УДК 517.968

А. Ю. Лучка, Т. А. Кучерук (Ін-т математики НАН України, Київ)

ІТЕРАЦІЙНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ОБМЕЖЕННЯМИ

We propose a new approach to the investigation of linear equations with restrictions. For this problem, we establish conditions of consistency and justified the application of iterative method.

Запропоновано новий підхід до дослідження лінійних рівнянь з обмеженнями. Встановлено умови сумісності задачі та обґрунтовано застосування до неї ітераційного методу.

Математичними моделями багатьох процесів та явищ є інтегральні, диференціальні чи інтегро-диференціальні рівняння та їх системи, про розв'язки яких відома додаткова інформація. Узагальненнями таких моделей можуть бути операторні рівняння з обмеженнями вигляду

$$x = f + Kx, \qquad Sx = p, \tag{1}$$

де $f \in X$, $p \in E$ — задані елементи; $K: X \to X$, $S: X \to E$ — лінійні неперервні оператори, а X, E — банахові простори.

Задачу (1) вважаємо сумісною, якщо існує елемент $x \in X$, який задовольняє обмеження $Sx = p$ і є розв'язком рівняння $x = f + Kx$. У противному разі задача (1) несумісна.

Встановленню умов сумісності задач такого типу та розробці методів побудови їх розв'язків присвячено низку наукових праць, зокрема [1 – 3]. У даній статті запропоновано новий підхід до дослідження сумісності задачі (1) і розроблено та обґрунтовано новий ітераційний метод побудови наближених розв'язків цієї задачі.

1. Задача з керуванням. Розглянемо задачу

$$y = f + Ky, \qquad Sy = p + Su, \tag{2}$$

де $y \in X$ і $u \in U$ — шукані елементи ($U \subset X$ — підпростір, причому $\dim U = \dim E$). Встановимо, що задача (2) еквівалентна деякому рівнянню без обмеження.

Введемо заміну

$$y = z + Ku, \qquad Sy = p + Su, \tag{3}$$

яку будемо трактувати як допоміжну задачу, вважаючи в ній елемент $z \in X$ заданим, а елементи y та u потрібно визначити. Очевидно, на підставі формул (3) для визначення елемента u отримуємо рівняння

$$Su - SKu = Sz - p. \tag{4}$$

Тут і в подальшому припускаємо, що рівняння

$$Sw - SKw = p, \qquad w \in U, \qquad \forall p \in E, \tag{5}$$

має єдиний розв'язок, тобто існує оператор $\Gamma: E \to U$ такий, що справедливі співвідношення

$$S(I - K)\Gamma p = p \quad \forall p \in E, \qquad \Gamma S(I - K)u = u \quad \forall u \in U, \tag{6}$$

де I — одиничний оператор в X. За такого припущення існує єдиний розв'язок рівняння (4), який зображується формулою

$$u = Rz - w, \tag{7}$$

де

$$R = \Gamma S, \qquad w = \Gamma p. \tag{8}$$

Підставляючи розв'язок (7) в (3), отримуємо

$$y = z + KRz - Kw. \tag{9}$$

Тепер на підставі формул (2) і (9) маємо

$$z + KRz - Kw = f + K(z + KRz - Kw).$$

Звідси випливає

$$z = f + K(z + KRz - Rz + w - Kw). \tag{10}$$

Вводячи в розгляд оператор G і елемент h, які визначаються за формулами

$$G = I + KR - R, \quad h = w - Kw, \tag{11}$$

рівняння (10) відносно z можна записати у вигляді

$$z = g + Mz, \tag{12}$$

де

$$g = f + Kh, \quad M = KG. \tag{13}$$

Таким чином, дослідження задачі (2) звелось до дослідження рівняння (12).

