УДК 517.9

А. М. Самойленко (Ин-т математики НАН Украины, Киев),
А. Н. Станжицкий (Киев. нац. ун-т им. Т. Шевченко)

ОБ ИНВАРИАНТНЫХ ТОРАХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ИТО*

By using the Green – Samoilenko function, we obtain conditions for the existence of invariant sets of the Ito stochastic systems that are extensions of dynamical systems on a torus.

З допомогою функції Гріна – Самойленка одержано умови існування інваріантних множин стохастичних систем Іто, що є розширеннями динамічних систем на торі.

В работе [1] показано, что при исследовании решений системы стохастических уравнений Ито

$$dx = X(x)dt + Y(x)dW(t)$$

в окрестности тороидального многообразия $x = f(\varphi)$ ($\varphi \in \mathfrak{J}_m$ — m-мерный тор) удобно перейти от декартовых координат к локальным (φ, h).

Таким образом, пусть задано стохастическое линейное расширение динамической системы на торе $x = f(\varphi)$, $\varphi \in \mathfrak{J}_m$ (причем $\operatorname{rang}\{\partial f / \partial\varphi\} = m$ $\forall\varphi \in \mathfrak{J}_m$), которое является системой стохастических уравнений Ито вида

$$d\varphi = a(\varphi)dt, \quad dh = \big(P(\varphi)h + f(\varphi)\big)dt + g(\varphi)dW(t), \tag{1}$$

где a, P, f, g — непрерывные, периодические по φ_i с периодом 2π функции, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$, $h = (h_1, \ldots, h_n)$, $\varphi \in \mathfrak{J}_m$, $h \in \mathbf{R}^n$, $W(t)$ — винеровский процесс на $\mathbf{R}$, заданный на некотором вероятностном пространстве (Ω, F, P).

Будем считать также, что $a(\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица. При этом условии первое уравнение из (1) всегда имеет единственное решение $\varphi_t(\varphi)$: $\varphi_0(\varphi) = \varphi$, подставляя которое во второе уравнение, получаем для h_t систему линейных дифференциальных уравнений Ито

$$dh_t = \big(P(\varphi_t(\varphi))h_t + f(\varphi_t(\varphi))\big)dt + g(\varphi_t(\varphi))\,dW(t). \tag{2}$$

Для каждого $t \in \mathbf{R}$ определим σ-алгебру F_t как минимальную σ-алгебру, порожденную множествами вида

$$\{W(s_2) - W(s_1) : s_1 \le s_2 \le t\}.$$

Определение 1. *Будем говорить, что случайный процесс h_t является решением системы* (2) *на* $\mathbf{R}$, *если:*

1) *для произвольного* $t \in \mathbf{R}$ h_t — *F_t-измерим;*

2) h_t — *непрерывный с вероятностью* 1 *на* $\mathbf{R}^n$;

3) *для произвольных* $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \mathrm{M}|h_t|^2 < \infty;$$

4) *для произвольных* $-\infty < t_0 < t_1 < \infty$ *с вероятностью* 1

$$h_t = h_{t_0} + \int_{t_0}^{t} \big(P(\varphi_s(\varphi))h_s + f(\varphi_s(\varphi))\big)ds + \int_{t_0}^{t} g(\varphi_s(\varphi))dW(s).$$

---

* Выполнена при частичной финансовой поддержке Государственного фонда фундаментальных исследований (грант № 01.07/00109).

Случайный процесс h_t назовем решением задачи Коши при $t \geq 0$ с начальным F_0-измеримым условием h_0, имеющим конечный второй момент, если выполнены условия 1 – 4 при $t \geq 0$.

Как следует, например, из [2, с. 141], при выполнении приведенных выше условий на правые части такое решение существует и единственно в сильном смысле.

Определение 2. *Случайную функцию* $h = u(t, \varphi, \omega)$, $\varphi \in \mathfrak{J}_m$, $\omega \in \Omega$, *назовем случайным инвариантным тором системы* (1), *если*:

1) *с вероятностью* 1 $u(t, \varphi + 2\pi k, \omega) = u(t, \varphi, \omega)$ *для любого целочисленного вектора* $k = (k_1, \ldots, k_m)$;

2) *пара* $(\varphi_t(\varphi),\ h_t = u(t, \varphi_t(\varphi), \omega))$, *где* $\varphi_t(\varphi)$ — *решение первого уравнения из* (1), *является решением системы* (1) *на* $\mathbf{R}$.

Аргумент ω в дальнейшем будем опускать.

В [3] для обычных линейных расширений изучались условия существования инвариантных торов, их устойчивость и дихотомия. При этом с помощью функции Грина – Самойленко удалось получить интегральное представление инвариантного тора.

Цель данной работы — получить аналогичное интегральное представление для случайного инвариантного тора с помощью стохастического интеграла Ито.

