УДК 517.53

Ю. М. Галь, О. М. Мулява (Дрогобиц. пед. ун-т),
М. М. Шеремета (Львів. нац. ун-т)

ПРО НАЛЕЖНІСТЬ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ ДО УЗАГАЛЬНЕНОГО КЛАСУ ЗБІЖНОСТІ

In terms of the Taylor coefficients and zeros distribution, we describe a class of entire functions f determined by the convergence of the integral $\int_{r_0}^{\infty}\frac{\gamma(\ln M_f(r))}{r^{\rho+1}}dr$, where γ is a slowly increasing function.

У термінах тейлорових коефіцієнтів і розподілу нулів описано клас цілих функцій f, означений збіжністю інтеграла $\int_{r_0}^{\infty}\frac{\gamma(\ln M_f(r))}{r^{\rho+1}}dr$, де γ — повільно зростаюча функція.

1. Вступ. Нехай для цілої функції

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \quad (z = re^{i\theta}), \quad a_0 = 1, \tag{1}$$

з нулями z_k

$$n_f(r) = \sum_{|z_k|\le r} 1, \quad M_f(r) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}, \quad \rho = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}$$

— порядок функції f, а $\tau = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} (\ln M_f(r))(r^\rho)^{-1}$ — її тип. Зв'язок між зростанням $M_f(r)$ і $n_f(r)$ та спаданням коефіцієнтів a_n в термінах порядку і типу добре відомий (див., наприклад, [1]). У випадку, коли $\tau = 0$, Ж. Валірон [2] увів клас збіжності, який визначається умовою $\int_1^{\infty}\frac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}}dr < +\infty$, і показав, що якщо функція (1) належить до класу збіжності, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{\rho/n} < +\infty \quad \text{і} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |z_k|^{-\rho} < +\infty.$$

Якщо $|a_n/a_{n+1}| \nearrow +\infty$, то умова $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^{\rho/n} < +\infty$ є достатньою [3] для належності f до класу збіжності, а якщо ρ — неціле число, то і умова $\sum_{k=1}^{\infty}|z_k|^{-\rho} < +\infty$ є достатньою [4] для належності f до класу збіжності (зауважимо, що при нецілому ρ за теоремою Адамара про зображення цілої функції задача зводиться до питання належності до класу збіжності канонічних добутків).

У випадку, коли $\rho = +\infty$, для характеристики зростання цілих функцій вводять інші шкали зростання (наприклад, логарифмічні порядки, k-логарифмічні порядки, узагальнені порядки) і в їх термінах встановлюють зв'язок між зростанням $M_f(r)$, поводженням коефіцієнтів a_n і розподілом нулів z_k.

Нехай L — клас неперервних додатних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій, а L^0 — клас функцій $\alpha \in L$ таких, що $\alpha((1+o(1))x) = (1+o(1))\alpha(x)$, $x \to +\infty$. Узагальненим порядком цілої функції (1) називається [5] величина $\rho_{\alpha\beta} = \overline{\lim\limits_{r\to+\infty}} \frac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$, де $\alpha \in L$ і $\beta \in L$. За певних умов на α і β М. М. Шеремета [5] вказав формули для знаходження $\rho_{\alpha\beta}$ через коефіцієнти

a_n, а С. К. Балашов [6] побудував канонічні добутки заданого узагальненого порядку.

А. А. Гольдберг [7], Й. Вінклер [8] і В. Бергвайлер [9] за даною послідовністю (z_k) будували цілі функції з нулями в z_k, які б мали мінімальне зростання. Найзагальніший результат отримано в [9], де показано, що якщо послідовність (z_k) задовольняє умови $\lim\limits_{k\to\infty}|z_k| = +\infty$ і $0 < \varliminf\limits_{r\to\infty}\dfrac{\ln n(r)}{\ln r} \le +\infty$, а додатна неспадна на $[t_0, +\infty)$ функція φ — умову $\int_{t_0}^{\infty}\dfrac{dt}{\varphi(t)\,t\ln t} < +\infty$, то існує ціла функція f з нулями z_k така, що $\ln\ln M_f(r) = o((\ln^2 n(r))\,\varphi(\ln n(r)))$ при $r \to +\infty$ зовні деякої множини з $[1, +\infty)$ скінченної логарифмічної міри.