Зауважимо, що, по-перше, зображення (9) можна подати у вигляді

$$y = h + u + Gz, \tag{14}$$

оскільки, використовуючи формули (7) та (11), маємо

$$y - u = z + KRz - Kw - Rz + w = Gz + h,$$

а, по-друге, безпосередньо із формул (6), (11) і (8) випливає справедливість співвідношень

$$SGz = 0 \quad \forall z \in X, \quad GKu = Gu \quad \forall u \in U, \quad Sh = p. \tag{15}$$

Теорема 1. *Якщо існує оператор* $\Gamma : E \to U$, *то задача* (2) *еквівалентна рівнянню* (12). *Їх розв'язки пов'язані між собою співвідношенням*

$$y^* = z^* + Ku^*. \tag{16}$$

Доведення. Нехай z^* — розв'язок рівняння (12). Переконаємось, що елементи

$$y^* = z^* + KRz^* - Kw, \quad u^* = Rz^* - w \tag{17}$$

є розв'язком задачі (2). Для цього скористаємось формулами (17), (11), (13) і (14), (15), на підставі яких маємо

$$f - y^* + Ky^* = f - z^* - KRz^* + Kw + K(z^* + KRz^* - Kw) =$$

$$= f + K(w - Kw) - z^* + K(z^* + KRz^* - Rz^*) =$$

$$= f + Kh - z^* + KGz^* = g - z^* + Mz^* = 0,$$

$$Sy^* = S(h + u^* + Gz^*) = p + Su^*.$$

Нехай тепер (y^*, u^*) — розв'язок задачі (2), тобто справедливі співвідношення

$$y^* = f + Ky^*, \quad S(y^* - u^*) = p. \tag{18}$$

Тоді елемент

$$z^* = y^* - Ku^* \tag{19}$$

є розв'язком рівняння (12). Справді, використовуючи формули (15), (11), (8), (18), одержуємо

$$G(y^* - Ku^*) = G(y^* - u^*) = (I + K\Gamma S - \Gamma S)(y^* - u^*) =$$

$$= y^* - u^* + (K - I)\Gamma p = y^* - u^* - h. \tag{20}$$

Тепер з допомогою формул (13), (19), (20) і (18) легко переконатися в тому, що z^* — розв'язок рівняння (12), оскільки

$$g - z^* + Mz^* = f + Kh - y^* + Ku^* + KG(y^* - Ku^*) =$$

$$= f - y^* + K(h + u^* + Gy^* - GKu^*) = f - y^* + Ky^* = 0.$$

Зауважимо, що справедливість формули (16) безпосередньо випливає із формул (17).

Теорема 2. *Якщо існує оператор* $\Gamma: E \to U$, *то однорідна задача*

$$y = Ky, \quad Sy = Su, \quad u \in U, \tag{21}$$

має нетривіальний розв'язок лише тоді, коли існує нетривіальний розв'язок однорідного рівняння

$$z = Mz. \tag{22}$$

Доведення. Нехай z^* — нетривіальний розв'язок рівняння (22), тоді за теоремою 1 задача (21) має розв'язок, який зображується формулами

$$y^* = z^* + KRu^*, \quad u^* = Rz^*,$$

оскільки в даному випадку в формулах (17) $w = 0$. Цей розв'язок нетривіальний, тому що в противному разі, як це випливає із співвідношення (16), ми отримали б $z^* = 0$.

Навпаки, нехай (y^*, u^*) — нетривіальний розв'язок рівняння (21), тоді згідно з теоремою 1 $z^* = y^* - Ku^*$ — розв'язок однорідного рівняння (22), причому $z^* \neq 0$. Припустивши, що $z^* = 0$, ми мали б $y^* = Ku^*$. Отже, з урахуванням рівності $Sy^* = Su^*$ було б

$$S(u^* - Ku^*) = S(u^* - y^*) = 0, \quad u^* \in U.$$

Звідси згідно з припущенням відносно рівняння (5) випливало б $u^* = 0$, а тоді було б $y^* = Ku^* = 0$, що суперечить припущенню.

2. Умови сумісності. За допомогою попередніх результатів можна встановити умови сумісності вихідної задачі.