Для дальнейшего изложения нам понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть функция* $h(t, s)$ *непрерывна вместе со своей частной производной* $h_t'(t, s)$ *для всех* $t \geq s \in \mathbf{R}$, *а случайный процесс* $f(t)$ *является* F_t-*измеримым* (F_t — *поток* σ-*алгебр, принимающих участие в построении стохастического интеграла*) *и таким, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t,s)|^2 \mathrm{M}|f(s)|^2 ds < \infty \quad \forall t \in \mathbf{R}. \tag{3}$$

Тогда если интеграл

$$\int_{-\infty}^{t} |h_t'(t,s)|^2 \mathrm{M}|f(s)|^2 ds \tag{4}$$

сходится равномерно при t, *принадлежащем произвольному отрезку числовой оси* $[t_1, t_2]$, *то случайный процесс*

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t,s) f(s) dW(s) \tag{5}$$

имеет стохастический дифференциал

$$dy(t) = \int_{-\infty}^{t} h_t'(t,s) f(s) dW(s) dt + h(t,t) f(t) dW(t). \tag{6}$$

***Замечание* 1.** Интеграл в формуле (5) понимается как среднеквадратический предел последовательности процессов

$$y_n(t) = \int_{-n}^{t} h(t,s) f(s) dW(s),$$

существование которого следует из (3).

***Замечание* 2.** Для конечного интервала числовой оси данный результат получен в [4, с. 264].

Доказательство. Установим, что с вероятностью 1 для произвольных $t_1 < t_2$ справедливо равенство

$$y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^{u} h_t'(u,s) f(s) dW(s) \right) du + \int_{t_1}^{t_2} h(u,u) f(u) dW(u). \tag{7}$$

Выберем произвольное $n > 0$ и рассмотрим собственный стохастический интеграл

$$y_n(t) = \int_{-n}^{t} h(t,s) f(s) dW(s). \tag{8}$$

Тогда из (3) для любого $t > -n$ следует

$$\mathrm{M}|y_n(t) - y(t)|^2 \to 0, \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Действительно,

$$\mathrm{M}|y_n(t) - y(t)|^2 = \mathrm{M}\left| \int_{-\infty}^{-n} h(t,s) f(s) dW(s) \right|^2 \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{-n} |h(t,s)|^2 \mathrm{M}|f(s)|^2 ds \to 0, \quad n \to \infty.$$

Тогда из работы [4, с. 264] следует, что для последовательности случайных процессов $y_n(t_i)$, $i = 1, 2$, на отрезке $[-n, t]$ с вероятностью 1 справедлива формула

$$y_n(t_2) - y_n(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-n}^{u} h_t'(u,s) f(s) dW(s) \right) du + \int_{t_1}^{t_2} h(u,u) f(u) dW(u) \tag{10}$$

для произвольных $t_1 < t_2$.

Возьмем произвольные $t_1, t_2 \in \mathbf{R}^1$ и выберем достаточно большое n, чтобы точки $t_1, t_2 \in [-n, t]$. Оценим разность

$$\mathrm{M}\left| y(t_2) - y(t_1) - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^{u} h_t'(u,s) f(s) dW(s) \right) du - \right.$$

$$\left. - \int_{t_1}^{t_2} h(u,u) f(u) dW(u) \right|^2 = \mathrm{M}\left| y(t_2) - y_n(t_2) - y(t_1) + y_n(t_1) - \right.$$

$$- \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^{u} h_t'(u,s) f(s) dW(s) \right) du - \int_{t_1}^{t_2} h(u,u) f(u) dW(u) +$$

$$\left. + \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-n}^{u} h_t'(u,s) f(s) dW(s) \right) du + \int_{t_1}^{t_2} h(u,u) f(u) dW(u) \right|^2 \le$$

$$\le 3\left[\mathrm{M}|y(t_2) - y_n(t_2)|^2 + \mathrm{M}|y(t_1) - y_n(t_1)|^2 + \right.$$

$$\left. + \mathrm{M}\left| \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-\infty}^{u} h_t'(u,s) f(s) dW(s) \right) du - \int_{t_1}^{t_2} \left(\int_{-n}^{u} h_t'(u,s) f(s) dW(s) \right) du \right|^2 \right]. \tag{11}$$

Два первых слагаемых в последней части формулы (11) в силу (9) стремятся к нулю при $n \to \infty$. Оценим последнее слагаемое:

$$M\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{-\infty}^{u} h_t'(u,s)f(s)dW(s)\right)du - \int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{-n}^{u} h_t'(u,s)f(s)dW(s)\right)du\right|^2 =$$

$$= M\left|\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{-\infty}^{-n} h_t'(u,s)f(s)dW(s)\right)du\right|^2 \le M\left(\int_{t_1}^{t_2}\left|\int_{-\infty}^{-n} h_t'(u,s)f(s)dW(s)\right|du\right)^2 \le$$

$$\le (t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2} M\left|\left(\int_{-\infty}^{-n} h_t'(u,s)f(s)dW(s)\right)\right|^2 =$$

$$= (t_2-t_1)\int_{t_1}^{t_2}\left(\int_{-\infty}^{-n}(h')_t^2(u,s)M|f(s)|^2 ds\right)du \le$$

$$\le (t_2-t_1)^2 \sup_{u\in[t_1,t_2]} \int_{-\infty}^{-n}(h')_t^2(u,s)M|f(s)|^2 ds \to 0$$

при $n \to \infty$. Последнее соотношение следует из того, что интеграл (4) сходится равномерно по $u \in [t_1, t_2]$. Поэтому правая часть в формуле (11) стремится к нулю при $n \to \infty$. Отсюда следует справедливость соотношения (7), что и доказывает лемму.

