УДК 517.938

**А. М. Самойленко, Н. В. Степаненко** (Ін-т математики НАН України, Київ)

# ПРО ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ПОВЕДІНКИ ЛІНІЙНИХ РОЗШИРЕНЬ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ТОРІ ПРИ ЗБУРЕННІ ФАЗОВИХ ЗМІННИХ

We investigate classes of linear expansions of dynamical systems on a torus for which the Lyapunov functions exist under arbitrary flow on the torus. We separately consider such linear expansions for which the Lyapunov functions exist only with varying coefficients. We investigate the problem of preservation of regularity under the perturbation of phase variables.

Досліджуються класи лінійних розширень динамічних систем на торі, для яких існують функції Ляпунова при довільному потоці на торі. Окремо виділяються такі лінійні розширення, для яких існують функції Ляпунова тільки зі змінними коефіцієнтами. Досліджується питання збереження регулярності при збуренні фазових змінних.

Розглянемо систему диференціальних рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dt} &= a(\varphi), \\ \frac{dx}{dt} &= P(\varphi)x, \end{aligned} \tag{1}$$

де $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_m) \in T_m$, $T_m$ — $m$-вимірний тор, $x \in R^n$. Припускаємо, що вектор-функція $a(\varphi) = \operatorname{colon}\{a_1(\varphi), a_2(\varphi), \ldots, a_m(\varphi)\}$ задовольняє умову Ліпшица і $2\pi$-періодична за кожною змінною $\varphi_j$, $j = 1, \ldots, m$, тобто $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$. Матрична функція $P(\varphi)$ є неперервною за сукупністю змінних $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ і $2\pi$-періодичною за кожною зі змінних, $P(\varphi) \in C^0(T_m)$.

Позначимо через $\Theta$ множину матричних функцій $P(\varphi)$ таких, що для системи (1) при кожній фіксованій вектор-функції $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$ існує квадратична форма

$$V = \langle S(\varphi)x, x\rangle \tag{2}$$

з невиродженою симетричною і неперервно диференційовною матрицею коефіцієнтів $S(\varphi)$, $S(\varphi) \in C^1(T_m)$, похідна від якої внаслідок системи (1) є додатно визначеною, тобто

$$\dot V = \left\langle \left[ \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi_i} a_i(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi) + P^T(\varphi)S(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2, \quad \forall x \in R^m. \tag{3}$$

Нагадаємо, що через $\langle y, x\rangle = \sum_{j=1}^{n} y_j x_j$ позначаємо скалярний добуток в $R^n$.

Якщо для матричної функції $P(\varphi)$ існує постійна симетрична матриця $S$ така, що

$$\langle [SP(\varphi) + P^T(\varphi)S]x, x\rangle \geq \|x\|^2, \tag{4}$$

то $P(\varphi) \in \Theta$. Слід відмітити, що коли виконується умова (4), тоді матриця $S$ невироджена.

Позначимо через $\overline{\Theta}$ підмножину з $\Theta$ матричних функцій $P(\varphi)$ таких, для яких не існує постійної симетричної матриці $S$, яка б задовольняла умову (4). Легко зауважити, що у скалярному випадку $n = 1$ завжди будемо мати $\overline{\Theta} = \varnothing$. Виявляється, якщо $n \geq 2$, то завжди $\overline{\Theta} \neq \varnothing$.

Дослідженню деяких класів матричних функцій $P(\varphi)$ із множин $\Theta$, $\overline{\Theta}$ присвячено дану статтю.

Розглянемо таку систему рівнянь:

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$
$$\frac{dx_1}{dt} = A(\varphi)x_1 \sin^{2p_1-1}\psi + B_2(\varphi)x_2\cos^{2p_3}\psi, \tag{5}$$
$$\frac{dx_2}{dt} = B_1(\varphi)x_1\cos^{2p_2}\psi - A^T(\varphi)x_2\sin^{2p_1-1}\psi,$$

де $x_1, x_2 \in R^n$, $A(\varphi)$, $B_i(\varphi)$ — $(n \times n)$-вимірні матричні функції з $C^0(T_m)$, $p_1$, $p_2$, $p_3$ — фіксовані натуральні числа, $\psi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_k + \Delta$, $1 \le k \le m$, $\Delta = \text{const} \in R$.

