УДК 517.91

А. О. Пришляк (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ МОРСА – СМЕЙЛА С beh 2 НА ТРЕХМЕРНЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

For the Morse–Smale vector fields with beh 2 on three-dimensional manifolds, we construct complete topological invariants: a diagram, a minimal diagram, and a recognizing graph. We prove a criterion of the topological equivalence of vector fields of this sort.

Для векторних полів Морса – Смейла з beh 2 на тривимірних многовидах побудовано повні топологічні інваріанти: діаграму, мінімальну діаграму та розрізняючий граф. Доведено критерії топологічної еквівалентності таких векторних полів.

В работах [1 – 3] получена топологическая классификация полей Морса – Смейла на двумерных многообразиях. В [4 – 6] дана классификация векторных полей Морса – Смейла на трехмерных многообразиях с $\mathrm{beh} \leq 1$, т. е. тех, которые имеют конечное число особых траекторий.

В настоящей работе приведена топологическая классификация векторных полей Морса – Смейла с beh 2 на трехмерных многообразиях. Эти поля характеризуются наличием средних замкнутых траекторий. В п. 2 изучается структура поля в окрестности такой траектории. В п. 3 для классификации векторных полей без замкнутых траекторий индексов 0 и 2 строится диаграмма векторного поля. В п. 4 рассматриваются стабильно эквивалентные, а в п. 5 — минимальные диаграммы и дается критерий топологической эквивалентности векторных полей в терминах таких диаграмм. В п. 6 диаграмма строится для полей с замкнутыми траекториями индексов 0 и 2. На основе построенных диаграмм в п. 7 строится различающий граф векторного поля, который дает возможность использовать вычислительную технику при работе с такими объектами.

1. Основные определения и обозначения. Пусть M^3 — замкнутое многообразие, X — векторное поле на нем. Поле X называется векторным полем Морса – Смейла, если:

1) X имеет конечное число критических элементов (особых точек и замкнутых орбит) и все они невырожденные (гиперболические);

2) устойчивые и неустойчивые интегральные многообразия критических элементов пересекаются трансверсально;

3) предельным множеством каждой траектории является критический элемент.

Два векторных поля называются топологически эквивалентными, если существует гомеоморфизм h многообразия на себя, который переводит интегральные траектории в интегральные траектории, сохраняя их ориентации.

Обозначим через $v(x)$ и $u(x)$ устойчивое и неустойчивое многообразия критического элемента x. Пусть x и y — такие критические элементы, что $\dim v(x) = \dim u(y) = 2$. Если $v(x) \cap u(y) \neq \varnothing$, то [7] существует последовательность седловых замкнутых траекторий $\beta_1, \ldots, \beta_n$ такая, что

$$v(x) \cap u(\beta_1) \neq \varnothing, \quad v(\beta_k) \cap u(b_{k+1}) \neq \varnothing, \quad v(\beta_n) \cap u(y) \neq \varnothing.$$

Обозначим через m максимальное число элементов среди всех таких последовательностей и положим $\mathrm{beh}(y|x) = m+1$. При этом $\mathrm{beh}(y|x) = 0$, если $v(x) \cap u(y) = \varnothing$. Будем говорить, что векторное поле имеет $\mathrm{beh} = s$, если s — максимальное значение $\mathrm{beh}(y|x)$.

Если $\mathrm{beh}(y|x) = 2$, то существует замкнутая траектория β такая, что

$$v(x) \cap u(\beta) \neq \varnothing, \quad v(\beta) \cap u(y) \neq \varnothing.$$

Такую замкнутую траекторию будем называть средней. Седловую замкнутую траекторию, неустойчивое многообразие которой не пересекается с устойчивыми многообразиями размерности 2 (особых точек или замкнутых траекторий индекса 1), будем называть нижней. Остальные седловые замкнутые траектории, которые не являются нижними и средними, будем называть верхними. Из предыдущих рассуждений следует, что устойчивые многообразия верхних траекторий не пересекаются с неустойчивыми многообразиями размерности 2.

