УДК 517.5

А. Г. Бакан (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

КРИТЕРИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ И ОБЩИЙ ВИД ЛИНЕЙНОГО НЕПРЕРЫВНОГО ФУНКЦИОНАЛА НА ПРОСТРАНСТВЕ C_w^0

For arbitrary function $w : \mathbb{R} \to [0,1]$ the general form of the continuous linear functional on the space C_w^0 is established. The criterion of H. Hamburger from 1921 about polynomial denseness in $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ is extended to the space C_w^0.

Для довільної функції $w : \mathbb{R} \to [0,1]$ знайдено загальний вигляд лінійного неперервного функціонала на просторі C_w^0. Встановлений Г. Гамбургером у 1921 р. критерій щільності многочленів у просторі $L_2(\mathbb{R}, d\mu)$ поширено на простори C_w^0.

1. Предварительные сведения. Согласно определению [1, с. 120] пара $X = (\mathcal{L}(X), \|\cdot\|_X)$ называется *полунормированным* пространством, если $\mathcal{L}(X)$ является линейным пространством и $\|\cdot\|_X$ — определенная на $\mathcal{L}(X)$ *полунорма*. Будем писать X вместо $\mathcal{L}(X)$, т. е. $X = (X, \|\cdot\|_X)$. Обозначим через X^* банахово пространство [1, с. 126] всех линейных непрерывных функционалов L на полунормированном пространстве X. Норма в X^* определяется равенством

$$\|L\| := \sup\left\{ |L(x)| \;\middle|\; x \in X,\ \|x\|_X \le 1 \right\}.$$

Линейное пространство всех действительнозначных и непрерывных на $\mathbb{R}$ функций обозначим через $C(\mathbb{R})$ и пусть $C^0(\mathbb{R}) := \left(C^0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_{C(\mathbb{R})}\right)$, $\|f\|_{C(\mathbb{R})} := \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|$ — банахово пространство [1, с. 410] функций f из $C(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. Напомним [2, с. 185], что функция $f \in C(\mathbb{R})$ называется *финитной*, если она равна нулю вне некоторого компакта. Кроме того, функция

$$M_\varphi(x) := \lim_{\delta\downarrow 0} \sup_{y\in(x-\delta, x+\delta)} \varphi(y)$$

называется *верхней функцией Бэра* для функции $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ [3, с. 122].

Пусть $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ — семейство борелевских подмножеств $\mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ линейное пространство определенных на $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ зарядов [2, с. 51], т. е. счетно-аддитивных функций $\mu : \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\mu(\varnothing) = 0$. Для $1 \le p < \infty$ и меры (т. е. неотрицательного заряда) $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ будем рассматривать обычное пространство действительнозначных функций

$$L_p(\mu) := L_p(\mathbb{R}, d\mu)$$

с нормой

$$\|f\|_{L_p(\mu)}^p := \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, d\mu(x).$$

Для $A \subseteq \mathbb{R}$ через $\overline{A}$ будем обозначать замыкание A, а через $\chi_A(x)$ — индикаторную функцию множества A, равную 1, если $x \in A$, и 0 — в противном случае. Каждая мера $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ является конечной [2, с. 51, 57] и *регулярной* (см. [2, с. 184, 191], упражнение 8.16). Поэтому для нее и произвольного множества $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ существует (см. [2, с. 185], формула (8.14)) такая последовательность финитных непрерывных функций

$$\psi_n[A,\mu] : \mathbb{R} \to [0,1], \quad n \geq 1,$$

что

$$\lim_{n\to\infty} \| \chi_A - \psi_n[A,\mu] \|_{L_p(\mu)} = 0 \ \forall 1 \leq p < \infty. \tag{1}$$

Для каждого заряда $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ разложение в смысле Хана пространства $(\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}))$ относительно заряда μ (см. [2, с. 53], теорема 16.2) будем обозначать так:

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_\mu^+ \sqcup \mathbb{R}_\mu^-,$$

где $A \sqcup B$ — объединение непересекающихся множеств A и B. Для разложения заряда $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ в смысле Жордана будем использовать следующие обозначения:

$$\mu = \mu_+ - \mu_-, \quad \mu_+(A) := \mu(A \cap \mathbb{R}_\mu^+), \quad \mu_-(A) := -\mu(A \cap \mathbb{R}_\mu^-) \qquad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}),$$

и

$$\|\mu\| := |\mu|(\mathbb{R}),$$

где $|\mu| := \mu_+ + \mu_-$ (см. [2, с. 55]).