Теорема 3. *Якщо існує оператор* $\Gamma: E \to U$, *то задача* (1) *сумісна лише тоді, коли існує розв'язок рівняння* (12), *який задовольняє умову*

$$Rz = w. \tag{23}$$

Доведення. Нехай задача (1) сумісна, тобто існує елемент $x^* \in X$ такий, що

$$x^* = f + Kx^*, \quad Sx^* = p. \tag{24}$$

Тоді елемент $z^* = x^*$ задовольняє рівняння (12) і умову (23). Справді, виконуючи нескладні перетворення з урахуванням формул (13), (11), (24) і (8), отримуємо

$$g - z^* + Mz^* = f - x^* + Kx^* + K(K-I)\Gamma(Sx^* - p) = 0,$$

$$Rz^* - w = \Gamma(Sx^* - p) = 0.$$

Нехай тепер z^* — розв'язок рівняння (12) такий, що справджується умова (23). Тоді неважко встановити, що елемент

$$x^* = h + Gz^* \tag{25}$$

є розв'язком задачі (1). Справді, оскільки, використовуючи умову $Rz^* = w$ та позначення (11), маємо

$$x^* = h + Gz^* = z^* + (K-I)(Rz^* - w) = z^*,$$

то на підставі цього факту і формул (25), (15) і (13) отримуємо

$$Sx^* = Sh + SGz^* = p,$$

$$f - x^* + Kx^* = f - z^* + K(h + Gz^*) = g - z^* + Mz^* = 0.$$

Теорема 4. *Якщо існує оператор* $\Gamma : E \to U$, *то одиниця є власним значенням як задачі* $x = Kx$, $Sx = 0$, *так і задачі* $z = Mz$, $Rz = 0$.

Доведення аналогічне доведенню теореми 2.

Наслідок. *Існує єдиний розв'язок задачі* 1 *лише тоді, коли рівняння* (12) *має єдиний розв'язок, який задовольняє умову* (23).

Справедливість твердження безпосередньо випливає з теорем 3 і 4.

***Зауваження* 1.** Із доведення теореми 3 випливає, що вихідна задача (1) та задача (12), (23) мають один і той самий розв'язок, але спектральні радіуси $\rho(K)$ і $\rho(M)$ операторів K і M, взагалі кажучи, різні. Збільшення розмірності підпростору U сприяє зменшенню спектрального радіуса $\rho(M)$. Отже, при певному виборі підпростору U може бути $\rho(M) < 1$, в той час як $\rho(K) > 1$. Цей факт істотно використовується при розробці ітераційних методів для задачі (1).

3. Ітераційний метод. Суть ітераційного методу стосовно задачі (1) полягає в тому, що, виходячи з деякого елемента $x_0 \in X$, послідовні наближення до шуканого розв'язку визначимо за формулами

$$z_k = f + Kx_{k-1}, \tag{26}$$

$$y_k = z_k + Ku_k, \quad u_k \in U, \tag{27}$$

$$Sx_k = p, \quad x_k = y_k - u_k. \tag{28}$$

Для визначення елемента u_k, виконуючи нескладні перетворення з урахуванням формул (27) і (28), отримуємо рівняння

$$Su_k - SKu_k = Sz_k - p, \quad u_k \in U. \tag{29}$$

За припущенням рівняння (5) має єдиний розв'язок, отже, рівняння (29) також має єдиний розв'язок, який з урахуванням співвідношення (7) задається формулою

$$u_k = Rz_k - w. \tag{30}$$

Таким чином, наближення до шуканого розв'язку задачі (1) за методом (26) – (28) будується однозначно.

Теорема 5. *Нехай існує оператор* $\Gamma : E \to U$. *Тоді якщо спектральний радіус оператора* M

$$\rho(M) < 1 \tag{31}$$

і задача (1) *сумісна, то вона має єдиний розв'язок* $x^* \in X$ *і справедливі співвідношення*

$$\lim_{k \to \infty} x_k = x^*, \qquad \lim_{k \to \infty} u_k = 0. \tag{32}$$

Доведення. Встановимо, що збіжність ітераційного методу (26) – (28) зводиться до збіжності методу послідовних наближень

$$z_k = g + Mz_{k-1} \tag{33}$$

для рівняння (12). Справді, із співвідношень (28), (27) випливає

$$x_k = z_k + Ku_k - u_k, \tag{34}$$

а тому на підставі формул (30), (34) і (11) маємо

$$x_k = h + Gz_k. \tag{35}$$

Якщо підставити (35) в (26) і використати позначення (13), то отримаємо співвідношення (33).