Має місце таке твердження.

**Теорема 1.** *Нехай у системі* (5) *обидві матриці* $B_1(\varphi)$, $B_2(\varphi)$ *є додатно визначеними*

$$\langle B_j(\varphi)x, x\rangle \ge \beta|x|^2, \quad \forall x \in R^n, \quad \beta = \text{const} > 0, \quad j = 1, 2, \tag{6}$$

*а для матричної функції* $A(\varphi)$ *існує постійна симетрична матриця* $S$ *така, що*

$$\langle [SA(\varphi) + A^T(\varphi)S]x, x\rangle \ge \|x\|^2, \quad \forall x \in R^n. \tag{7}$$

*Тоді для будь-якої фіксованої вектор-функції* $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$ *завжди знайдеться достатньо велике фіксоване значення скалярного параметра* $\lambda > 0$ *таке, що похідна квадратичної форми*

$$V = \lambda\langle x_1, x_2\rangle + \langle Sx_1, x_1\rangle \sin\psi - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle \sin\psi \tag{8}$$

*вздовж розв'язків системи* (5) *буде додатно визначеною. Крім того, якщо матрична функція* $A(\varphi)$ *є незалежною хоча б від однієї зі змінних* $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$, *то ні при якій вектор-функції* $a(\varphi) \in C_{\text{Lip}}(T_m)$ *не існує квадратичної форми з постійними коефіцієнтами, яка б мала знаковизначену похідну внаслідок системи* (5).

***Доведення.*** Зробивши заміну змінних $y = Sx$ в нерівності (7), отримаємо

$$\langle [S^{-1}A^T(\varphi) + A(\varphi)S^{-1}]y, y\rangle \ge \|S\|^{-2}\|y\|^2, \quad \forall y \in R^n. \tag{9}$$

Норму матриці $S$ розглядаємо операторну: $\|S\| = \max\|Sx\|$, $x \in R^n$, $\|x\| = 1$. Запишемо похідну квадратичної форми (8) вздовж розв'язків системи (5):

$$\begin{aligned}\dot{V} = {} & \lambda\langle B_1(\varphi)x_1, x_1\rangle\cos^{2p_2}\psi + \lambda\langle B_2(\varphi)x_2, x_2\rangle\cos^{2p_3}\psi + \\ & + [\langle Sx_1, x_1\rangle - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle]\dot{\psi}\cos\psi + \\ & + 2\langle Sx_1, A(\varphi)x_1\sin^{2p_1-1}\psi + B_2(\varphi)x_2\cos^{2p_3}\psi\rangle\sin\psi - \\ & - 2\langle S^{-1}x_2, B_1(\varphi)x_1\cos^{2p_2}\psi - A^T(\varphi)x_2\sin^{2p_1-1}\psi\rangle\sin\psi.\end{aligned} \tag{10}$$

Легко переконуємось у справедливості наступних оцінок:

$$[\langle Sx_1, x_1\rangle - \langle S^{-1}x_2, x_2\rangle]\dot{\psi}\cos\psi \ge -K(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)|\cos\psi|,$$
$$|2\langle Sx_1, B_2(\varphi)x_2\rangle\cos^{2p_3}\psi\sin\psi| \le \|SB_2\|_0(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)|\cos\psi|, \tag{11}$$
$$|2\langle S^{-1}x_2, B_1(\varphi)x_1\rangle\cos^{2p_2}\psi\sin\psi| \le \|S^{-1}B_1(\varphi)\|_0(\|x_1\|^2 + \|x_2\|^2)|\cos\psi|.$$