Ми будемо вивчати можливість побудови канонічних добутків заданого узагальненого порядку $\rho_{\alpha\beta}$ з $\beta(x) \equiv x$, які крім цього належали б до відповідного узагальненого класу збіжності.

Отже, нехай f — ціла функція, а $\alpha \in L$. Величину $\rho_\alpha = \varlimsup\limits_{r\to\infty}\dfrac{\alpha(\ln M_f(r))}{\ln r}$ назвемо узагальненим α-порядком. Природно, що тоді величину $\tau_\alpha = \varlimsup\limits_{r\to+\infty}\dfrac{\exp\{\alpha(\ln M_\pi(r))\}}{r^{\rho_\alpha}}$ слід назвати узагальненим α-типом і говорити, що f належить до узагальненого α-класу збіжності, якщо

$$\int\limits_{r_0}^{\infty}\frac{\exp\{\alpha(\ln M_f(r))\}}{r^{\rho+1}}\,dr < +\infty, \quad \rho = \rho_\alpha. \tag{2}$$

2. Опис α-класу збіжності в термінах коефіцієнтів. Будемо розглядати загальніший об'єкт — цілі (абсолютно збіжні в $\mathbb{C}$) ряди Діріхле

$$F(s) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(s\lambda_n), \quad s = \sigma + it, \tag{3}$$

де (λ_n) — зростаюча до $+\infty$ послідовність додатних чисел. Покладемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma+it)| : t \in \mathbb{R}\}$ і зауважимо, що якщо в (1) виконаємо заміну $z = e^s$, то отримаємо ряд (3) з $\lambda_n = n$, причому $M(\sigma, F) = M_f(e^\sigma)$. Тому для рядів Діріхле α-клас збіжності означимо умовою

$$\int\limits_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\rho\sigma}\exp\{\alpha(\ln M(\sigma, F))\}\,d\sigma < +\infty. \tag{4}$$

Зауважимо також, що в [10] введено узагальнений $\alpha\beta$-клас збіжності, який означається збіжністю інтеграла $\int_{\sigma_0}^{\infty}\dfrac{\alpha(\ln M(\sigma, F))}{\beta(\sigma)}\,d\sigma$, і при певних умовах на функції $\alpha \in L$ та $\beta \in L$ отримано необхідну і достатню умови на коефіцієнти і показники ряду (3) для належності цього ряду до $\alpha\beta$-класу збіжності. Оскільки на функцію β в [10] накладено умову $\beta \in L^0$, а функція $\beta(\sigma) = e^{\rho\sigma}$ цю умову не задовольняє, то з [10] не вдається отримати опис α-класу збіжності, який означається умовою (4). Проте справедлива така теорема.

Теорема 1. *Нехай неперервно диференційовна функція $\alpha \in L$ така, що $\alpha'(x)\,x\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, і функція $\alpha'(x)e^{\alpha(x)}$ незростаюча на $[x_0, +\infty)$. Припустимо, що $\ln n = O(\lambda_n)$, $n \to \infty$. Тоді для того щоб цілий ряд Діріхле*

(3) *належав до* α *-класу збіжності, необхідно, а у випадку, коли* $\chi_n(F) = \dfrac{\ln|a_n| - \ln|a_{n+1}|}{\lambda_{n+1} - \lambda_n} \nearrow +\infty$, *і досить, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})|a_n|^{\rho/\lambda_n} < +\infty. \tag{5}$$

Доведення. Нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n|\exp(\sigma\lambda_n) : n \geq 0\}$ — максимальний член, а $\nu(\sigma, F) = \max\{n : |a_n|\exp(\sigma\lambda_n) = \mu(\sigma, F)\}$ — центральний індекс ряду (3). За нерівністю Коші $\mu(\sigma, F) \leq M(\sigma, F)$, а оскільки $\ln n = O(\lambda_n)$, $n \to \infty$, то [11, с. 22] існує стала $h > 0$ така, що $M(\sigma, F) \leq \mu(\sigma + h, F)$. Тому (4) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\rho\sigma} \exp\{\alpha(\ln\mu(\sigma, F))\}\, d\sigma < +\infty. \tag{6}$$

Далі, використовуючи рівність [11, с. 17]

$$\ln\mu(\sigma, F) = \ln\mu(0, F) + \int_0^{\sigma} \lambda_{\nu(x,F)}\, dx, \quad \sigma \geq 0, \tag{7}$$