Наконец, *носителем* произвольной функции $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ будем называть множество $S_F := \{ x \in \mathbb{R} \mid F(x) \neq 0 \}$.

2. Основные результаты. Для произвольной функции $w : \mathbb{R} \to [0,1]$ рассмотрим полунормированное пространство

$$C_w^0 := \left(\left\{ f \in C(\mathbb{R}) \ \middle| \ \lim_{|x|\to\infty} w(x)f(x) = 0 \right\}, \ \|\cdot\|_w \right),$$

где $\|f\|_w := \sup_{x\in\mathbb{R}} |w(x)f(x)|$.

В 1924 г. С. Н. Бернштейн [4] сформулировал проблему о нахождении условий на вес w, при которых алгебраические многочлены плотны в пространстве C_w^0. С тех пор эта проблема и ее различные обобщения исследовались во многих работах, где была выявлена ее важность и установлена тесная связь с рядом вопросов общей теории функций (см. обзорные части статей [5–9]).

Очевидное неравенство

$$\|f\|_w \leq \|f\|_{C(\mathbb{R})} \quad \forall f \in C^0(\mathbb{R})$$

влечет включения $C^0(\mathbb{R}) \subseteq C_w^0 \subset C(\mathbb{R})$ и справедливость непрерывного вложения $C^0(\mathbb{R}) \hookrightarrow C_w^0$ [1, с. 26]. Поскольку [1, с. 410] для каждого функционала $L \in C^0(\mathbb{R})^*$ существует такой заряд $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, что

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu(x) \quad \forall f \in C^0(\mathbb{R}),$$

то указанное вложение означает, что для каждого элемента L банахова пространства $\left(C_w^0\right)^*$ существует заряд $\mu_L \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, удовлетворяющий соотношению

$$L(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)\, d\mu_L(x) \quad \forall f \in C^0(\mathbb{R})\,. \tag{2}$$

В настоящей статье мы устанавливаем общий вид линейного функционала из банахова пространства $\left(C_w^0\right)^*$ при произвольном весе $w : \mathbb{R} \to [0,1]$, т. е. в силу (2) находим полное описание подпространства

$$\{\mu_L\}_{L \in (C_w^0)^*} \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}).$$

Следует отметить, что представление (2) для произвольного функционала $L \in \left(C_w^0\right)^*$ использовалось в работе [10]. Кроме того, в статье [5] указывалось, что общий вид линейного функционала из $\left(C_w^0\right)^*$ является простым следствием известных теорем функционального анализа в случае, когда либо w является строго положительной и непрерывной функцией на вещественной оси [5, с. 119, 124], либо S_w представляет собой дискретное подмножество $\mathbb{R}$ [5, с. 132]. В обоих случаях функционал L_μ, определенный для всех $f \in C_w^0$ по формуле

$$L_\mu(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} w(x)\, f(x)\, d\mu(x)\,,$$

пробегает все пространство $\left(C_w^0\right)^*$, когда заряд μ пробегает все множество $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

С. Мергелян в [5, с. 121] заметил, что весовые свойства произвольной функции $w : \mathbb{R} \to [0,1]$ не изменятся, если ее заменить на верхнюю функцию Бэра $M_w(x)$. Выясним, что значит это замечание в терминах рассматриваемых полунормированных пространств.