Далее будем предполагать, что M^3 — замкнутое ориентированное многообразие, X и X' — векторные поля Морса – Смейла с beh 2 на нем.

Пусть $a_1, \ldots, a_k$ и $a'_1, \ldots, a'_k$ — особые точки индекса 0 полей X и X' соответственно, $b_1, \ldots, b_n$ и $b'_1, \ldots, b'_n$ — особые точки индекса 1 полей X и X' соответственно. Через $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ будем обозначать нижние, через $\beta_1, \ldots, \beta_t$ — средние и через $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ — верхние седловые замкнутые траектории. Пусть K — объединение следующих устойчивых многообразий:

1) особых точек индексов 0 и 1;
2) замкнутых траекторий индекса 0;
3) нижних замкнутых траекторий индекса 1.

Рассмотрим регулярную окрестность $U(K)$ этого объединения. Обозначим через $\Phi = \partial U(K)$ границу этой окрестности для поля X, а через Φ' — для поля X'.

Пусть L — объединение K с устойчивыми многообразиями средних замкнутых траекторий, $U(L)$ получается из $U(K)$ добавлением трубчатых окрестностей этих многообразий и положим $F = \partial U(L)$.

Пусть u_i — окружности, которые получаются в результате пересечения неустойчивых многообразий особых точек индекса 1, а также нижних замкнутых траекторий с поверхностью Φ:

$$u_1 = u(b_i) \cap \Phi \quad \text{и} \quad u_{i+n} = u(\alpha_i) \cap \Phi.$$

Тогда u_i — набор непересекающихся окружностей на поверхности Φ.

Обозначим $N = \Phi \cup F$. При этом $P = \mathrm{Cl}(N \setminus \Phi \cap F)$ — объединение торов T_i, которые являются границами окрестностей средних траекторий.

Если $c_1, \ldots, c_m$ — особые точки индекса 2, то пересечения

$$v_i = v(c_i) \cap F \quad \text{и} \quad v_{i+m} = v(\gamma_i) \cap F$$

образуют второй набор окружностей на поверхности F. В первый набор окружностей включим также окружности из пересечений $v(\beta_i) \cap F$, а во второй — из $v(\gamma_i) \cap F$. Таким образом, имеем два набора окружностей на N. Аналогично для поля X' на N' существуют два набора окружностей.

2. Строение векторного поля в окрестности средних траекторий. Замкнутые траектории индекса 1 бывают с тривиальной и скрученной окрестностью. В случае тривиальной окрестности устойчивое и неустойчивое многообразия пересекаются с этой окрестностью по цилиндрам $S^1 \times I$, с тором — по паре окружностей, а в случае скрученной окрестности — по листам Мебиуса и одной окружности.

Исследуем структуру пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий размерности 2 с торами T_i в тривиальном случае. Представим тор T_i как границу полнотория $S^1 \times I^2$ (при соответствующем выборе системы координат). Здесь $S^1 \times I^2$ получено в результате вращения квадрата $[1, 3] \times \{0\} \times \times [-1, 1]$ вокруг третьей координатной оси. Пусть $\{x, y, z\}$ — стандартные прямоугольные координаты, а $\{\rho, \alpha, z\}$ — полярно цилиндрические координаты. Если $\{\rho=2,\ z=0\}$ — средняя замкнутая траектория b_k, то векторное поле представляется в виде суммы двух векторных полей: гиперболического на каждом квадрате и касательного к траекториям вращения. Первое задается движением по кривым

$$\rho = 2 + C_1e^t, \quad \alpha = \text{const}, \quad z = C_2e^{-t}.$$

Учитывая второе движение, получаем, что динамика на полнотории задается движением по кривым

$$x = (2 + C_1e^t)\cos t, \quad y = (2 + C_1e^t)\sin t, \quad z = C_2e^{-t}.$$

Если траектория пересекает тор в точке $\rho=1,\ \alpha=\alpha_0,\ z=z_0>0$, то вторая ее точка пересечения с тором имеет координаты

$$x = (2-z_0)\cos(\alpha_0+\ln z_0), \quad y = (2-z_0)\sin(\alpha_0+\ln z_0), \quad z = 1. \tag{1}$$