маємо $\ln\mu(\sigma, F) \leq \sigma\lambda_{\nu(\sigma,F)} + \ln\mu(0, F)$, звідки

$$\exp\{\alpha(\ln M(\sigma, F))\} \leq \exp\{\alpha(\exp\{\ln\sigma + \ln\lambda_{\nu(\sigma,F)} + o(1)\})\} \leq$$
$$\leq \exp\{\alpha(\exp\{3\max\{\ln\sigma, \ln\lambda_{\nu(\sigma,F)}\}\})\} \leq K\exp\{\alpha(\exp\{\max\{\ln\sigma, \ln\lambda_{\nu(\sigma,F)}\}\})\} \leq$$
$$\leq K\max\{\exp\{\alpha(\sigma)\}, \exp\{\alpha(\lambda_{\nu(\sigma,F)})\}\} \leq K(\exp\{\alpha(\sigma)\} + \exp\{\alpha(\lambda_{\nu(\sigma,F)})\}), \tag{8}$$

де $K = \text{const}$, бо завдяки умові $\alpha'(x)x\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, для деякого $\xi \in (x, 3x)$

$$\frac{\exp\{\alpha(e^{3x})\}}{\exp\{\alpha(e^x)\}} = \exp\{\alpha'(e^{\xi})e^{\xi}2x\} \leq \exp\{\alpha'(e^{\xi})e^{\xi}2\xi\} = O(1), \quad x \to +\infty.$$

З умови $\alpha'(x)x\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, також випливає $\alpha(x) = O(\ln\ln x)$, $x \to +\infty$. Тому $\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\rho\sigma}\exp\{\alpha(\sigma)\}\,d\sigma < +\infty$, і якщо

$$\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\rho\sigma}\exp\{\alpha(\lambda_{\nu(\sigma,F)})\}\, d\sigma < +\infty, \tag{9}$$

то завдяки (8) виконується нерівність (6). З нерівності (7) також маємо $\ln\mu(\sigma, F) \geq \lambda_{\nu(\sigma-1,F)}$ для всіх досить великих σ. Тому з (6) випливає (9). Отже, для того щоб виконувалось співвідношення (6) (тобто функція F належала до α-класу збіжності), необхідно і досить, щоб виконувалось співвідношення (9).

Нехай a_n^0 — коефіцієнти мажоранти Ньютона F_{MN} ряду Діріхле (3), а $\chi_n^0 = \dfrac{\ln a_n^0 - \ln a_{n+1}^0}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}$. Відомо, що $\chi_n^0 \nearrow +\infty$, $n \to \infty$, ряд (3) і його мажоранта Ньютона мають однакові максимальні члени $\mu(\sigma) = \mu(\sigma, F) = \mu(\sigma, F_{\text{MN}})$ та центральні індекси $\nu(\sigma) = \nu(\sigma, F) = \nu(\sigma, F_{\text{MN}})$ і $|a_n| \leq a_n^0$ для всіх n. Оскільки $a_0 = a_0^0 = 1$, то $\chi_0^0 = \dfrac{1}{\lambda_1}\ln\dfrac{1}{a_1^0}$. Відомо також, що якщо $\chi_{n-1}^0 < \chi_n^0$, то для всіх $\sigma \in [\chi_{n-1}^0, \chi_n^0)$ справедливі рівності $\nu(\sigma) = n$ і $\mu(\sigma) = a_n\exp(\sigma\lambda_n)$. Тому

$$\int\limits_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\rho\sigma} \exp\{\alpha(\lambda_{\nu(\sigma,F)})\} d\sigma = \sum_{n=n_0}^{\infty} \exp\{\alpha(\lambda_n)\} \int\limits_{\chi_{n-1}^0}^{\chi_n^0} e^{-\rho\sigma} d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\rho}\sum_{n=n_0}^{\infty} \exp\{\alpha(\lambda_n)\}\left(\exp\{-\rho\chi_{n-1}^0\} - \exp\{-\rho\chi_n^0\}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})\exp\{-\rho\chi_{n-1}^0\} + \text{const}$$

і (9), а отже, і (6) виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})\exp\{-\rho\chi_{n-1}^0\} < +\infty. \tag{10}$$

