, № 5. – С. 880 – 889.

Получено 02.07.99