Обозначим через $\Phi_\tau^t(\varphi)$ фундаментальную матрицу системы уравнений

$$\frac{dh}{dt} = P(\varphi_t(\varphi))h. \tag{12}$$

Введем, аналогично [3, с. 120], функцию Грина – Самойленко, а именно, положим

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases} \Phi_\tau^0(\varphi), & \tau \le 0; \\ 0, & \tau > 0, \end{cases} \tag{13}$$

и назовем ее функцией Грина – Самойленко, если интегралы

$$\int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\| d\tau, \qquad \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2 d\tau$$

равномерно ограничены по φ:

$$\int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\| d\tau + \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2 d\tau \le K. \tag{14}$$

Рассмотрим сумму

$$u(t,\varphi,u) = \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi)f(\varphi_\tau(\varphi))d\tau + \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi)g(\varphi_\tau(\varphi))dW(\tau+t). \tag{15}$$

Покажем, что данные интегралы существуют: первый как обычный, а второй как стохастический интеграл Ито.

Действительно, как следует из (14), первый интеграл мажорируется сходящимся интегралом

$$\left\| \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi))\,d\tau \right\| \le \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|\,d\tau \max_{\varphi\in\Im_m} |f(\varphi)|.$$

Покажем существование второго интеграла. Выполним в нем замену $t+\tau = s$. Тогда получим

$$\int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi)\, g(\varphi_\tau(\varphi))\,dW(\tau+t) = \int_{-\infty}^{t} G_0(s-t,\varphi)\, g\big(\varphi_{s-t}(\varphi)\big)\,dW(s).$$

Существование же данного интеграла для произвольного $t \in \mathbf{R}$ следует из оценки

$$\int_{-\infty}^{t} \|G_0(s-t,\varphi)\|^2 \big|g\big(\varphi_{s-t}(\varphi)\big)\big|^2 ds = \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2 |g(\varphi_\tau(\varphi))|^2 d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2\, d\tau \max_{\varphi\in\Im_m} |g(\varphi)|^2.$$

Первый интеграл в (15) в силу равномерной сходимости и непрерывности подынтегральной функции по τ и φ является непрерывным по $\varphi \in \Im_m$.

Покажем, что второй интеграл непрерывен по φ в среднем квадратическом.

Действительно, для любого $n>0$, как следует из формулы

$$\mathrm{M}\left| \int_{-n}^{t} G_0(\tau-t,\varphi)\, g(\varphi_{\tau-t}(\varphi))\,dW(\tau) - \int_{-n}^{t} G_0(\tau-t,\varphi')\, g\big(\varphi_{\tau-t}(\varphi')\big)\,dW(\tau) \right|^2 =$$

$$= \int_{-n}^{0} \big\|G_0(\tau,\varphi) g(\varphi_\tau(\varphi)) - G_0(\tau,\varphi') g\big(\varphi_\tau(\varphi')\big)\big\|^2 d\tau \to 0, \qquad \varphi \to \varphi',$$

стохастический интеграл

$$\int_{-n}^{0} G_0(\tau,\varphi)\, g\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\,dW(\tau+t)$$

является непрерывным в среднем квадратическом по $\varphi \in \Im_m$. Поэтому

$$\mathrm{M}\left| \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi)\, g\big(\varphi_\tau(\varphi)\big)\,dW(\tau+t) - \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi')\, g\big(\varphi_\tau(\varphi')\big)\,dW(\tau+t) \right|^2 \le$$

$$\le 2\left[\mathrm{M}\left| \int_{-n}^{0} \big(G_0(\tau,\varphi)\, g(\varphi_\tau(\varphi)) - G_0(\tau,\varphi') g(\varphi_\tau(\varphi'))\big)\,dW(\tau+t) \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \mathrm{M}\left| \int_{-\infty}^{-n} \big(G_0(\tau,\varphi)\, g(\varphi_\tau(\varphi)) - G_0(\tau,\varphi') g(\varphi_\tau(\varphi'))\big)\,dW(\tau+t) \right|^2 \right] \le$$

$$\le 2\mathrm{M}\left| \int_{-n}^{0} \big(G_0(\tau,\varphi)\, g(\varphi_\tau(\varphi)) - G_0(\tau,\varphi')\, g\big(\varphi_\tau(\varphi')\big)\big)\,dW(\tau+t) \right|^2 +$$

$$+ 8\int_{-\infty}^{-n} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2\, d\tau \sup_{\varphi\in\Im_m} |g(\varphi)|^2.$$

Первое слагаемое в последней части неравенства стремится к нулю при $\varphi \to \varphi'$, а второе равномерно по $\varphi \in \mathfrak{I}_m$ стремится к нулю при $n \to \infty$ в силу определения функции Грина – Самойленко. Таким образом, второе слагаемое в (15) непрерывно в среднем квадратическом, поэтому и все выражение (15) непрерывно в среднем квадратическом.

***Замечание* 3.** Если функция $g(\varphi)$ липшицева по φ, $a(\varphi) \in C^1(\mathfrak{I}_m)$, а $G_0(t, \varphi)$ дифференцируемая по φ и удовлетворяет оценке

$$\left\| \frac{\partial G_0(t,\varphi)}{\partial \varphi_i} \right\| \leq K \exp\{\gamma t\}, \quad i = 1, \ldots, m, \quad t \leq 0$$

(условия ее выполнения хорошо известны [3, с. 192]), то тор, определенный формулой (15), непрерывен по φ с вероятностью 1.