Оскільки $\ln a_n^0 = -\chi_{n-1}^0(\lambda_n - \lambda_{n-1}) - \ldots - \chi_0^0(\lambda_1 - \lambda_0)$, $\lambda_0 = 0$, то

$$\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0} = \frac{\chi_0^0\lambda_1^* + \ldots + \chi_{n-1}^0\lambda_n^*}{\lambda_1^* + \ldots + \lambda_n^*}, \qquad \lambda_n^* = \lambda_n - \lambda_{n-1}. \tag{11}$$

Звідси випливає, що $\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0} \le \chi_{n-1}^0$ і

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})\exp\{-\rho\chi_{n-1}^0\} \le$$

$$\le \sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})\exp\left\{-\rho\frac{1}{\lambda_n}\ln\frac{1}{a_n^0}\right\} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})(a_n^0)^{\rho/\lambda_n}. \tag{12}$$

З іншого боку, в [12] доведено, що якщо $p \ge 1$, $q = p/(p-1)$, f — додатна на (A,B) функція така, що функція $f^{1/p}$ опукла на (A,B), $-\infty \le A < B \le +\infty$, (λ_n^*) — послідовність додатних чисел, (α_n) — послідовність чисел із (A,B), $A_n = \dfrac{\lambda_1^*\alpha_1 + \ldots + \lambda_n^*\alpha_n}{\lambda_1^* + \ldots + \lambda_n^*}$, а послідовність (μ_n) додатна і незростаюча, то $\sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\lambda_n^* f(A_n) \le q^p \sum_{n=1}^{\infty}\mu_n\lambda_n^* f(\alpha_n)$. Тому якщо покладемо $f(x) = e^{-\rho x}$, $\alpha_n = \chi_{n-1}^0$, $A_n = \dfrac{1}{\lambda_n}\ln\dfrac{1}{a_n^0}$, $\lambda_n^* = \lambda_n - \lambda_{n-1}$, і $\mu_n = \dfrac{\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\}}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}$, $n \ge 1$, то функція $f^{1/2}(x)$ опукла, з незростання функції $\alpha'(x)e^{\alpha(x)}$ випливає незростання послідовності (μ_n) і завдяки (11) маємо

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})(a_n^0)^{\rho/\lambda_n} \le$$

$$\le 4\sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})\exp\{-\rho\chi_{n-1}^0\}. \tag{13}$$

З (12) і (13) випливає, що (10), а отже, і (6) виконуються тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\exp\{\alpha(\lambda_n)\} - \exp\{\alpha(\lambda_{n-1})\})(a_n^0)^{\rho/\lambda_n} < +\infty. \tag{14}$$

Оскільки $|a_n| \le a_n^0$ для кожного ряду Діріхле (3) і $|a_n| = a_n^0$, якщо $\chi_n \nearrow +\infty$, $n \to \infty$, то теорему 1 доведено.

Наслідок 1. *Нехай неперервно диференційовна функція* $\alpha \in L$ *така, що* $\alpha'(x) x \ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, *а функція* $\alpha'(x) e^{\alpha(x)}$ *незростаюча на* $[x_0, +\infty)$ *і* $\alpha'(x-1) e^{\alpha(x-1)} = O(\alpha'(x) e^{\alpha(x)})$, $x \to +\infty$. *Тоді для того щоб ціла функція* (1) *належала до* α*-класу збіжності (тобто виконувалось співвідношення* (2)), *необхідно, а у випадку, коли* $|a_n / a_{n+1}| \nearrow +\infty$, *і досить, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha'(n) \exp\{\alpha(n)\} |a_n|^{\rho/n} < +\infty. \tag{15}$$

Справді, якщо в (1) виконаємо заміну $z = e^s$, то отримаємо ряд (3) з $\lambda_n = n$, $M(\sigma, F) = M_f(e^{\sigma})$ і, оскільки

$$e^{\alpha(n)} - e^{\alpha(n-1)} = \alpha'(\xi_n) e^{\alpha(\xi_n)}, \quad n-1 \le \xi_n \le n,$$

а

$$\alpha'(n) e^{\alpha(n)} \le \alpha'(\xi_n) e^{\alpha(\xi_n)} = O(\alpha'(n) e^{\alpha(n)}), \quad n \to \infty,$$

то умова (5) рівносильна умові (15).