Представим тор T в виде объединения $T=T^-\cup T^+$, в котором

$$T^- = \{\rho\in\{1;3\},\ -1\le z\le 1\}, \quad T^+ = \{1\le\rho\le 3,\ z\in\{-1;1\}\}.$$

Тогда $T^-\subset\Phi$ — множество точек, по которым траектории входят в полноторий, а $T^+\subset F$ — множество точек, по которым они выходят из него.

Формула (1) задает отображение g точек из T^- с $\rho=1,\ z>0$ в точки из T^+. Аналогичные формулы имеют место при $\rho=3$ и $z<0$.

Пересечение устойчивого многообразия средней замкнутой траектории с тором состоит из двух окружностей $\rho=1,\ z=0$ и $\rho=3,\ z=0$, а неустойчивого — из окружностей $\rho=2,\ z=-1$ и $\rho=2,\ z=1$, которые будем обозначать v^1, v^2 и u^1, u^2 соответственно. Из условий трансверсальности пересечения устойчивых и неустойчивых многообразий следует, что кривые u_i пересекаются с окружностями v^1, v^2 трансверсально. Тогда в окрестности точки пересечения $u_i\cap v^1$ кривая u_i задается уравнением $\rho=1,\ z=t,\ \alpha=tk(t)$, где $k(t)$ — гладкая функция. Образом этой кривой при отображении g будет кривая

$$x = (2-t)\cos(tk(t)+\ln t), \quad y = (2-t)\sin(tk(t)+\ln t), \quad z = 1.$$

При $t\to 0+$ эта кривая наматывается на окружность $u^1=\{\rho=2,\ z=1\}$, а касательная к кривой стремится к касательной к окружности. При $t\to 0-$ происходит то же самое, с заменой $z=1$ на $z=-1$ и t на $|t|$.

Аналогично для дуг из пересечений $u_i\cap v^2$ с $\rho=3$ образ дуги кривой u_i будет наматываться на те же окружности $u^1=\{\rho=2,\ z=1\}$ и $u^2=\{\rho=2,\ z=-1\}$.

Для пересечений $v_i\cap u^1$ и $v_i\cap u^2$ из верхнего и нижнего оснований предельными множествами прообраза $g^{-1}(v_i)$ будут окружности v^1 и v^2.

Уменьшая окрестность замкнутой траектории, можно добиться, чтобы выполнялись два таких свойства:

1) каждая дуга из пересечения $u_i\cap T$ пересекает v^1 или v^2 трансверсально в точности в одной точке; каждая дуга из пересечения $v_i\cap T$ пересекает u^1 или u^2 в одной точке;

2) если на каждой дуге из пересечений $u_i\cap T$ и $v_j\cap T$, а также на торе T зафиксировать ориентации, то все пересечения $g(u_i)\cap v_j$ будут иметь один

знак; аналогично, все пересечения $g^{-1}(v_j) \cap u_i$ также будут иметь один знак.

Здесь знак пересечения будет положительным, если ориентации пересекающихся кривых определяют ориентацию тора, совпадающую с заданной, и отрицательным — в противном случае.

Окрестность замкнутой траектории, для которой выполняются эти свойства, будем называть стандартной.

Для скрученной окрестности понятие стандартной окрестности вводится аналогично.

3. Диаграмма векторного поля без замкнутых траекторий индексов 0 и 2. Рассмотрим случай векторного поля на замкнутом ориентированном многообразии, не имеющем замкнутых траекторий индексов 0 и 2.

На окружностях (в первом и во втором наборах), которые соответствуют замкнутым траекториям, введем ориентацию параллельно направлению движения по соответствующей замкнутой траектории. Разобьем эти ориентированные окружности на пары так, чтобы окружности одной пары соответствовали одной замкнутой траектории.