Известно, что верхняя функция Бэра $M_w(x)$ независимо от свойств w всегда является полунепрерывной сверху (пн. св.) функцией и, как легко видеть, для нее справедливы следующие соотношения:

$$0 \le w(x) \le M_w(x) \le 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}\,, \qquad S_w \subseteq S_{M_w} \subseteq \overline{S}_w = \overline{S}_{M_w}\,.$$

Легко установить также, что для произвольных чисел $-\infty < A < B < +\infty$ и любой функции $f \in C(\mathbb{R})$

$$\sup_{x \in (A,B)} |w(x) f(x)| = \sup_{x \in (A,B)} |M_w(x) f(x)|\,.$$

Поэтому полунормированные пространства C_w^0 и $C_{M_w}^0$ тождественно совпадают. Следовательно, без ограничения общности можно рассматривать только пн. св. весовые функции w, т. е. те, для которых имеет место соотношение $w(x) = M_w(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}$. Это обстоятельство объясняет, отчасти, формулировку следующей теоремы, которая дает полное описание линейных функционалов из $\left(C_w^0\right)^*$.

Теорема 1. *Пусть* $w : \mathbb{R} \to [0,1]$, M_w *— верхняя функция Бэра для функции* w *и* $S_{M_w} := \{\, x \in \mathbb{R} \mid M_w(x) > 0 \,\}$.

1. *Если L является линейным непрерывным функционалом на полунормированном пространстве C_w^0, то существует такой заряд $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, что*

$$|\mu|(\mathbb{R} \setminus S_{M_w}) = 0,$$

$$L(f) = \int_{\mathbb{R}} M_w(x) f(x)\, d\mu(x) \quad \forall f \in C_w^0 \tag{3}$$

и

$$\| L \| = |\mu|(S_{M_w}).$$

2. *Для произвольного заряда $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ определенный формулой* (3) *функционал L является линейным непрерывным функционалом на полунормированном пространстве C_w^0 и*

$$\| L \| = |\mu|(S_{M_w}).$$

Обозначим через $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ множество пн. св. функций $w : \mathbb{R} \to [0,1]$, удовлетворяющих $\|x^n\|_w < \infty$ для всех $n \geq 0$. Из изложенного выше ясно, что в проблеме С. Н. Бернштейна без ограничения общности можно предполагать, что весовая функция w принадлежит классу $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. В настоящее время известно несколько решений этой проблемы: С. Н. Мергеляна [5], Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна [11], Луи де Бранжа [12]. Критерий С. Н. Мергеляна выражается через так называемую мажоранту Холла – Мергеляна:

$$M(w,z) := \sup\left\{ |p(z)| \;\middle|\; \|p\|_w \leq 1,\ p \in \mathcal{P}[\mathbb{C}] \right\}, \tag{4}$$

где $\mathcal{P}[\mathbb{C}]$ ($\mathcal{P}[\mathbb{R}]$) обозначает множество всех алгебраических многочленов с комплексными (действительными) коэффициентами. Т. Холл [13] ввел функцию (4) для пространства C_w^0 в случае, когда S_w является дискретным множеством. В статье [5] С. Н. Мергелян рассматривал функцию $M(w,z)$ при произвольном весе $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ и доказал утверждение, которое после уточнений, сделанных Б. Я. Левиным в [14, с. 106] (теорема 1.1), может быть сформулировано следующим образом.

Теорема А. *Пусть $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. Если $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ плотно в C_w^0, то*

$$M\left(\frac{w}{1+|x|}, z\right) = +\infty$$

для любого $z \in \mathbb{C} \setminus S_w$. Если существует такая точка $z \in \mathbb{C} \setminus S_w$, что

$$M\left(\frac{w}{1+|x|}, z\right) = +\infty,$$

то $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ плотно в C_w^0.

Б. Я. Левин [14] и К. Берг [7] распространили эту теорему на пространства

$$L_p(\mathbb{R}, d\mu), \quad 1 \leq p < \infty,$$

для борелевских мер μ, которые имеют все конечные моменты и носители которых неограничены. Здесь следует отметить, что в 1923 г. М. Рисс [15] доказал, что полиномиальная плотность в пространстве $L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)d\mu)$ эквивалентна однозначной определенности меры μ своими моментами на вещественной оси (такая мера называется определенной). Поэтому любой критерий определенности меры μ является критерием полиномиальной плотности в пространстве

$$L_2(\mathbb{R}, (1+x^2)d\mu).$$

Работы Б. Я. Левина [14] и К. Берга [7] показали, что теорема A является аналогом для пространств C_w^0 известного критерия определенности меры на вещественной оси, найденного Г. Гамбургером в 1921 г. (см. [16], [17, с. 50], теорема 2.9). Использовав теорему 1 и метод доказательства леммы 3.7 в [7, с. 21], докажем для пространств C_w^0 аналог другого критерия Г. Гамбургера определенности меры на вещественной оси, данного им в [16] (см. также [17, с. 69], теорема 2.18).