Действительно,

$$\mathrm{M}\left| \int_{-\infty}^{0} \left[G_0(\tau,\varphi) g(\varphi_\tau(\varphi)) - G_0(\tau,\varphi') g(\varphi_\tau(\varphi')) \right] dW(\tau+t) \right|^2 \leq$$

$$\leq \int_{-\infty}^{0} \left| G_0(t,\varphi) g(\varphi_\tau(\varphi)) - G_0(\tau,\varphi') g(\varphi_\tau(\varphi')) \right|^2 d\tau \leq$$

$$\leq 2\left[\int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2 \left| g(\varphi_\tau(\varphi)) - g(\varphi_\tau(\varphi')) \right|^2 d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi) - G_0(\tau,\varphi')\|^2 \left| g(\varphi_\tau(\varphi')) \right|^2 d\tau \right].$$

Отсюда, используя гладкость $\varphi_t(\varphi)$ по $\varphi \in \mathfrak{I}_m$ как по параметру, получаем, что последнее выражение не превышает

$$2\left[L \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2 d\tau |\varphi - \varphi'| + \int_{-\infty}^{0} K^2 \exp\{\gamma\tau\} d\tau L_1 |\varphi - \varphi'| \right] \leq C|\varphi - \varphi'|^2.$$

Тогда из теоремы Колмогорова о непрерывности случайных процессов следует справедливость утверждения.

Покажем, наконец, что выражение

$$h = u(t,\varphi,\omega) = \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) dW(\tau+t) \tag{16}$$

определяет инвариантный тор системы (1). Для этого покажем выполнение всех условий определения 2. Действительно, поскольку для любых $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, $t \in \mathbf{R}$, стохастический интеграл в (16) в силу своего определения является случайной величиной, то формула (16) задает случайное поле. Его периодичность по φ_i следует из периодичности по φ_i подынтегральных выражений.

Покажем, наконец, что

$$h_t = u(t, \varphi_t(\varphi), \omega) = \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi))) d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) f(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi))) dW(\tau + t) \tag{17}$$

является решением системы (2).

Действительно, в силу свойств функции Грина – Самойленко имеем

$$h_t = \int_{-\infty}^{0} G_t(\tau + t, \varphi) f(\varphi_{\tau+t}(\varphi)) d\tau + \int_{-\infty}^{0} G_t(\tau + t, \varphi) g(\varphi_{\tau+t}(\varphi)) dW(\tau + t) =$$

$$= \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) g(\varphi_\tau(\varphi)) dW(\tau).$$

Из данного представления и свойств стохастического интеграла следует, что h_t F_t -измеримо для любого $t \in \mathbf{R}$ и, очевидно, выполнены условия 2 и 3 из определения 1. Покажем выполнение условия 4 из этого определения. Для этого, использовав приведенную выше лемму, вычислим стохастический дифференциал dh_t:

$$dh_t = \left(\int_{-\infty}^{t} \frac{\partial G_t}{\partial t}(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + G_t(\tau, \varphi) f(\varphi_t(\varphi)) \right) dt +$$

$$+ \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial G_t}{\partial t}(\tau, \varphi) g(\varphi_\tau(\varphi)) dW(\tau) dt + G_t(t, \varphi) g(\varphi_t(\varphi)) dW(t). \tag{18}$$

И поскольку $G_t(\tau, \varphi) = \Phi_\tau^t(\varphi)$ при $t \geq \tau$ [3, с. 122], то

$$\frac{\partial G_t(\tau, \varphi)}{\partial t} = P(\varphi_t(\varphi)) G_t(\tau, \varphi), \qquad G_t(t, \varphi) = E,$$

а поэтому в силу непрерывности и периодичности $P(\varphi)$ полученные формальным дифференцированием интегралы сходятся равномерно по $t \in \mathbf{R}$, так как

$$\int_{-\infty}^{t} \|G_t(\tau, \varphi)\| d\tau = \int_{-\infty}^{0} \|G_t(\tau + t, \varphi)\| d\tau = \int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau, \varphi_t(\varphi))\| d\tau.$$

А так как $\varphi_t(\varphi) \in \mathfrak{T}_m$ для произвольного $t \in \mathbf{R}$ и $\varphi \in \mathfrak{T}_m$, то в силу определения функции Грина – Самойленко последний интеграл сходится равномерно по $\varphi \in \mathfrak{T}_m$, $t \in \mathbf{R}$.

Таким образом, дифференцирование в (18) обоснованно. Продолжая этот процесс, получаем

$$dh_t = \left(P(\varphi_t(\varphi)) \left[\int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) f(\varphi_\tau(\varphi)) d\tau + \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) g(\varphi_\tau(\varphi)) dW(\tau) \right] + \right.$$

$$\left. + f(\varphi_t(\varphi)) \right) dt + g(\varphi_t(\varphi)) dW(t) =$$

$$= (P(\varphi_t(\varphi)) h_t + f(\varphi_t(\varphi))) dt + g(\varphi_t(\varphi)) dW(t),$$

откуда следует, что $h_t = u(t, \varphi_t(\varphi), \omega)$ является решением уравнения (2). Таким образом, выражение (16) определяет инвариантный тор системы (1).