За умови (31), як відомо, існує єдиний розв'язок $z^* \in X$ рівняння (12) і послідовність $\{z_k,\ k \geq 1\}$ збігається за нормою в X до цього розв'язку, тобто

$$\lim_{k \to \infty} z_k = z^*. \tag{36}$$

За умови теореми 5 задача (1) сумісна, тобто вона має розв'язок $x^* \in X$, причому згідно з теоремою 3 $x^* = z^*$, а також

$$Rz^* = w. \tag{37}$$

Оскільки розв'язок рівняння (12) єдиний і задовольняє умову (37), то, як це випливає із наслідку, задача (1) має тільки єдиний розв'язок.

Перейдемо тепер до границі у співвідношеннях (30) та (35) і використаємо при цьому формули (36), (11), (37) та неперервність операторів R та G. Таким чином, переконуємось у справедливості співвідношень (32), оскільки

$$\lim_{k \to \infty} u_k = Rz^* - w = 0, \qquad \lim_{k \to \infty} x_k = h + Gz^* = x^*. \tag{38}$$

Зауваження 2. Якщо виконується умова (31), але відносно задачі (1) немає ніякої додаткової інформації, то, як це випливає із формул (30), (27) та (36), маємо

$$\lim_{k \to \infty} u_k = Rz^* - w = u^*, \qquad \lim_{k \to \infty} y_k = z^* + Ku^* = y^*, \tag{39}$$

де z^* — єдиний розв'язок рівняння (12). Згідно з теоремою 1 елементи, які визначаються за формулами (39), — це розв'язок задачі (2), причому за теоремою 2 він єдиний.

4. Оцінки похибки. Нехай P — оператор проектування простору X на його підпростір $(I-K)U$ і $Q = I - P$. Тоді на підставі другої властивості (15) справедлива рівність

$$GQ = G. \tag{40}$$

Враховуючи останнє співвідношення, неважко помітити, що рівняння (12) рівносильне рівнянню

$$v = r + Lv, \tag{41}$$

а формули (33) і (35) можна записати у вигляді

$$z_k = g + Mv_{k-1}, \quad x_k = h + Gv_k, \tag{42}$$

де

$$r = Qg, \quad L = QM, \quad v = Qz, \quad v_k = Qz_k, \tag{43}$$

причому

$$v_k = r + Lv_{k-1}. \tag{44}$$

Теорема 6. *Якщо задача* (1) *сумісна і*

$$q = \|L\| < 1, \tag{45}$$

то справедливі оцінки похибки

$$\|x^* - x_k\| \le lq^k \|v^* - v_0\|, \tag{46}$$

$$\|x^* - x_k\| \le \frac{lq^{k-s}}{1-q}\|v_{s+1} - v_s\|, \quad 0 \le s \le k-1, \tag{47}$$

де $l = \|G\|$, $v_s = Qz_s$ *і* v^* *— розв'язок рівняння* (41).

Доведення. Як відомо, умова (45) гарантує існування та єдиність розв'язку рівняння (41) і збіжність послідовності (44) до цього розв'язку, а також справедливість оцінок

$$\|v^* - v_k\| \le q^k \|v^* - v_0\|, \tag{48}$$

$$\|v^* - v_k\| \le \frac{q^{k-s}}{1-q}\|v_{s+1} - v_s\|, \quad 0 \le s \le k-1. \tag{49}$$

Оскільки $\rho(M) = \rho(L) \le \|L\| < 1$, то, очевидно, виконуються умови теореми 5, згідно з якою задача (1) має єдиний розв'язок $x^* \in X$ і справедливе співвідношення (38), яке на підставі властивості (40) можна записати у вигляді

$$x^* = h + Gv^*, \quad v^* = Qz^*, \tag{50}$$

де z^* — розв'язок рівняння (12), тобто з урахуванням (40) справедлива рівність

$$z^* = g + Mv^*, \quad v^* = Qz^*. \tag{51}$$

Зауважимо ще, що $v^* = Qz^*$ — єдиний розв'язок рівняння (41). Щоб в цьому впевнитись, достатньо до рівності (51) застосувати оператор Q і врахувати позначення (43) та умову (45).