Теорема 2. *Пусть $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. Алгебраические многочлены плотны в C_w^0 тогда и только тогда, когда выполнено хотя бы одно из следующих равенств:*

$$M\left(\frac{w}{1+|x|}, 0\right) = +\infty, \quad M\left(\frac{|x|}{1+|x|}\, w, 0\right) = +\infty.$$

3. Вспомогательные утверждения. Для доказательства теоремы 1 нам необходим аналог для полунормированных пространств известной леммы М. Г. Крейна о нормальных конусах (см. [18, с. 275; 19]) в нормированных пространствах.

Напомним, что выпуклое подмножество K линейного пространства X называется *конусом*, если

$$\lambda K \subseteq K \quad \forall \lambda \geq 0.$$

По аналогии с нормированными пространствами конус K в полунормированном пространстве $X = (X, p)$ назовем *нормальным*, если

$$p(x) \leq p(x+y) \quad \forall x, y \in K.$$

Лемма 1. *Пусть (X, p) является полунормированным пространством и $K \subset X$ — нормальный конус. Если X^* является банаховым пространством, сопряженным с X, то для конуса*

$$K^* := \left\{x^* \in X^* \;\middle|\; x^*(x) \geq 0 \quad \forall x \in K\right\}$$

выполняется равенство

$$K^* - K^* = X^*.$$

Доказательство. Легко видеть, что замыкание $\overline{K}$ конуса K в пространстве X будет также нормальным конусом и $(\overline{K})^* = K^*$. Поэтому утверждение леммы достаточно доказать для случая, когда конус K замкнут в пространстве X.

Полунормированное пространство X не является хаусдорфовым [18, с. 15] и замыкание в X нулевого элемента $\{0\}$ совпадает, очевидно, с замкнутым подпространством следующего вида:

$$N := \left\{x \in X \;\middle|\; p(x) = 0\right\}.$$

Следуя известной схеме рассмотрения нехаусдорфовых топологических векторных пространств (см. [18, с. 49], упражнение 2а), рассмотрим произвольное алгебраическое дополнительное к N подпространство $Y \subset X$. Тогда произвольный элемент $x \in X$ будет иметь единственное представление вида $x = n + y$, $n \in N$, $y \in Y$. Обозначим $P_Y x := y$.

Используя неравенство треугольника для полунормы, легко получаем

$$p(x+n) = p(x) \quad \forall n \in N \quad \forall x \in X\,. \tag{5}$$

Замкнутость конуса K влечет $K + N = K$ и поэтому справедливы следующие соотношения:

$$K = N + K \cap Y\,, \quad P_Y(K) = K \cap Y\,. \tag{6}$$

Поскольку $K \cap Y \subset K$, то конус $K \cap Y$ будет нормальным в нормированном пространстве (Y, p). Это дает возможность применить упомянутую выше лемму М. Г. Крейна. В результате получаем равенство

$$Y^* = (Y \cap K)^* - (Y \cap K)^*, \tag{7}$$

где

$$(Y \cap K)^* := \left\{ y^* \in Y^* \;\middle|\; y^*(y) \geq 0 \quad \forall y \in Y \cap K \right\}.$$

Рассмотрим теперь произвольный функционал $L \in X^*$. Неравенство

$$\|L\|_{X^*} := \sup \left\{ |L(x)| \;\middle|\; x \in X,\, p(x) \leq 1 \right\} < \infty \tag{8}$$

означает, что $L(n) = 0 \quad \forall n \in N$, и поэтому определенный формулой $l(y) := L(y)$ $\forall y \in Y$ функционал l является элементом пространства Y^*. В силу (7)

$$l = l_1 - l_2\,, \quad l_i \in Y^*\,, \quad l_i(Y \cap K) \geq 0\,, \quad i \in \{1, 2\}\,.$$