Будем выбирать окрестности среди замкнутых траекторий β_k достаточно малыми так, чтобы они были стандартными.

На каждом торе T_i (если возможно) выделим простой цикл, ограничивающий диск, который пересекается с соответствующей замкнутой траекторией трансверсально в одной точке.

Комплекс N с двумя наборами окружностей, ориентациями части окружностей и разбиениями их на пары, а также с выделенными циклами для торов T_i называется диаграммой D векторного поля X.

Две диаграммы называются изоморфными, если существует гомеоморфизм $f\colon N \to N'$, который переводит первый набор окружностей в первый, второй во второй, сохраняя при этом разбиение окружностей на пары и ориентации (на тех окружностях, на которых они заданы), а выделенные циклы в циклы, гомотопные выделенным циклам на соответствующих торах T_i.

Теорема 1. *Для того чтобы векторное поле Морса – Смейла X с* bch 2 *без замкнутых траекторий индексов 0 и 2 было топологически эквивалентным полю X', необходимо и достаточно, чтобы существовали их изоморфные диаграммы.*

Доказательство. *Необходимость.* Пусть векторные поля X и X' топологически эквивалентны. Тогда существует гомеоморфизм h, переводящий интегральные траектории векторного поля X в интегральные траектории поля X'. Если для одного поля построить диаграмму D, то гомеоморфизм h отображает диаграмму D в диаграмму D' второго векторного поля и, таким образом, задает изоморфизм между диаграммами.

Достаточность. Пусть задан изоморфизм между диаграммами векторных полей Морса – Смейла. Покажем, как построить другой изоморфизм диаграмм, для которого гомеоморфизм $f\colon N \to N$ можно продлить до гомеоморфизма многообразий.

Сначала подправим изоморфизм на торах и продлим его до гомеоморфизма полноториев, которые являются окрестностями средних замкнутых траекторий. По построению пересечения u_i с тором T_j образуют параллельные отрезки, которые при отображении g переходят в кривые, накручивающиеся на окружности. Растягивая и сжимая части торов вдоль параллельных отрезков, можно добиться, чтобы образы параллельных отрезков при отображении g переходили в соответствующие образы. Тогда гомеоморфизмы торов можно подправить так, что они будут коммутировать с отображениями g.

Теперь можно продлить гомеоморфизм торов до гомеоморфизмов полноториев. Для этого воспользуемся гомотопностью выделенных циклов. Это условие равносильно тому, что каждая окружность тора T_i, ограничивающая диск, в полнотории отображается в окружность с таким же свойством. Тогда гомеоморфизм с окружности продлим до гомеоморфизма диска так, чтобы он был согласован с отображением последования между тором и диском. Далее, дополнение к этому диску в полнотории является трехмерным диском, и, воспользовавшись согласованностью гомеоморфизма тора с отображением g, можно продлить гомеоморфизм с границы диска внутрь вдоль интегральных траекторий. Для этого зафиксируем на полнотории риманову метрику. Рассмотрим части траекторий, лежащие в трехмерном диске, с концами на его границе. Тогда по построению гомеоморфизма на границе он отображает каждую пару концов одной траектории в такую же пару. Зададим гомеоморфизм между этими частями траекторий так, чтобы любые дуги этих траекторий имели пропорциональные длины. Так построенный гомеоморфизм частей траекторий будет задавать гомеоморфизм дисков.

Продлим гомеоморфизм с поверхности Φ на внутренность $U(K)$.

Для каждой нижней замкнутой траектории α_i поля X выберем окрестность такую, как в п. 2, с $T_i^+ \subset \Phi$ — достаточно малой окрестностью кривой u_i. Для поля X' эти окрестности выберем так, чтобы

$$T_i^{+\prime} = f\left(T_i^+\right).$$

Тогда существуют естественные гомеоморфизмы между такими окрестностями, которые совпадают с f на T_i. Поскольку α_i — нижняя замкнутая траектория, то можно считать, что T_i^+ не пересекается с u_j, кроме замкнутых кривых u_i^1 и u_i^2.