На підставі формул (42) і (50) маємо

$$\|x^* - x_k\| = \|Gv^* - Gv_k\| \le l\|v^* - v_k\|. \tag{52}$$

Із нерівностей (52), (48), (49) справедливість оцінок (46), (47) випливає очевидним чином.

Зауваження 3. За умови теореми 6 справедлива оцінка

$$\|u_k\| \le cq^{k-1}\|v^* - v_0\|, \quad c = \|RM\|, \tag{53}$$

яка характеризує швидкість збіжності послідовності $\{u_k,\ k \ge 1\}$ до нуля. Справді, із формул (30), (37), (42) та (51) легко отримуємо співвідношення

$$u_k = Rz_k - Rz^* = RM(v^* - v_{k-1}),$$

на основі якого

$$\|u_k\| \le c\left\|v^* - v_{k-1}\right\|. \tag{54}$$

Отже, з нерівностей (54) і (48) випливає оцінка (53).

5. Застосування методу до інтегральних рівнянь з обмеженнями. Розглянемо інтегральне рівняння

$$x(t) = f(t) + \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \tag{55}$$

з додатковими умовами

$$\int\limits_{\Omega} \Phi_s(\tau)x(\tau)\,d\tau = \gamma_s, \qquad s = \overline{1,m}, \tag{56}$$

де $t \in \Omega \subset R^{\nu}$, $f\colon \Omega \to R$, $K\colon (\Omega \times \Omega) \to R$ — задані функції такі, що $f \in L_p(\Omega)$ і інтегральний оператор

$$(\mathbf{K}x)(t) := \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)x(\tau)\,d\tau \tag{57}$$

відображає простір $L_p(\Omega)$ в себе; $\Phi_s\colon \Omega \to R$, γ_s, $s = \overline{1,m}$, — відомі функції та множина чисел, причому $\Phi_s \in L_p(\Omega)$, $p + r = pr$.

Нехай $E_m(\Omega)$ і $U_m(\Omega)$ — підпростори, породжені системами лінійно незалежних функцій $\{\psi_s(t),\ 1 \le s \le m\} \subset L_p(\Omega)$ і $\{\xi_i(t),\ 1 \le i \le m\} \subset L_p(\Omega)$. Тоді задачу (55), (56) можна трактувати як частинний випадок задачі (1), в якій оператори $\mathbf{K}$ та S визначаються формулами (57) та

$$(Sx)(t) := \int\limits_{\Omega} \sum_{s=1}^{m} \psi_s(t)\Phi_s(\tau)x(\tau)\,d\tau, \tag{58}$$

$$p(t) = \sum_{s=1}^{m} \gamma_s \psi_s(t), \tag{59}$$

причому, очевидно, $S\colon L_p(\Omega) \to E_m(\Omega)$, $p \in E_m(\Omega)$.

У даному випадку заміна (3), з допомогою якої задача з керуванням (2) зводиться до рівняння (12), має вигляд

$$y(t) = z(t) + \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)u(\tau)\,d\tau, \qquad u(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \xi_i(t), \tag{60}$$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)y(t)\,dt = \gamma_s + \int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)u(t)\,dt, \qquad s = \overline{1,m}, \tag{61}$$

а рівняння (4) рівносильне системі лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\sum_{i=1}^{m} a_{si}\lambda_i = b_s, \qquad s = \overline{1,m}, \tag{62}$$

причому, виконуючи нескладні перетворення з урахуванням формул (58) – (61), одержуємо

$$a_{si} = \int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)\eta_i(t)\,dt, \qquad b_s = \int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)z(t)\,dt - \gamma_s, \tag{63}$$

$$\eta_i(t) = \xi_i(t) - \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)\xi_i(\tau)\,d\tau, \qquad i, s = \overline{1,m}. \tag{64}$$