Продолжим каждый функционал l_i на все пространство X по формуле

$$L_i(x) := l_i(P_Y x)\,.$$

Определение (см. (8)) нормы функционала из X^* и свойство (5) позволяют установить, что $L_i \in X^*$. Кроме того,

$$0 \leq L_i(Y \cap K) = L_i(N + Y \cap K) \overset{(6)}{=} L_i(K)\,,$$

т. е. $L_i \in K^*$. Поэтому $L = L_1 - L_2$, $L_1, L_2 \in K^*$, что и требовалось доказать.

В следующей лемме устанавливается важное свойство мажорант Холла–Мергеляна.

Лемма 2. *Пусть $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$. Для произвольного $a \in \mathbb{R}$ функция $M(w, a+iy)$ переменной $y \in \mathbb{R}$ является четной на вещественной оси и неубывающей на $[0, +\infty)$. В частности,*

$$M(w, x) \leq M(w, x+iy) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}\,. \tag{9}$$

Здесь предполагается, что $1/0 := +\infty$ и $+\infty \leq +\infty$.

Доказательство. Произвольное изменение нулей некоторого полинома $P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]$ на комплексно-сопряженные порождает множество многочленов $\pi(P)$, которое содержит только один многочлен $P^* \in \pi(P)$, все нули которого лежат в нижней полуплоскости.

Очевидно, что

$$|Q(x)| = |P(x)| \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall Q \in \pi(P)\,,$$

и поэтому

$$\|Q\|_w = \|P\|_w \quad \forall Q \in \pi(P)\,.$$

Кроме того, для произвольного $a \in \mathbb{R}$ и $y \geq 0$

$$|P^*(a+iy)| \geq |Q(a+iy)| \quad \forall Q \in \pi(P)\,,$$

и $|P^*(a+iy)|$ является неубывающей функцией переменной $y \geq 0$. Поэтому для произвольных $a \in \mathbb{R}$ и $y \geq 0$

$$M(w, a+iy) = \sup\left\{|P^*(a+iy)| \;\middle|\; \|P\|_w \leq 1,\; P \in \mathcal{P}[\mathbb{C}]\right\}.$$

Это равенство доказывает, что $M(w, a+iy)$ является неубывающей функцией переменной $y \geq 0$. Наконец, очевидное соотношение

$$M(w,z) = M(w,\bar{z}) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

завершает доказательство леммы 2.

При доказательстве теоремы 2 будет использована лемма 2 вместе с неравенством

$$M(w,z) \;\geq\; |z|\; M\left(|x|w, z\right) \quad \forall z \in \mathbb{C}\,, \tag{10}$$

которое легко следует из сужения полиномиального множества в (4) до всех полиномов, равных нулю в точке нуль.

4. Доказательство теоремы 1. Как было упомянуто выше, теорему достаточно доказать для пн. св. функции w.

4.1. Рассмотрим произвольный функционал $L \in (C_w^0)^*$ и пусть K — конус всех неотрицательных на вещественной оси функций из пространства C_w^0. Легко проверить, что конус K является нормальным. Применяя лемму 1, находим такие функционалы $L_+, L_- \in (C_w^0)^*$, что

$$L = L_+ - L_-\;,\;\; L_+(K) \geq 0,\;\; L_-(K) \geq 0\,. \tag{11}$$

Формула (2) позволяет найти заряды $\mu_L, \mu_L^+, \mu_L^- \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, соответствующие функционалам L, L_+, L_-.