де постійна $K$ визначається нерівністю

$$\max\left\{\|S\|, \|S^{-1}\|\right\}\left|\sum_{j=1}^{k} a_j(\varphi)\right| \le K,$$

$$\|SB_2\|_0 = \max\|SB_2(\varphi)\|, \quad \varphi \in T_m.$$

Таким чином, враховуючи нерівності (6), (7), (9), (11), з (10) отримуємо

$$\dot{V} \ge (\lambda\beta\cos^{2p_2}\psi + \sin^{2p_1}\psi - L|\cos\psi|)\|x_1\|^2 +$$
$$+ (\lambda\beta\cos^{2p_3}\psi + \|S\|^{-2}\sin^{2p_1}\psi - L|\cos\psi|)\|x_2\|^2, \tag{12}$$

де $L = K + \|SB_2\|_0 + \|S^{-1}B_1\|_0$.

Тепер покажемо, що в правій частині нерівності (12) при достатньо великих фіксованих значеннях параметра $\lambda >> 0$ коефіцієнти будуть додатними при всіх значеннях $\psi \in R$.

Розглянемо, наприклад, другий коефіцієнт

$$F(\psi) = \lambda\beta\cos^{2p_3}\psi + K\sin^{2p_1}\psi - L|\cos\psi|, \quad K = \|S\|^2.$$

Позначаючи $\max\{p_1, p_3\} = p$, $\lambda\beta - K = \bar{\lambda}$, отримуємо

$$F(\psi) \ge \bar{\lambda}\cos^{2p}\psi + K(\cos^{2p}\psi + \sin^{2p}\psi) - L|\cos\psi|. \tag{13}$$

Легко переконатися, що справедлива нерівність $\cos^{2p}\psi + \sin^{2p}\psi \ge 2^{1-p}$ для всіх $\psi \in R$ і довільного фіксованого натурального числа $p$. Продовжуючи нерівність (13), будемо мати

$$F(\psi) \ge \bar{\lambda}\cos^{2p}\psi - L|\cos\psi| + 2^{1-p}K. \tag{14}$$

Позначимо $|\cos\psi| = \sigma$, $0 \le \sigma \le 1$, і праву частину нерівності (14) запишемо в наступному вигляді:

$$f(\sigma) = \bar{\lambda}\sigma^{2p} - L\sigma + 2^{1-p}K. \tag{15}$$

Припускаючи, що $\bar{\lambda} > L$, безпосередньо переконуємося, що функція (15) набуває найменшого значення при $\sigma = \sigma^* = [L(2p\bar{\lambda})^{-1}]^{1/(2p-1)}$ і це значення дорівнює

$$f(\sigma^*) = 2^{1-p}K - L^{2p/(2p-1)}[(\bar{\lambda})^{-1/(2p-1)}[(2p)^{-1/(2p-1)} - (2p)^{-2p/(2p-1)}]]. \tag{16}$$

На основі нерівностей (13), (14) з формули (16) маємо

$$F(\psi) \ge f(\sigma) \ge f(\sigma^*) \to 2^{1-p}K \quad \text{при } \bar{\lambda} \to \infty.$$

Таким чином, з нерівності (12) випливає, що похідна квадратичної форми (8) вздовж розв'язків системи (5) буде додатно визначеною при достатньо великих значеннях параметра $\lambda$.

Тепер припустимо, що матрична функція $A(\varphi) = A(\varphi_1, \ldots, \varphi_{j_0-1}, \varphi_{j_0+1}, \ldots)$ не залежить від змінної $\varphi_{j_0}$, $1 \le j_0 \le k$, і існує квадратична форма з постійними коефіцієнтами

$$V = \langle S_1x_1, x_1\rangle + \langle S_{12}x_1, x_2\rangle + \langle S_2x_2, x_2\rangle,$$

похідна від якої внаслідок системи (5) є додатно визначеною:

$$\dot{V} = 2\langle S_1x_1, \dot{x}_1\rangle + \langle S_{12}\dot{x}_1, x_2\rangle + \langle S_{12}x_1, \dot{x}_2\rangle + 2\langle S_2x_2, \dot{x}_2\rangle \ge \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2.$$