Покажем его равномерную ограниченность в среднем квадратическом:

$$\sup_{t\in\mathbf{R},\varphi\in\mathfrak{I}_m} \mathrm{M}|u(t,\varphi,\omega)|^2 \le 2\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}\left(\int_{-\infty}^{0}\|G_0(\tau,\varphi)\|d\tau\right)^2 \sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}|f(\varphi)|^2 +$$

$$+\,2\sup_{t\in\mathbf{R},\varphi\in\mathfrak{I}_m}\mathrm{M}\left|\int_{-\infty}^{t} G_0(s-t,\varphi)g(\varphi_{s-t}(\varphi))dW(s)\right|^2 =$$

$$= K_1\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}|f(\varphi)|^2 + 2\sup_{t\in\mathbf{R},\varphi\in\mathfrak{I}_m}\int_{-\infty}^{t}\|G_0(s-t,\varphi)\|^2|g(\varphi_{s-t}(\varphi))|^2 ds =$$

$$= K_1\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}|f(\varphi)|^2 + 2\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}\int_{-\infty}^{0}\|G_0(\tau,\varphi)\|^2|g(\varphi_\tau(\varphi))|^2 d\tau \le$$

$$\le K_1\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}|f(\varphi)|^2 + K_2\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}|g(\varphi)|^2, \tag{19}$$

где

$$K_1 = 2\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}\left(\int_{-\infty}^{0}\|G_0(\tau,\varphi)\|d\tau\right)^2, \qquad K_2 = 2\sup_{\varphi\in\mathfrak{I}_m}\int_{-\infty}^{0}\|G_0(\tau,\varphi)\|^2 d\tau.$$

На основании изложенного можно сформулировать утверждение, которое определяет достаточные условия существования инвариантного тора системы (1) для произвольных непрерывных на торе функций f и g.

Теорема 1. *Если правая часть системы*

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h$$

с липшицевой по φ *функцией* $a(\varphi)\in C(\mathfrak{I}_m)$ *и* $P(\varphi)\in C(\mathfrak{I}_m)$ *имеет функцию Грина – Самойленко* $G_0(\tau,\varphi)$, *то для произвольных* $f(\varphi), g(\varphi)\in C(\mathfrak{I}_m)$ *система уравнений* (1) *имеет случайный инвариантный тор, определенный соотношением* (16) *и удовлетворяющий оценке* (19).

Пример. Рассмотрим систему

$$d\varphi = -\sin\varphi dt, \qquad dh = (-h+\sin\varphi)dt + \sin\varphi dW(t). \tag{20}$$

Здесь $\varphi\in[0,2\pi]$, $h\in\mathbf{R}$, $W(t)$ — одномерный винеровский процесс на $\mathbf{R}$. Для данной системы функция Грина – Самойленко согласно (13) имеет вид

$$G_0(\tau,\varphi) = \begin{cases}\exp\{\tau\}, & \tau\le 0;\\ 0, & \tau>0.\end{cases}$$

Тогда согласно (16) инвариантный тор определяется выражением

$$h = \int_{-\infty}^{0}\exp\{\tau\}\sin\varphi_\tau(\varphi)d\tau + \int_{-\infty}^{0}\exp\{\tau\}\sin\varphi_\tau(\varphi)dW(t+\tau),$$

в котором

$$\sin(\varphi_\tau(\varphi)) = \begin{cases}0, & \varphi = k\pi, \quad k\in Z;\\ \dfrac{2\exp\{\tau\}\tan(\varphi/2)}{\exp\{2\tau\}+\tan^2(\varphi/2)}, & \varphi\ne k\pi.\end{cases}$$

Вычисляя $h = u(t,\varphi,\omega)$, получаем выражение

$$h = u(t, \varphi, \omega) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \varphi = k\pi, \quad k \in Z; \\ \tan(\varphi / 2)\ln\left(\sin^2(\varphi / 2)\right) + 2\exp\{-t\}\tan(\varphi / 2) \times & \\ \times \int_{-\infty}^{t} \dfrac{\exp\{2s\}}{\exp\{2(s-t)\} + \tan^2(\varphi / 2)} dW(s), & \varphi \neq k\pi, \end{cases}$$

которое определяет случайный инвариантный тор системы (1).

Таким образом, теорема 1 связывает условия существования случайных инвариантных торов системы (1) с наличием в однородной детерминированной системе

$$\frac{d\varphi}{dt} = a(\varphi), \qquad \frac{dh}{dt} = P(\varphi)h \tag{21}$$

функции Грина – Самойленко задачи об инвариантных торах. Очевидно, что такая функция будет существовать, если матрицант системы (12) допускает оценку

$$\left\| \Phi_\tau^t(\varphi) \right\| \leq K \exp\{-\gamma(t-\tau)\} \tag{22}$$

при $t \geq \tau$ с некоторыми положительными константами K и γ, не зависящими от t, τ, φ. Данную оценку для матрицанта можно получить, используя неравенство Важевского, если потребовать для матрицы $P(\varphi)$ выполнения неравенства

$$(P(\varphi)h, h) \leq -\gamma |h|^2 \tag{23}$$

для любых $h \in \mathbf{R}^n$, $\varphi \in \mathfrak{I}_m$. Действительно, тогда, обозначив через h_t решение системы (12) для произвольного $\varphi \in \mathfrak{I}_m$, получим неравенство

$$\frac{d}{dt}(h_t, h_t) \leq -2\gamma |h_t|^2.$$

Интегрируя последнее неравенство, приходим к оценке

$$|h_t| \leq \exp\{-\gamma(t-\tau)\} |h_\tau|,$$

справедливой для произвольного решения системы (12), а значит, и для столбцов матрицанта, что доказывает неравенство (22).