Очевидно, за припущення, що матриця системи рівнянь (62), яку позначимо через Λ, невироджена, допоміжна задача (60), (61) має єдиний розв'язок. Цей розв'язок на підставі формул (7) і (14) можна записати у вигляді

$$u(t) = \int_\Omega R(t,\tau)z(\tau)d\tau - w(t), \tag{65}$$

$$y(t) = h(t) + u(t) + \int_\Omega G(t,\tau)z(\tau)d\tau, \tag{66}$$

де

$$R(t,\tau) = \sum_{i=1}^m \xi_i(t)\Gamma_i(\tau), \qquad w(t) = \sum_{i=1}^m \sigma_i\xi_i(t), \tag{67}$$

$$G(t,\tau) = \delta(t-\tau) - \sum_{i=1}^m \eta_i(t)\Gamma_i(\tau), \tag{68}$$

$$h(t) = w(t) - \int_\Omega K(t,\tau)w(\tau)d\tau, \tag{69}$$

причому в останніх формулах $\delta(t-\tau)$ — функція Дірака,

$$\Gamma_i(\tau) = \sum_{s=1}^m c_{is}\Phi_s(\tau), \qquad \sigma_i = \sum_{s=1}^m c_{is}\gamma_s, \qquad i = \overline{1,m}, \tag{70}$$

а c_{is} — елементи матриці Λ^{-1}.

Згідно з теоремою 3 задача (55), (56) сумісна лише тоді, коли розв'язок $z^*(t)$ рівняння

$$z(t) = g(t) + \int_\Omega M(t,\tau)z(\tau)d\tau \tag{71}$$

задовольняє умову

$$\int_\Omega R(t,\tau)z^*(\tau)d\tau = w(t), \tag{72}$$

де з урахуванням формул (13)

$$g(t) = f(t) + \int_\Omega K(t,\tau)h(\tau)d\tau, \tag{73}$$

$$M(t,\tau) = \int_\Omega K(t,\xi)G(\xi,\tau)d\xi. \tag{74}$$

Очевидно, взявши до уваги позначення (67), легко помітити, що умова (72) рівносильна умові

$$\int_\Omega \Gamma_i(\tau)z^*(\tau)d\tau = \sigma_i, \qquad i = \overline{1,m}. \tag{75}$$

Суть ітераційного методу для задачі (55), (56) полягає в тому, що послідовні наближення до шуканого розв'язку знаходимо на підставі формул

$$z_k(t) = f(t) + \int_\Omega K(t,\tau)x_{k-1}(\tau)d\tau, \tag{76}$$

$$y_k(t) = z_k(t) + \int\limits_{\Omega} K(t,\tau)u_k(\tau)d\tau, \qquad u_k(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \xi_i(t), \tag{77}$$

$$\int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)x_k(t)dt = \gamma_s, \qquad s = \overline{1,m}, \qquad x_k(t) = y_k(t) - u_k(t). \tag{78}$$

Для визначення невідомих параметрів λ_i^k, $i = \overline{1,m}$, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Справді, на підставі формул (77), (78) і (64) маємо

$$x_k(t) = z_k(t) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^k \eta_i(t). \tag{79}$$

Якщо підставити цю функцію в першу з формул (78) і використати позначення (63), то отримаємо

$$\sum_{i=1}^{m} a_{si}\lambda_i^k = b_s^k, \qquad s = \overline{1,m}, \tag{80}$$

де

$$b_s^k = \int\limits_{\Omega} \Phi_s(t)z_k(t)dt - \gamma_s, \qquad s = \overline{1,m}. \tag{81}$$

Умови збіжності методу (76) – (78) і оцінки похибки вказано в теоремах 5 і 6.