Пусть $\sigma \in \{+,-\}$ и $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$. Построенные в (1) функции $\psi_n[A, |\mu_L^\sigma|\,]$, $n \geq 1$, принадлежат $C^0(\mathbb{R})$ и поэтому

$$L_\sigma(\psi_n[A, |\mu_L^\sigma|\,]\,) = \int\limits_{\mathbb{R}} \psi_n[A, |\mu_L^\sigma|\,](x)\, d\mu_L^\sigma(x) \geq 0 \quad \forall n \geq 1.$$

Переходя в этих неравенствах к пределу при $n \to \infty$, в силу (1) получаем $\mu_L^\sigma(A) \geq 0$. Произвольность $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$ доказывает, что заряды μ_L^+ и μ_L^- являются мерами. Кроме того, применяя равенства (2) и (11) к функциям $\psi_n[A, \mu] \in C^0(\mathbb{R})$ из (1) при $\mu = |\mu_L| + \mu_L^+ + \mu_L^-$ и $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})$, после предельного перехода при $n \to \infty$ имеем

$$\mu_L(A) = \mu_L^+(A) - \mu_L^-(A) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}).$$

4.2. Для произвольного $\varepsilon \in (0, 1)$ рассмотрим полунепрерывную снизу (пн. сн.) функцию $1/(\varepsilon + w(x))$. Применяя известную теорему из [20, с. 22] (теорема 1.4) к пн. св. функции $-1/(\varepsilon + w(x))$, находим такую убывающую последовательность непрерывных на всей оси функций $f_n^\varepsilon(x), n \geq 1$, что для каждого вещественного x

$$f_n^\varepsilon(x) \to -1/(\varepsilon + w(x)) \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда функции $\varphi_n^\varepsilon(x) := \max\{1/2, -f_n^\varepsilon(x)\}$, $n \geq 1$, образуют неубывающую последовательность положительных и непрерывных на всей оси функций, имеющую своим пределом функцию $1/(\varepsilon + w(x))$. Положим

$$w_n^\varepsilon(x) := e^{-x^2/n}\, \varphi_n^\varepsilon(x), \ n \geq 1, \ x \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Тогда

$$0 < w_n^\varepsilon(x) \leq w_{n+1}^\varepsilon(x) < \frac{1}{\varepsilon + w(x)} \quad \forall n \geq 1, \qquad \lim_{n\to\infty} w_n^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon + w(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{13}$$

Поскольку $\|\varphi_n^\varepsilon\|_{C(\mathbb{R})} \leq 1/\varepsilon$, то для каждого $n \geq 1$

$$\lim_{|x|\to\infty} w_n^\varepsilon(x) = 0,$$

т. е. $w_n^\varepsilon \in C^0(\mathbb{R})$, и в силу (13)

$$\|w_n^\varepsilon\|_w \leq 1. \tag{14}$$

Так как для произвольного $\sigma \in \{+, -\}$ и $f \in C^0(\mathbb{R})$

$$L_\sigma(f) = \int_{\mathbb{R}} f(x)d\mu_L^\sigma(x) \quad \text{и} \quad \|L_\sigma\| := \sup\left\{|L_\sigma(f)| \;\middle|\; f \in C_w^0, \|f\|_w \leq 1\right\} < \infty, \tag{15}$$

то ввиду (13), (14)

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}} w_n^\varepsilon(x)d\mu_L^\sigma(x) \leq \|L_\sigma\|\,\|w_n^\varepsilon\|_w \leq \|L_\sigma\| \quad \forall n \geq 1. \tag{16}$$

Свойства (13) позволяют использовать теорему Беппо – Леви для перехода к пределу при $n \to \infty$ в неравенствах (16):

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon + w(x)} d\mu_L^\sigma(x) \leq \|L_\sigma\| \quad \forall \varepsilon \in (0, 1). \tag{17}$$

Повторно применяя теорему Беппо–Леви для левой части неравенств (17) при $\varepsilon \downarrow 0$, получаем

$$1/w \in L_1(\mu_L^\sigma) \quad \text{и} \quad \|1/w\|_{L_1(\mu_L^\sigma)} \leq \|L_\sigma\| \,.$$

Кроме того, из борелевости множества S_w и положительности подынтегральной функции в левой части (17) следует

$$\mu_L^\sigma(\mathbb{R} \setminus S_w) = 0\,.$$

Итак,

$$1/w \in L_1(\mu_L^\sigma)\,, \quad \|1/w\|_{L_1(\mu_L^\sigma)} \leq \|L_\sigma\|\,, \quad \mu_L^\sigma(\mathbb{R} \setminus S_w) = 0 \quad \forall \sigma \in \{+,-\}\,. \tag{18}$$