Наслідок 2. *Нехай* $\alpha \in L$ *задовольняє умови наслідку* 1. *Тоді якщо ціла функція* (1) *належить до* α*-класу збіжності, то*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha'(k) \exp\{\alpha(k)\}}{|z_k|^{\rho}} < +\infty. \tag{16}$$

Справді, нехай $r_k = |z_k|$, а $N(r) = \int_0^r n(t)/t\, dt$ — неванліннівська лічильна функція нулів. За нерівністю Йєнсена $N(r) \le \ln M_f(r)$. Тому з (2) маємо

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(N(r))\}}{r^{\rho+1}} dr < +\infty. \tag{17}$$

Неважко показати (і це добре відомо), що $N(r) = \sum_{k=1}^{n} \ln(r_k)^{-1} + n \ln r$ для $r_n \le r \le r_{n+1}$. З іншого боку, ряд Діріхле $F^*(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} (r_k)^{-1} \right) e^{sn}$, завдяки монотонному прямуванню r_k до $+\infty$, є цілим, а $\ln \mu(\sigma, F^*) = \sum_{k=1}^{n} \ln(r_k)^{-1} + n\sigma$ при $\ln r_n \le \sigma \le \ln r_{n+1}$. Тому $N(r) = \ln \mu(\ln r, F^*)$ і співвідношення (17) виконується тоді і тільки тоді, коли $\int_{\sigma_0}^{\infty} e^{-\rho\sigma} \exp\{\alpha(\ln \mu(\sigma, F^*))\} d\sigma < +\infty$. Останнє співвідношення виконується тоді і тільки тоді, коли виконується (10), де тепер $\chi_{n-1}^0 = \ln \prod_{k=1}^{n-1} (r_k)^{-1} - \ln \prod_{k=1}^{n} (r_k)^{-1} = \ln r_n$. З (10), як при доведенні наслідку 1, отримуємо (16).

3. Належність канонічних добутків до α**-класу збіжності.** Нехай (z_n) — довільна занумерована в порядку неспадання модулів послідовність відмінних від 0 комплексних чисел з єдиною точкою скупчення в ∞, а (p_n) — така послідовність цілих невід'ємних чисел, що $\sum_{n=1}^{\infty} |z/z_n|^{p_n+1} < +\infty$ для кожного

$z \in \mathbb{C}$. Тоді [1, с. 16] канонічний добуток $\prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, p_n)$, де $E(z,p)$ — первинний множник Вейєрштрасса, абсолютно і рівномірно збіжний на кожному компакті з $\mathbb{C}$ і, отже, зображає цілу функцію. Неважко показати, що якщо $p_n = [\ln n]$, то $\sum_{n=1}^{\infty} |z/z_n|^{p_n+1} < +\infty$ для кожного $z \in \mathbb{C}$ і будь-якої прямуючої до ∞ послідовності (z_n).

Теорема 2. *Нехай неперервно диференційовна функція* $\alpha \in L$ *така, що* $\alpha'(x) x \ln x \ln\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, *а функція* $\alpha'(x) e^{\alpha(x)}$ *незростаюча на* $[x_0, +\infty)$ *і* $\alpha'(x-1) e^{\alpha(x-1)} = O(\alpha'(x) e^{\alpha(x)})$, $x \to +\infty$. *Тоді якщо послідовність* (z_n) *задовольняє умову* (16), *то ціла функція*

$$\pi(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E(z/z_n, [\ln n]) \tag{18}$$

належить до α*-класу збіжності.*

Доведення. Оскільки [1, с. 21] $\ln|E(z,p)| \le 3e(2 + \ln p)\dfrac{|z|^{p+1}}{1+|z|}$, $p \ge 1$, то

$$\ln M_\pi(r) \le O(\ln r) + \sum_{n=3}^{\infty} 3e(2 + \ln[\ln n]) \frac{(r/|z_n|)^{[\ln n]+1}}{1 + r/|z_n|} \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(K_1 r)^{\ln n+1}}{|z_n|^{\ln n+1}}.$$

Тут і далі K_j — додатні сталі. Нехай $K_2 > K_1$. Тоді

$$\ln M_\pi(r) \le \frac{K_1}{K_2 - K_1} \mu(\ln r + K_2, \Phi),$$

де $\mu(\sigma, \Phi) = \max\{(e^\sigma/|z_n|)^{\ln n+1} : n \ge 1\}$ — максимальний член ряду Діріхле