***Зауваження* 4.** Наближені розв'язки доцільно будувати таким чином. Спочатку виконуємо обчислення за формулами (64) і (63). Після цього, маючи наближення $x_{k-1}(t)$, виконуємо ітерацію (76), знаходимо згідно з формулою (81) праву частину системи рівнянь (80), розв'язуємо цю систему і наближення $x_k(t)$ обчислюємо за формулою (79).

Приклад. Розглянемо задачу

$$x(t) = 15 - 18t + \int\limits_0^1 (4 + 3t\tau + 2\sqrt{t\tau})x(\tau)d\tau, \tag{82}$$

$$\int\limits_0^1 x(t)dt = 0, \qquad \int\limits_0^1 3tx(t)dt + 7 = 0, \tag{83}$$

і виясним, чи вона сумісна. Для цього використаємо заміну (60), (61), поклавши в ній $m = 2$, $\xi_1(t) = 1$, $\xi_2(t) = t$, і побудуємо функції за формулами (65) – (70).

Виконаємо нескладні обчислення за вказаними формулами з урахуванням того факту, що в обмеженнях (83) $\Phi_1(t) = 1$, $\Phi_2(t) = 3t$, $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = -7$, а $K(t,\tau) = 4 + 3t\tau + 2\sqrt{t\tau}$. У підсумку отримаємо

$$\eta_1(t) = -3 - \frac{3}{2}t - \frac{4}{3}\sqrt{t}, \qquad \eta_2(t) = -2 - \frac{4}{5}\sqrt{t}, \tag{84}$$

$$\Lambda = \begin{pmatrix} -\dfrac{167}{36} & -\dfrac{38}{15} \\ -\dfrac{38}{5} & -\dfrac{99}{25} \end{pmatrix}, \qquad \Lambda^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1188}{265} & -\dfrac{152}{53} \\ -\dfrac{456}{53} & \dfrac{835}{159} \end{pmatrix}, \tag{85}$$

$$\Gamma_1(\tau) = \frac{12}{265}(99 - 190\tau), \qquad \Gamma_2(\tau) = \frac{1}{53}(835\tau - 456), \tag{86}$$

$$\sigma_1 = \frac{1064}{53}, \qquad \sigma_2 = -\frac{5845}{159}, \qquad w_1(t) = \frac{7}{159}(456 - 835t), \tag{87}$$

$$h(t) = \frac{14}{159}\left(151 - 342t + 30\sqrt{t}\right), \tag{88}$$

$$G(t,\tau) = \delta(t-\tau) - \frac{2}{265}\left(5 + 2\sqrt{t}\right)(456 - 835\tau) -$$

$$- \frac{2}{265}\left(18 + 9t + 8\sqrt{t}\right)(190\tau - 99). \tag{89}$$

Далі, обчислюючи за формулами (73) та (74) з використанням функцій (88), (89), знаходимо

$$g(t) = 15 - 25t - \frac{8876}{2385}\sqrt{t}, \qquad M(t,\tau) = 2\sqrt{t}\left(\sqrt{\tau} - \frac{356}{1325} - \frac{634}{795}\tau\right). \tag{90}$$

Таким чином, інтегральне рівняння, до якого зводиться вихідна задача, має вигляд

$$z(t) = g(t) + 2\int_0^1 \sqrt{t}\left(\sqrt{\tau} - \frac{356}{1325} - \frac{634}{795}\tau\right) z(\tau)\,d\tau. \tag{91}$$

Зазначимо, що спектральний радіус оператора M, ядро якого має вигляд (90), $\rho(M) = 1/265$, а тому рівняння (91) має єдиний розв'язок

$$z^*(t) = 15 - 25t - \frac{15}{4}\sqrt{t}. \tag{92}$$

На підставі формул (86) і (92) маємо

$$\int_0^1 \Gamma_1(\tau) z^*(\tau)\,d\tau = \frac{1064}{53}, \qquad \int_0^1 \Gamma_2(\tau) z^*(\tau)\,d\tau = -\frac{5845}{159}. \tag{93}$$

Порівнюючи між собою співвідношення (87) і (93), приходимо до висновку, що умови (75) виконуються. Отже, задача (82), (83) сумісна.