Покладаючи $x_1 = 0$, отримуємо

$$\langle S_{12}B_2(\varphi)x_2, x_2\rangle\cos^{2p_3}\psi - 2\langle S_2x_2, A^T(\varphi)x_2\rangle\sin^{2p_1-1}\psi \ge \|x_2\|^2. \tag{17}$$

Оскільки матрична функція $A(\varphi)$ не залежить від змінної $\varphi_{j_0}$, то ліва частина нерівності (17) при $\varphi = \overline{\varphi} = (0, \ldots, \pi/2 - \Delta, \ldots, 0)$ і $\varphi = \bar{\varphi} = (0, \ldots, -\pi/2 - \Delta, \ldots \ldots, 0)$ набуває значень різних знаків, що суперечить нерівності (17). Теорему 1 доведено.

***Зауваження.*** З доведеної теореми 1 випливає, що при виконанні умов (6), (7), розширена система рівнянь вигляду

$$\begin{gathered}
\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi) + b_1(\varphi, \theta), \\
\frac{d\theta}{dt} = b_2(\varphi, \theta), \\
\frac{dx_1}{dt} = A(\varphi)x_1 \sin^{2p_1-1}\psi + B_2(\varphi)x_2 \cos^{2p_3}\psi, \\
\frac{dx_2}{dt} = B_1(\varphi)x_1 \cos^{2p_2}\psi - A^T(\varphi)x_2 \sin^{2p_1-1}\psi
\end{gathered} \tag{18}$$

буде регулярною при довільних фіксованих вектор-функціях $a(\varphi) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m)$, $b_i(\varphi, \theta) \in C_{\mathrm{Lip}}(T_m \times T_k)$, $i = 1, 2$.

Нагадаємо [1, 2], що система рівнянь вигляду (1) є регулярною, якщо вона має єдину функцію Гріна – Самойленка з експоненціальною оцінкою.

Звернемо увагу на те, що систему (5) можна записати у вигляді

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi),$$

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} B_1(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cos^{2p_2}\psi + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & B_2(\varphi) \end{bmatrix} \cos^{2p_3}\psi + \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} 0 & -A^T(\varphi) \\ A(\varphi) & 0 \end{bmatrix} \sin^{2p_1-1}\psi \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}.$$

Тому важливим є дослідження системи рівнянь вигляду

$$\begin{gathered}
\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \\
C\frac{dx}{dt} = \left\{ \sum_{j=1}^{k} B_j(\varphi)\nu_j(\varphi) + M(\varphi)\mu(\varphi) \right\} x,
\end{gathered} \tag{19}$$

де $C$ — деяка невироджена постійна симетрична матриця, $x \in R^n$, $B_j(\varphi)$, $j = 1, \ldots, k$, — симетричні матриці з властивостями

$$\begin{gathered}
\langle B_j(\varphi)x, x \rangle \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k; \quad \left\langle \left[ \sum_{j=1}^{k} B_j(\varphi) \right] x, x \right\rangle \geq \|x\|^2, \\
M^*(\varphi) \equiv -M(\varphi).
\end{gathered} \tag{20}$$

Скалярні функції $\nu_j(\varphi)$, $\mu(\varphi) \in C'(T_m; a)$ мають властивості

$$\nu_j(\varphi) \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{21}$$

і для будь-яких додатних сталих $K$, $L$ існує достатньо велике значення параметра $\lambda$ таке, що при всіх $\varphi \in T_m$ виконується оцінка

$$\lambda\nu_0(\varphi) + \mu^2(\varphi) - K|\dot{\mu}(\varphi)| - L\overline{\nu}(\varphi) \geq \varepsilon, \tag{22}$$

де $\nu_0(\varphi) = \min\{\nu_1(\varphi), \ldots, \nu_k(\varphi)\}$, $\overline{\nu}(\varphi) = \max\{\nu_1(\varphi), \ldots, \nu_k(\varphi)\}$.