Для каждой особой точки индекса 1 существует окрестность, гомеоморфная полному цилиндру $\{\rho \le 1,\ -1 \le z \le 1\}$. При этом будем предполагать, что боковые поверхности таких цилиндров переходят в достаточно малые окрестности кривых u_i на поверхности Φ. Для поля X' цилиндры построим так, чтобы их боковые поверхности совпадали с образами боковых поверхностей при гомеоморфизме f. Между цилиндрами существуют естественные гомеоморфизмы, которые совпадают с f на боковых поверхностях.

Если с $U(K)$ удалить построенные цилиндры — окрестности особых точек индекса 1 и полнотории — окрестности нижних замкнутых траекторий, то получим объединение трехмерных дисков, каждый из которых содержит по одному источнику. Имея гомеоморфизм границ этих дисков, продлим его внутрь вдоль интегральных траекторий. Таким образом, получим искомый гомеоморфизм $U(K)$.

Продлив гомеоморфизм на оставшуюся часть многообразия M так же, как на $U(K)$, получим искомый гомеоморфизм многообразия M.

4. Стабильная эквивалентность диаграмм. Рассмотрим, что происходит с диаграммой D при другом выборе окрестностей средних траекторий β_k.

Пальчиковым движением вдоль дуги кривой γ называется изотопия, переводящая один из концов этой дуги в другой и неподвижная вне ε-окрестности этой дуги (в некоторой римановой метрике).

Если мы уменьшаем окрестность средних замкнутых траекторий, то на диаграмме происходит последовательность пальчиковых движений. Эти движения осуществляются изотопиями кривых u_i в Φ вдоль дуги γ окружности из пересечения $F \cap \Phi \cap T_i$. При этом направление пальчикового движения должно быть параллельным движению по соответствующей средней траектории. При каждом таком пальчиковом движении после пересечения кривой u_i с v_j возникает новая точка пересечения между этими кривыми. (Фактически это точка из пересечения $g(u_i)$ с v_j, переместившаяся из тора T_i в $F \cap \Phi$.) Обратная процедура состоит в движении Уитни вдоль треугольника с границей, состоящей из дуги γ и дуг кривых u_i и v_j. При этом движение по дуге γ от кривой v_j к u_i должно быть параллельным движению по средней траектории. Движение Уитни приводит к исчезновению точек пересечения на диаграмме. Такие пальчиковые движения и движение Уитни назовем допустимыми.

Назовем диаграммы стабильно эквивалентными, если из одной можно получить диаграмму, изоморфную другой, в результате последовательных применений допустимых пальчиковых движений или движений Уитни.

Предложение 1. *Для того чтобы поле X было топологически эквивалентным X', необходимо и достаточно, чтобы их диаграммы были стабильно эквивалентны.*

Доказательство. Поскольку любые трубчатые окрестности изотопны, то из построения диаграммы следует, что две различные диаграммы одного и того же векторного поля имеют изотопные поверхности Φ и F, а также изотопные торы T_i. При изотопиях торов происходят допустимые пальчиковые движения и движения Уитни. При изотопии $\Phi \cap F$ диаграмма не изменяется, поскольку изотопия будет задавать изоморфизм диаграмм. Таким образом, две разные диаграммы одного и того же поля стабильно эквивалентны. Теперь, применяя теорему 1, завершаем доказательство предложения.

5. Минимальные диаграммы. Назовем диаграмму минимальной, если она имеет пересечений между кривыми u_i и v_i (которые будем называть вершинами) не больше, чем любая стабильно эквивалентная ей диаграмма.

Предложение 2. *Две минимальные диаграммы одного векторного поля изоморфны.*

Доказательство. Поскольку любые две диаграммы одного векторного поля стабильно эквивалентны, то между ними существует последовательность допустимых пальчиковых движений и движений Уитни, переводящая одну диаграмму в другую. Поскольку обе диаграммы минимальны, они имеют одинаковое число вершин и, значит, в этой последовательности пальчиковых движений столько же, сколько движений Уитни. Будем считать, что в этой последовательности нет двух последовательных взаимообратных движений. Иначе их можно сократить и получить последовательность, у которой на 2 движения меньше.