Розглянемо тепер задачу знаходження розв'язку рівняння (82), який задовольняє умови

$$\int_0^1 x(t)\,dt = 0, \qquad \int_0^1 3t\,x(t)\,dt = 5. \tag{94}$$

Для цієї задачі, виконуючи відповідні обчислення за формулами (70) і (73), отримуємо

$$\sigma_1 = -\frac{760}{53}, \qquad \sigma_2 = \frac{4175}{159}, \qquad g(t) = 15 - 13t + \frac{1268}{477}\sqrt{t}. \tag{95}$$

Інтегральне рівняння (91) з вільним членом (95) має розв'язок

$$z^*(t) = 15 - 13t + \frac{53}{20}\sqrt{t}, \tag{96}$$

а тому з урахуванням функцій (86), (96)

$$\int_0^1 \Gamma_1(\tau) z^*(\tau)\,d\tau = \frac{512}{53}, \qquad \int_0^1 \Gamma_2(\tau) z^*(\tau)\,d\tau = -\frac{3457}{159}. \tag{97}$$

Із порівняння співвідношень (95) та (97) випливає, що умова (75) не виконується. Отже, задача (82), (94) несумісна.

Застосуємо до задачі (82), (83) запропонований ітераційний метод. Обчислення проводитимемо за схемою, описаною в зауваженні 4. Оскільки необхідні функції (84) і матриці (85) уже відомі, розпочнемо побудову наближень. Нехай $x_0(t) = 14 - 28t$, тоді виконуємо ітерацію

$$z_1(t) = 15 - 18t + \int_0^1 \left(4 + 3t\tau + 2\sqrt{t\tau}\right) x_0(\tau)\, d\tau = 15 - 25t - \frac{56}{15}\sqrt{t};$$

знаходимо величини

$$b_1^1 = \int_0^1 z_1(t)\,dt = \frac{1}{90}, \qquad b_2^1 = \int_0^1 3t z_1(t)\,dt + 7 = \frac{1}{50};$$

з урахуванням матриць (85) складаємо систему рівнянь (80) при $k = 1$ і знаходимо її розв'язок $\lambda_1^1 = -2/265$, $\lambda_2^1 = 1/106$; нарешті, беручи до уваги функції (84), перше наближення обчислюємо за формулою

$$x_1(t) = z_1(t) - \lambda_1^1 \eta_1(t) - \lambda_2^1 \eta_2(t) =$$

$$= 15 - 25t - \frac{15}{4}\sqrt{t} + \frac{1}{4 \cdot 265}\left(15\sqrt{t} - 4 - 12t\right).$$

Продовжуючи цей процес далі, отримуємо

$$x_k(t) = 15 - 25t - \frac{15}{4}\sqrt{t} + \frac{1}{4 \cdot 265^k}\left(15\sqrt{t} - 4 - 12t\right). \tag{98}$$

Зауважимо, що

$$u_k(t) = \lambda_1^k \xi_1(t) + \lambda_2^k \xi_2(t) = \frac{1}{265^k}\left(\frac{5}{2}t - 2\right). \tag{99}$$

Переходячи до границі у співвідношеннях (98), (99), маємо

$$\lim_{k \to \infty} x_k(t) = x^*(t) = 15 - 25t - \frac{15}{4}\sqrt{t}, \qquad \lim_{k \to \infty} u_k(t) = 0,$$

що підтверджує висновок теореми 5.

1. *Бойчук А. А., Журавлев В. Ф., Самойленко А. М.* Обобщенно-обратные операторы и нетеровы краевые задачи. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 1995. – 318 с.
2. *Лучка А. Ю.* Методи розв'язання рівнянь з обмеженнями і проекційно-ітеративний метод Ю. Д. Соколова // Укр. мат. журн. – 1996. – **48**, № 11. – С. 1501 – 1509.
3. *Лучка А. Ю.* Интегральные уравнения с ограничениями и методы их решения // Кибернетика и систем. анализ. – 1996. – № 3. – С. 82 – 96.

Одержано 14.03.2001,
після доопрацювання — 07.11.2001