Покажем, что при выполнении оценки (22) инвариантный случайный тор системы (1) является экспоненциально устойчивым с вероятностью 1 и в среднем квадратическом. Действительно, выполним в системе (1) замену

$$h = u(t, \varphi, \omega) + z. \tag{24}$$

Тогда если $(\varphi_t(\varphi), h_t)$ — решение системы (1), то

$$dh_t = du(t, \varphi_t, \omega) + dz_t =$$

$$= (P(\varphi_t(\varphi))(u(t, \varphi_t(\varphi), \omega) + z_t) + f(\varphi_t(\varphi)))dt + g(\varphi_t(\varphi))dW(t).$$

Отсюда

$$dz_t = P(\varphi_t(\varphi))z_t dt.$$

Поэтому z_t — решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений, а значит, в силу (22) удовлетворяет оценке

$$|z_t| \leq K\exp\{-\gamma(t-\tau)\} |z_\tau|,$$

или

$$|h_t - u(t, \varphi_t(\varphi), \omega)| \le K\exp\{-\gamma(t-\tau)\}|h_\tau - u(\tau, \varphi, \omega)|,$$

из которой следует экспоненциальная устойчивость с вероятностью 1, а поскольку h_τ и $u(\tau, \varphi, \omega)$ имеют конечные вторые моменты для произвольного $\tau \in \mathbf{R}$, то и экспоненциальная устойчивость в среднем квадратическом случайного инвариантного тора.

Как следует из [3, с. 126], для существования экспоненциально устойчивого инвариантного тора системы (1) достаточно выполнения более слабого, чем (22), неравенства, а именно

$$\left\|\Phi_0^t(\varphi)\right\| \le K\exp\{-\gamma t\} \tag{25}$$

при $t \ge 0$. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2. 1. *Если выполнено неравенство* (25), *то система* (1) *имеет экспоненциально устойчивый с вероятностью* 1 *и в среднем квадратическом случайный инвариантный тор, определенный соотношением* (16).

2. *Для выполнения неравенства* (25) *достаточно выполнения для матрицы* $P(\varphi)$ *неравенства* (23).

Из этой теоремы видно, что наличие инвариантного тора связано с оценкой типа (22) или (25) матрицанта детерминированной системы (12) для произвольного $\varphi \in \mathfrak{J}_m$, что аналогично детерминированному случаю, в котором, согласно [3, с. 127 – 130], для установления данных оценок можно использовать квадратичные формы.

Теорема 3. *Для того чтобы система* (1) *имела экспоненциально устойчивый с вероятностью* 1 *и в среднем квадратическом случайный инвариантный тор, определяемый формулой* (16), *необходимо и достаточно, чтобы существовала положительно определенная, симметрическая матрица* $S(\varphi) \in C^1(\mathfrak{J}_m)$ *такая, что матрица*

$$\frac{\partial S(\varphi)}{\partial \varphi}a(\varphi) + P^T(\varphi)S(\varphi) + S(\varphi)P(\varphi)$$

отрицательно определена.

Перейдем к изучению случайных инвариантных торов нелинейных стохастических систем вида

$$d\varphi = a(\varphi)dt, \quad dh = \big(P(\varphi)h + A(\varphi, h, \varepsilon)\big)dt + Q(\varphi, h, \varepsilon)dW(t), \tag{26}$$

где ε — малый положительный параметр, причем

$$A(\varphi, 0, 0) = Q(\varphi, 0, 0) = 0. \tag{27}$$

Последнее условие гарантирует существование тривиального тора $h = 0$, $\varphi \in \mathfrak{J}_m$ системы (26) при $\varepsilon = 0$. Пусть также функции a, P, A, Q непрерывны по совокупности своих переменных при $\varphi \in \mathfrak{J}_m$, $h \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, периодические по φ_i, $i = 1, \ldots, m$, с периодом 2π, причем a липшицева по φ, а A, Q липшицевы по h с константой Липшица $L(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$. Отсюда, а также из (27) следует существование функций $\alpha(\varepsilon) \to 0$, $\beta(\varepsilon) \to 0$, $\varepsilon \to 0$ таких, что

$$|A(\varphi, h, \varepsilon)|^2 \le 2l^2|h|^2 + \alpha(\varepsilon), \quad |Q(\varphi, h, \varepsilon)|^2 \le 2l^2|h|^2 + \beta(\varepsilon). \tag{28}$$