Первое движение должно увеличивать число точек пересечения, т. е. быть пальчиковым. Второе движение также будет пальчиковым. (Если это движение Уитни, то после его проведения можно будет еще сократить треугольник, образованный первым движением, что противоречит минимальности первоначальной диаграммы.) Рассмотрим первое в последовательности движение Уитни. Его можно поменять местами с предыдущим пальчиковым движением, поскольку изотопии, осуществляющие эти движения, имеют непересекающиеся носители. Если появится пара взаимообратных движений, то сократим ее. Если такая пара не появится, то поменяем движение Уитни со следующим пальчиковым движением и т. д. В результате все движения сократятся. Значит, две минимальные диаграммы изоморфны.

Следствие. *Векторные поля топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их минимальные диаграммы изоморфны.*

Доказательство получается в результате применения теоремы и предложений 1 и 2.

6. Векторные поля с замкнутыми траекториями индексов 0 и 2. Диаграмма D векторного поля Морса – Смейла с $\operatorname{beh} 2$ в общем случае строится аналогично диаграмме поля без замкнутых траекторий индексов 0 и 2. Поверхность Φ будет границей окрестности объединения устойчивых многообразий особых точек индексов 0 и 1, замкнутых траекторий индекса 0 и устойчивых многообразий нижних замкнутых траекторий. Поверхность F определяется так, что

$$P = \mathrm{Cl}(\Phi \cup F \setminus \Phi \cap F)$$

представляет собой объединение торов, которые являются регулярными окрестностями средних замкнутых траекторий.

Основная трудность в общем случае связана с возможным отсутствием кривых диаграммы, параллельных замкнутым траекториям, и выделенных циклов на торах, которые являются границами окрестностей этих траекторий. Это требует введения дополнительного инварианта, который обеспечил бы возможность продления гомеоморфизмов торов на внутренности полноториев. В дальнейшем он будет называться τ-инвариантом.

Для каждой замкнутой траектории индекса 0 выберем двумерный диск, пересекающий ее в одной точке, с границей S на торе T, который является границей окрестности замкнутой траектории. Приведем окружность S в общее положение с окружностями диаграммы и устойчивыми многообразиями и с помощью трюка Уитни сократим лишние пары точек.

Возможны несколько случаев, в которых τ-инвариант будет задаваться поразному:

1. Существует нижняя замкнутая траектория, устойчивое многообразие которой пересекается с тором T по не гомотопной нулю окружности. Тогда τ-инвариант будет числом алгебраических точек пересечения между этой окружностью и окружностью S. Заметим, что если таких не гомотопных нулю окружностей несколько, то они не пересекаются между собой и, следовательно, гомотопны между собой. Таким образом, τ-инварианты, построенные по разным окружностям, будут совпадать.

2. Если окружностей, указанных в первом случае, нет, то разрежем поверхность Φ по окружностям u_i. Рассмотрим ту компоненту связности Φ_j, которая пересекается с тором T. Тогда для нее существует изотопия (деформационная ретракция) к ее пересечению с тором T. Части дуг окружностей v_j, лежащие в этой компоненте связности, и окружности u_i границы образуют граф G с окружностями S_k на торе T. Если на графе есть цикл (или окружность), ограничивающий диск, который пересекается с замкнутой траекторией трансверсально в одной точке, то он и будет τ-инвариантом.

3. Если случаи 1 и 2 не выполняются, то τ-инвариант — это произвольная замкнутая кривая на торе T, которая является границей диска, имеющего одну точку трансверсального пересечения с замкнутой траекторией индекса 1.

Два τ-инварианта называются эквивалентными, если их числа n_i равны или соответствующие окружности (или циклы) гомотопны между собой.