**Теорема 2.** *Нехай існує постійна симетрична матриця* $S$ *така, що*

$$\langle [SC^{-1}M(\varphi)-M(\varphi)C^{-1}S]x, x\rangle \geq \|x\|^2. \tag{23}$$

*Тоді при виконанні умов* (20) – (22) *система рівнянь* (19), *буде регулярною. Причому похідна квадратичної форми*

$$V_\lambda = \lambda\langle Cx, x\rangle + \langle Sx, x\rangle\mu(\varphi) \tag{24}$$

*внаслідок системи* (19) *буде додатно визначеною при достатньо великих фіксованих значеннях параметра* $\lambda > 0$.

***Доведення.*** Запишемо похідну квадратичної форми (24) внаслідок системи (19):

$$\dot V_\lambda = 2\lambda \sum_{j=1}^{k} \langle B_j(\varphi)x, x\rangle \nu_j(\varphi) +$$

$$+ 2\left\langle Sx, C^{-1}\left[\sum_{j=1}^{k} B_j(\varphi)\nu_j(\varphi) + M(\varphi)\mu(\varphi)\right]x\right\rangle \mu(\varphi) + \langle Sx, x\rangle\dot\mu(\varphi). \tag{25}$$

Мають місце наступні оцінки:

$$\langle Sx, x\rangle\dot\mu(\varphi) \geq -K_1|\dot\mu(\varphi)|\,\|x\|^2 \geq -K_1|\dot\mu(\varphi)| \sum_{j=1}^{k}\langle B_j(\varphi)x, x\rangle,$$

$$2\langle Sx, C^{-1}M(\varphi)x\rangle\mu^2(\varphi) \geq \|x\|^2\mu^2(\varphi) \geq \|B\|_0^{-1} \sum_{j=1}^{k}\langle B_j(\varphi)x, x\rangle\mu^2(\varphi), \tag{26}$$

$$2\langle Sx, C^{-1}B_j(\varphi)x\rangle\mu\nu_j > \mu(\varphi)\nu_j(\varphi) \geq -L_j\nu_j(\varphi)\|x\|^2 \geq -L_j\nu_j(\varphi) \sum_{i=1}^{k}\langle B_i(\varphi)x, x\rangle,$$

де $K_1$, $L_j$ — деякі додатні сталі.

Тепер оцінимо (25) з урахуванням (26). Отримаємо

$$\dot V_\lambda \geq 2\lambda \sum_{j=1}^{k} \langle B_j(\varphi)x, x\rangle\nu_j(\varphi) + \mu^2(\varphi)\|B\|_0^{-1} \sum_{j=1}^{k}\langle B_j(\varphi)x, x\rangle -$$

$$- K_1|\dot\mu(\varphi)| \sum_{j=1}^{k}\langle B_j(\varphi)x, x\rangle - \sum_{i=1}^{k} L_i\nu_i(\varphi) \sum_{j=1}^{k}\langle B_j(\varphi)x, x\rangle =$$

$$= \sum_{j=1}^{k}\left[2\lambda\nu_j(\varphi) + \|B\|_0^{-1}\mu^2(\varphi) - K_1|\dot\mu(\varphi)| - L_1\nu_1(\varphi) - \ldots - L_k\nu_k(\varphi)\right]\langle B_j x, x\rangle.$$

Очевидно, має місце оцінка

$$2\lambda\nu_j(\varphi) + \|B\|_0^{-1}\mu^2(\varphi) - K_1|\dot\mu(\varphi)| - L_1\nu_1(\varphi) - \ldots - L_k\nu_k(\varphi) \geq$$

$$\geq 2\lambda\nu_0(\varphi) + \|B\|_0^{-1}\mu^2(\varphi) - K_1|\dot\mu(\varphi)| - L_0\bar\nu(\varphi).$$

Теорему 2 доведено.

1. *Митропольский Ю. А., Самойленко А. М., Кулик В. Л.* Исследования дихотомии линейных систем дифференциальных уравнений с помощью функций Ляпунова. – Киев: Наук. думка, 1990. – 272 с.
2. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.

Одержано 12.02.01