Обозначим $2L^2(\varepsilon) = N(\varepsilon)$. Запишем для (26) систему в вариациях, что соответствует тору $h = 0$, $\varphi \in \mathfrak{J}_m$:

$$d\varphi = a(\varphi)dt, \quad dh = P(\varphi)h\,dt. \tag{29}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть для системы* (26) *выполнены приведенные выше условия.*

Тогда если система (29) *имеет функцию Грина – Самойленко* $G_0(\tau,\varphi)$, *удовлетворяющую оценке*

$$\|G_0(\tau,\varphi)\| \le K\exp\{\gamma\tau\}, \quad \tau < 0, \tag{30}$$

$K>0$, $\gamma>0$ — *постоянные, не зависящие от* τ, φ, *то существует* $0\le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$ *такое, что для любого* $\varepsilon\in[0,\varepsilon_1]$ *система уравнений* (26) *имеет случайный инвариантный тор* $h = u(\tau,\varphi,\varepsilon)$.

Доказательство. Обозначим через B банахово пространство n-мерных случайных функций $\xi(t,\varphi,\omega)$, $t\in\mathbf{R}$, $\varphi\in\mathfrak{J}_m$, $\omega\in\Omega$, измеримых по совокупности переменных, при каждом t, φ F_t-измеримых, периодических с вероятностью 1 по φ_i с периодом 2π и таких, что

$$\sup_{t\in\mathbf{R},\varphi\in\mathfrak{J}_m} \mathrm{M}|\xi(t,\varphi,\omega)|^2 < \infty,$$

с нормой

$$\|\xi\|_2 = \left(\sup_{t\in\mathbf{R},\varphi\in\mathfrak{J}_m} \mathrm{M}|\xi(t,\varphi,\omega)|^2\right)^{1/2}.$$

В пространстве B определим оператор S по формуле

$$Su = \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi)A(\varphi_t(\varphi), u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)d\tau +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau,\varphi)Q(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)dW(t+\tau). \tag{31}$$

Покажем, что $S: B\to B$. Для этого сначала докажем существование обоих интегралов. Обозначим их соответственно I_1 и I_2. Существование интеграла I_1 следует из теоремы Фубини, поскольку в силу оценок (28) и (30) имеем

$$\int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|\mathrm{M}|A(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)|d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} K\exp\{\gamma\tau\}(L(\varepsilon)\mathrm{M}|u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi))| + |A(\varphi_\tau(\varphi),0,\varepsilon)|)d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} K\exp\{\gamma\tau\}L(\varepsilon)d\tau\|u(t,\varphi)\|_2 + \int_{-\infty}^{0} K\exp\{\gamma\tau\}|A(\varphi_\tau(\varphi),0,\varepsilon)|d\tau < \infty.$$

Из (28) и (30) также получаем

$$\int_{-\infty}^{0} \|G_0(\tau,\varphi)\|^2\mathrm{M}|Q(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)|^2 d\tau \le$$

$$\le \int_{-\infty}^{0} K^2\exp\{2\gamma\tau\}\left(\beta(\varepsilon) + N(\varepsilon)\|u(t,\varphi)\|_2^2\right)d\tau \le \infty,$$

а поэтому выполняется оценка (3) леммы. Поэтому оба интеграла существуют с вероятностью 1. Далее

$$\mathrm{M}|I_1|^2 \le \mathrm{M}\left(\int_{-\infty}^{0} K\exp\{\gamma\tau\}|A(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)|d\tau\right)^2 \le$$

$$\leq K^2\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\{\gamma\tau\}d\tau\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\{\gamma\tau\}\mathrm{M}|A(\varphi_\tau(\varphi),u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)|^2d\tau\right)\leq$$

$$\leq\frac{K^2}{\gamma}\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\{\gamma\tau\}\left(N(\varepsilon)\|u(t,\varphi)\|_2^2+\alpha(\varepsilon)\right)d\tau=\frac{K^2}{\gamma^2}\left(N(\varepsilon)\|u(t,\varphi)\|_2^2+\alpha(\varepsilon)\right).$$

Из свойств стохастических интегралов имеем

$$\mathrm{M}|I_2|^2\leq\int\limits_{-\infty}^{0}K^2\exp\{2\gamma\tau\}\mathrm{M}|Q(\varphi_\tau(\varphi),u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)|^2d\tau\leq$$

$$\leq\frac{K^2}{2\gamma}\left(N(\varepsilon)\|u(t,\varphi)\|_2^2+\beta(\varepsilon)\right).$$

Нужная измеримость интегралов очевидна, поскольку функции A, Q, $G_0(\tau,\varphi)$, $\varphi_t(\varphi)$ непрерывны по совокупности переменных. Таким образом, оператор B переводит банахово пространство B в себя. Пусть u_1, u_2 — произвольные элементы из B. Имеем

$$\mathrm{M}|Su_1-Su_2|^2\leq\mathrm{M}\left(\int\limits_{-\infty}^{0}\|G_0(\tau,\varphi)\|L(\varepsilon)|u_1(t+\tau,\varphi_\tau(\varphi))-\right.$$

$$+\,u_2(t+\tau,\varphi_\tau(\varphi))|d\tau+\left|\int\limits_{-\infty}^{0}G_0(\tau,\varphi)(Q(\varphi_\tau(\varphi),u_1(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)-\right.$$