Осуществим изотопию (деформационную ретракцию), обратную к проведенной в начале, т. е. от $\Phi_i \cap T$ к Φ_i. Тогда окружности и циклы, рассматриваемые в τ-инварианте, будут подмножеством объединения кривых u_i и v_j (случай 2) или замкнутой кривой на поверхности Φ (случай 3).

Для замкнутых траекторий индекса 2 τ-инварианты и их эквивалентность вводятся аналогично.

Диаграммой D векторного поля с замкнутыми траекториями индексов 0 и 2 называется комплекс N с двумя наборами окружностей u_i и v_i, ориентациями части окружностей и разбиениями их на пары, с выделенными циклами для торов T_i, а также τ-инвариантами для каждой замкнутой траектории индексов 0 и 2.

Изоморфизм и стабильная эквивалентность определяются так же, как и для диаграмм без замкнутых траекторий индексов 0 и 2, при условии, чтобы при изоморфизме τ-инварианты переходили в эквивалентные τ-инварианты.

Теорема 2. *Для того чтобы векторное поле Морса – Смейла X было топологически эквивалентным полю X', необходимо и достаточно, чтобы существовали их изоморфные диаграммы.*

Доказательство. *Необходимость* следует из построения. Докажем *достаточность*. Как и при доказательстве теоремы 1, гомеоморфизм комплексов K (возможно, подправив его) продлим до гомеоморфизма многообразия M^3 без окрестностей замкнутых траекторий индексов 0 и 2. Покажем, что если τ-инварианты эквивалентны, то гомеоморфизмы с торов, которые являются границами окрестностей замкнутых траекторий индексов 0 и 2, продлеваются во внутрь.

Если имеет место случай 1 из определения τ-инварианта, то, как и в теореме 1, используя отображение g, гомеоморфизм торов можно подправить до такого, чтобы образы границ дисков, пересекающих замкнутую траекторию трансверсально в одной точке, были гомотопны таким же. Здесь используем то, что соответствующие числа (τ-инварианты) равны. Значит, эти границы отличаются на скручивания Дена вдоль линии пересечения устойчивого многообразия нижней траектории с тором. Подправляя гомеоморфизм диаграммы на изотопию сжатия или растяжения к пересечению неустойчивых многообразий этой нижней траектории с поверхностью Φ, мы осуществляем необходимые скручивания Дена. Таким образом, как и в случаях 2 и 3, границы дисков переходят в кривые, гомотопные границам дисков, а значит, и сами являются границами таких дисков.

Использовав отображение последования, продлим гомеоморфизмы торов на диски, а затем вдоль траекторий и на весь полноторий. Таким образом, получим необходимый гомеоморфизм многообразий.

Аналогично п. 5. можно ввести понятие минимальной диаграммы и доказать их изоморфность. Тогда поля топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда их минимальные диаграммы изоморфны.

Назовем диаграмму строго минимальной, если замкнутые кривые, которые являются τ-инвариантами в случае 3, пересекаются с другими окружностями диаграммы в минимальном числе точек. Диаграммы строго изоморфны, если они изоморфны и τ-инварианты в точности отображаются в τ-инварианты. Очевидно, что векторные поля имеет лишь конечное число строго не изоморфных между собой строго минимальных диаграмм. От одной из них к другой можно перейти с помощью пальчиковых движений и движений Уитни.

7. Различающий граф векторного поля. Введем полный инвариант диаграмм относительно (строгого) изоморфизма. Он будет состоять из графа с дополнительной информацией.

Граф G образуем из кривых u_i и v_j, кривых из пересечений $\Phi \cap F \cap T_i$ и кривых, задающих τ-циклы. Вершины графа G — это точки пересечения этих кривых, а ребра — дуги между ними. Если кривая не пересекается с другими, то она образует петлю на графе (одну вершину и одно ребро с концами в ней). Обозначим вершины через A_i, а ребра через B_i. Зафиксируем произвольную ориентацию на ребрах, на которых она не задана.