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{|z_n|}\right)^{\ln n+1} \exp\{s(\ln n + 1)\}.$$

Оскільки $e^\sigma/|z_n| < 1$, якщо $e^\sigma < |z_n|$, то $|z_{\nu(\sigma,\Phi)}| \le e^\sigma$, тобто $\nu(\sigma, \Phi) \le n(e^\sigma)$, де $n(t)$ — лічильна функція послідовності $(|z_n|)$. Тому (див. (7))

$$\ln\mu(\sigma,\Phi) \le \ln\mu(0,\Phi) + \int_0^\sigma (\ln\nu(t,\Phi) + 1)\,dt \le \ln\mu(0,\Phi) + \int_0^\sigma (\ln n(e^t) + 1)\,dt$$

і

$$\ln M_\pi(r) \le \frac{K_1}{K_2 - K_1} \exp\left\{K_3 \int_0^{\ln r + K_2} (\ln n(e^t) + 1)\,dt\right\} \le$$

$$\le \exp\left\{K_4 \int_1^{qr} \frac{\ln n(x)}{x}\,dx\right\} = \exp\{K_4 N^*(r)\}, \quad N^*(r) = \int_1^{qr} \frac{\ln n(x)}{x}\,dx, \quad q = e^{K_2}. \tag{19}$$

Оскільки

$\alpha'(x) x \ln x \ln\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, то $\exp\{\alpha(\exp\{e^{3x}\})\} \le K_5 \exp\{\alpha(\exp\{e^x\})\}$.

Очевидно також, що $N^*(r) \le \ln n(qr) \ln r$. Тому з (19) маємо

$$\exp\{\alpha(\ln M_\pi(r))\} \le \exp\{\alpha(\exp\{K_4 \ln n(qr) \ln r\})\} =$$

$$= \exp\{\alpha(\exp\{\exp\{\ln\ln n(qr) + \ln\ln r + \ln K_4\}\})\} \le$$

$$\le \exp\{\alpha(\exp\{\exp\{3\max\{\ln\ln n(qr), \ln\ln r\}\}\})\} \le$$

$$\le K_5 \exp\{\alpha(\exp\{\exp\{\max\{\ln\ln n(qr), \ln\ln r\}\}\})\} =$$

$$= K_5 \max\{\exp\{\alpha(\exp\{\exp\{\ln\ln n(qr)\}\})\}, \exp\{\alpha(\exp\{\exp\{\ln\ln r\}\})\}\} \le$$

$$\le K_5(\exp\{\alpha(n(qr))\} + \exp\{\alpha(r)\}),$$

тобто

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(\ln M_\pi(r))\}}{r^{\rho+1}} dr \le K_5 \left(\int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(n(qr))\}}{r^{\rho+1}} dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(r)\}}{r^{\rho+1}} dr \right) \le$$

$$\le K_6 \left(\int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(n(r))\}}{r^{\rho+1}} dr + \int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(r)\}}{r^{\rho+1}} dr \right). \qquad (20)$$

З умови $\alpha'(x) x \ln x \ln\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, випливає також, що $\alpha(x) = O(\ln\ln\ln x)$, $x \to +\infty$. Тому $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(r)\}}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$. Далі, як при доведенні теореми 1, з (16) отримуємо

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(n(r))\}}{r^{\rho+1}} dr \le \sum_{n=n_0}^{\infty} \int_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{\exp\{\alpha(n(r))\}}{r^{\rho+1}} dr =$$

$$= \sum_{n=n_0}^{\infty} \exp\{\alpha(n)\} \int_{|z_n|}^{|z_{n+1}|} \frac{dr}{r^{\rho+1}} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(n)\} - \exp\{\alpha(n-1)\}}{|z_n|^\rho} + K_6 < +\infty.$$

Тому з (20) випливає належність канонічного добутку до α-класу збіжності. Теорему 2 доведено.

З теореми 2 і наслідку 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 3. *Якщо функція $\alpha \in L$ задовольняє умови теореми 2, то для того щоб канонічний добуток* (18) *належав до α-класу збіжності, необхідно і досить, щоб послідовність (z_n) задовольняла умову* (16).

4. Зауваження і доповнення. Умова $\alpha'(x) x \ln x \ln\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, в теоремі 2 і наслідку виникла внаслідок застосованого методу. Цю умову не задовольняє, наприклад, функція $\alpha(x) = \ln\ln x$. Проте і для функції $\alpha(x) = \ln\ln x$ висновки теореми 2 і наслідку 3 є справедливими.