$$\left.\left.-\,Q(\varphi_\tau(\varphi),u_2(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon))\,dW(t+\tau)\right|\right)^2\leq 2\left(\int\limits_{-\infty}^{0}K^2\exp\{\gamma\tau\}L^2(\varepsilon)d\tau\times\right.$$

$$\times\int\limits_{-\infty}^{0}\exp\{\gamma\tau\}\mathrm{M}|u_1(t+\tau,\varphi_\tau(\varphi))-u_2(t+\tau,\varphi_\tau(\varphi))|^2d\tau+$$

$$\left.+\int\limits_{-\infty}^{0}K^2\exp\{2\gamma\tau\}L^2(\varepsilon)\mathrm{M}|u_1(t+\tau,\varphi_\tau(\varphi))-u_2(t+\tau,\varphi_\tau(\varphi))|^2d\tau\right)\leq$$

$$\leq\left(\frac{2K^2L^2(\varepsilon)}{\gamma^2}+\frac{K^2}{\gamma}L^2(\varepsilon)\right)\|u_1-u_2\|_2^2. \tag{32}$$

Выберем $\varepsilon_1\leq\varepsilon_0$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{2K^2}{\gamma^2}+\frac{K^2}{\gamma}\right)L^2(\varepsilon)<1.$$

Тогда из (32) следует, что оператор S сжимающий в банаховом пространстве B, а поэтому имеет там единственную неподвижную точку $u(t,\varphi)$,

$$u(t,\varphi)=\int\limits_{-\infty}^{0}G_0(\tau,\varphi)A(\varphi_\tau(\varphi),u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)d\tau+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{0}G_0(\tau,\varphi)Q(\varphi_\tau(\varphi),u(\tau+t,\varphi_\tau(\varphi)),\varepsilon)dW(t+\tau). \tag{33}$$

Покажем, что данная случайная функция $u(t,\varphi)$ является инвариантным тором системы (26). Для этого нужно установить, что $h_t = u(t, \varphi_t(\varphi))$ задает решение второго уравнения системы (26). Очевидно, что $u(t, \varphi_t(\varphi))$ F_t-измерима. Подставим в (33) вместо φ $\varphi_t(\varphi)$ и возьмем слева и справа стохастический дифференциал. Из свойств функции Грина – Самойленко, оценки (30) следует возможность дифференцирования интеграла I_1, а также возможность применения леммы к стохастическому интегралу I_2. Тогда имеем

$$du(t, \varphi_t(\varphi)) = d\left(\int_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) A(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)), u(\tau + t, \varphi_\tau(\varphi_t(\varphi))), \varepsilon)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} G_0(\tau, \varphi_t(\varphi)) Q(\varphi_\tau(\varphi_t(\varphi)), u(\tau + t, \varphi_\tau(\varphi_t(\varphi))), \varepsilon)\, dW(t + \tau) \right) =$$

$$= d\left(\int_{-\infty}^{0} G_t(\tau + t, \varphi_t(\varphi)) A(\varphi_{\tau+t}(\varphi), u(\tau + t, \varphi_{\tau+t}(\varphi)), \varepsilon)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{0} G_t(\tau + t, \varphi) Q(\varphi_{\tau+t}(\varphi), u(\tau + t, \varphi_{\tau+t}(\varphi)), \varepsilon)\, dW(t + \tau) \right) =$$

$$= d\left(\int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) A(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau, \varphi_\tau(\varphi)), \varepsilon)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) Q(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau, \varphi_\tau(\varphi)), \varepsilon)\, dW(\tau) \right) =$$

$$= \left(P(\varphi_t(\varphi)) \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) A(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau, \varphi_\tau(\varphi)), \varepsilon)\, d\tau + \right.$$

$$\left. + A(\varphi_t(\varphi), u(t, \varphi_t(\varphi)), \varepsilon) \right) dt +$$

$$+ \left(P(\varphi_t(\varphi)) \int_{-\infty}^{t} G_t(\tau, \varphi) Q(\varphi_\tau(\varphi), u(\tau, \varphi_\tau(\varphi)), \varepsilon)\, dW(\tau)\, dt + \right.$$

$$\left. + Q(\varphi_t(\varphi), u(t, \varphi_t(\varphi)), \varepsilon) \right) dW(t) = P(\varphi_t(\varphi)) u(t, \varphi_t(\varphi))\, dt +$$

$$+ A(\varphi_t(\varphi), u(t, \varphi_t(\varphi)), \varepsilon)\, dt + Q(\varphi_t(\varphi), u(t, \varphi_t(\varphi)), \varepsilon)\, dW(t).$$

Последнее соотношение и означает, что пара $(\varphi_t(\varphi), u(t, \varphi_t(\varphi)))$ является решением системы (26). А поэтому случайная функция $h = u(t, \varphi)$, являющаяся решением уравнения (33), задает тор нелинейной системы (26). Теорема доказана.

1. *Станжицький О. М.* Дослідження стійкості інваріантних множин за допомогою локальних координат // Нелінійні коливання. – 2000. – **3**, № 2. – С. 266–270.
2. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 611 с.
3. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.: Наука, 1987. – 302 с.
4. *Царьков Е. Ф.* Случайные возмущения функционально-дифференциальных уравнений. – Рига: Зинатне, 1989. – 421 с.

Получено 20.12.2001