Разрезав комплекс K по краю, получим набор поверхностей F_i с краем, на которых зафиксируем ориентации. Для каждой компоненты края, обходя ее по ориентации, согласованной с ориентацией поверхности F_i выпишем слово, состоящее из букв $B_j^{\pm 1}$ в соответствии со встречающимися ребрами. Буква имеет степень $+1$, если ориентация соответствующей ей дуги совпадает с этой ориентацией окружности, и -1 — в противном случае. Два слова называются эквивалентными, если одно можно получить из другого в результате циклической перестановки букв. Это соответствует другому выбору начала обхода окружности. Слова называются обратными, если одно получается из другого в результате выписывания букв в обратном порядке, с обращением степеней и, возможно, циклической перестановки. Это соответствует обходу окружности против ориентации.

Для каждой поверхности F_i составим список, который состоит из: 1) числа n_i, равного роду поверхности F_i, если поверхность ориентирована, и $-n_i$ — в противном случае; 2) слов, выписанных при обходе границы поверхности вдоль ориентации. Два таких списка назовем эквивалентными, если их числа n_i равны и между словами можно установить биекцию так, что соответствующие слова эквивалентны или обратны.

Таким образом, мы построили набор списков слов (НСС) так, что каждый список соответствует одной поверхности F_i. Два таких набора назовем эквивалентными, если существует биективное соответствие между списками такое, что соответствующие списки эквивалентны.

Составим также списки таких кривых:

1) кривых u_i, разбитых на пары;

2) кривых v_j, разбитых на пары;

3) выделенных циклов для средних траекторий;

4) циклов и окружностей, входящих в τ-инвариант (случай 2);

5) кривых, входящих в τ-инвариант (случай 3).

Для областей, лежащих на торе, в случае 1 включим в список соответствующее число.

Так построенный граф с НСС и списками 1 – 5 назовем различающим графом векторного поля.

Два различающих графа называются эквивалентными, если существует изоморфизм графов, который отображает НСС первого в НСС, эквивалентный НСС второго, а списки 1 – 5 в эквивалентные списки, сохраняя τ-инварианты.

Теорема 3. *Два векторных поля топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда существуют их минимальные диаграммы, имеющие эквивалентные различающие графы.*

Доказательство. Учитывая рассуждения, приведенные в п. 7, необходимо доказать, что эквивалентность различающих графов равносильна стабильной эквивалентности стабильно минимальных диаграмм. Доказательство этого аналогично доказательству теоремы 1 в [8] с заменой поверхности на комплекс K.

1. *Арансон С. Х., Гринес В. З.* Топологическая классификация потоков на замкнутых двумерных многообразиях // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, вып. 1. – С. 149 – 169.
2. *Омешков А. А., Шарко В. В.* О классификации потоков Морса – Смейла на двумерных многообразиях // Мат. сб. – 1998. – **189**, № 8. – С. 93 – 140.
3. *Fleitas G.* Classification of gradient like flows of dimensions two and three // Bol. Soc. brasil. mat. – 1975. – **9**. – P. 155 – 183.
4. *Пришляк А. О.* Векторные поля Морса – Смейла без замкнутых траекторий на трехмерных многообразиях // Мат. заметки. – 2002. – **71**, вып. 2. – С. 254 – 260.
5. *Пришляк А. О.* Векторные поля Морса – Смейла с конечным числом особых траекторий на трехмерных многообразиях // Допов. НАН України. – 1998. – № 6. – С. 43 – 47.
6. *Уманский Я. Л.* Необходимые и достаточные условия топологической эквивалентности трехмерных динамических систем Морса – Смейла с конечным числом особых траекторий // Мат. сб. – 1990. – **181**, № 2. – С. 212 – 219.
7. *Афраймович В. С., Шильников Л. П.* Об особых множествах систем Морса – Смейла // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1973. – **28**. – С. 181 – 214.
8. *Пришляк А. О.* О вложенных в поверхность графах // Успехи. мат. наук. – 1997. – **52**, вып. 4. – С. 211 – 212.

Получено 17.02.99