Справді, в цьому випадку

$$\int_{r_0}^{\infty} \frac{\exp\{\alpha(\ln M_\pi(r))\}}{r^{\rho+1}} dr = \int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln\ln M_\pi(r)}{r^{\rho+1}} dr \le K_4 \int_{r_0}^{\infty} \frac{N^*(r)}{r^{\rho+1}} dr =$$

$$= K_4 \left(-\frac{N^*(r)}{r^\rho} \Big|_{r_0}^{\infty} + \int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln n(r)}{r^{\rho+1}} dr \right) < +\infty,$$

бо умова (16) тепер запишеться у вигляді $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln n(r)}{r^{\rho+1}} dr < \infty$.

Отже, справедливим є таке твердження.

Твердження 1. *Для того щоб $\int_{r_0}^{\infty} \frac{\ln\ln M_\pi(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$, необхідно і досить, щоб*

$$\sum_{r_0}^{\infty} \frac{1}{k|z_k|^{\rho}} < +\infty.$$

Зауважимо, що умову $\alpha'(x)x\ln x\ln\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, в теоремі 2 можна замінити певною умовою на $n(r)$. Наприклад, вірним є таке твердження.

Твердження 2. *Нехай неперервно диференційовна функція* $\alpha \in L$ *така, що* $\alpha'(x)x\ln x = O(1)$, $x \to +\infty$, *а функція* $\alpha'(x)e^{\alpha(x)}$ *незростаюча на* $[x_0, +\infty)$ *і* $\alpha'(x-1)e^{\alpha(x-1)} = O(\alpha'(x)e^{\alpha(x)})$, $x \to +\infty$. *Тоді якщо послідовність* (z_n) *задовольняє умову* (16) *і*

$$\int_1^r \frac{\ln n(t)}{t} dt = O(\ln n(r)), \qquad r \to +\infty, \tag{21}$$

то ціла функція (18) *належить до* α*-класу збіжності.*

Справді, якщо виконується умова (21), то з (19) отримуємо нерівність

$$\ln M_{\pi}(r) \le \exp\{K_4 N^*(r)\} \le \exp\{K_7 n(r)\},$$

звідки, як звичайно, отримуємо (2).

Умова (21) виконується, наприклад, якщо $\ln n(r) \sim r l(r)$, $r \to +\infty$, де додатна неперервно диференційовна функція l така, що $\dfrac{r l'(r)}{l(r)} \ge h > -1$ для всіх $r \ge r_0$.

1. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.
2. *Valiron G.* General theory of integral functions. – Tiulouse, 1923. – 382 p.
3. *Kamthan P. K.* A theorem of step functions (III) // Istanbul üniv. fen. fak. mecm. A. – 1963. – 28. – P. 65 – 69.
4. *Неванлинна Р.* Однозначные аналитические функции. – М.: Гостехиздат, 1941. – 292 с.
5. *Шеремета М. Н.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов ее степенного разложения // Изв. вузов. Математика. – 1967. – № 2. – С. 100 – 108.
6. *Балашов С. К.* О связи роста целой функции обобщенного порядка с коэффициентами ее степенного разложения и распределением корней // Там же. – 1972. – № 8. – С. 10 – 18.
7. *Гольдберг А. А.* О представлении мероморфных функций в виде частного целых функций // Там же. – 1972. – № 10. – С. 13 – 17.
8. *Winkler J.* Uber minimale Maximalbetrage kanonischer Weierstrassprodukte unendlicher Ordnung // Result. Math. – 1980. – **4**. – S. 102 – 116.
9. *Bergweiler W.* A question of Gol'dberg soncerning entire functions with prescribed zeros // J. anal. math. – 1994. – **63**. – P. 121 – 129.
10. *Мулява О. М.* Класи збіжності в теорії рядів Діріхле // Допов. НАН України. Сер. А. – 1999. – № 3. – С. 35 – 39.
11. *Шеремета М. М.* Цілі ряди Діріхле. – Київ: ІСДО, 1993. – 168 с.
12. *Мулява О. М.* Про класи збіжності рядів Діріхле // Укр. мат. журн. – 1999. – **51**, № 11. – С. 1485 – 1494.

Одержано 11.12.2000