4.3. Свойства (18) позволяют определить новые меры

$$\rho_L^\sigma(A) := \int\limits_A \frac{1}{w(x)}\, d\mu_L^\sigma(x) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}) \tag{19}$$

со следующими свойствами:

$$\rho_L^\sigma \in \mathcal{M}(\mathbb{R})\,, \quad \rho_L^\sigma(\mathbb{R} \setminus S_w) = 0 \quad \text{и} \quad \|\rho_L^\sigma\| \leq \|L_\sigma\| \,. \tag{20}$$

Кроме того, из условия на область значений w следует

$$\mu_L^\sigma(A) \leq \rho_L^\sigma(A) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,,$$

что согласно теореме Радона–Никодима означает существование такой функции $\alpha_\sigma \in L_1(\rho_L^\sigma)$, что

$$\mu_L^\sigma(A) = \int\limits_A \alpha_\sigma(x)\, d\rho_L^\sigma(x) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,, \tag{21}$$

причем $0 \leq \alpha_\sigma(x) \leq 1$ почти всюду по мере ρ_L^σ. Равенства (19) и (21) показывают, что меры μ_L^σ и ρ_L^σ абсолютно непрерывны одна относительно другой. Применяя к (21) теорему о замене переменных в интеграле Лебега (см. [2, с. 141], теорема 3.2) и используя равенство (19), получаем

$$\mu_L^\sigma(A) = \int\limits_A \frac{\alpha_\sigma(x)}{w(x)}\, d\mu_L^\sigma(x) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,.$$

Поэтому $\alpha_\sigma(x) = w(x)$ почти всюду по мере μ_L^σ. Но в силу отмеченной абсолютной непрерывности ρ_L^σ относительно μ_L^σ данное равенство справедливо почти всюду и по мере ρ_L^σ. Это дает возможность переписать равенство (21) в следующем виде:

$$\mu_L^\sigma(A) = \int\limits_A w(x)\, d\rho_L^\sigma(x) \quad \forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\,.$$

Поэтому при замене переменных в (15) для произвольной функции $f \in C^0(\mathbb{R})$ получаем равенство

$$L_\sigma(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} w(x) f(x)\, d\rho_L^\sigma(x)\,. \tag{22}$$

Поскольку для произвольной $f \in C_w^0$ функции

$$f_n(x) := f(x)\, \chi_{[-n,n]}(x) \min\{1, n - |x|\} \in C^0(\mathbb{R})$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_w = 0\,,$$

то $C^0(\mathbb{R})$ является плотным подмножеством C_w^0. Поэтому в (22) мы имеем равенство двух линейных непрерывных на C_w^0 функционалов на плотном в C_w^0 подмножестве $C^0(\mathbb{R})$. Значит, равенство (22) верно для любой функции $f \in C_w^0$. Используя (11), имеем

$$L(f) = \int\limits_{\mathbb{R}} w(x) f(x)\, d\mu(x) \quad \forall f \in C_w^0\,, \tag{23}$$

где заряд $\mu := \rho_L^+ - \rho_L^- \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ ввиду (20) удовлетворяет $\mu(\mathbb{R} \setminus S_w) = 0$. Таким образом, мы доказали возможность представления (3) для любого линейного непрерывного функционала на полунормированном пространстве C_w^0.

4.4. Рассмотрим теперь произвольный заряд $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ и линейный функционал L, определяемый формулой (23). Поскольку непрерывность L на пространстве C_w^0 и неравенство $\|L\| \le |\mu|(S_w)$ очевидны, то для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что $\|L\| \ge |\mu|(S_w)$.

Рассмотрим разложение действительной оси в смысле Хана относительно заряда μ: $\mathbb{R} = \mathbb{R}_\mu^+ \sqcup \mathbb{R}_\mu^-$ и выберем произвольное $R > 0$. Переобозначим введенные в (1) функции следующим образом:

$$F_{n,R}^+ := \psi_n[\,[-R,R] \cap \mathbb{R}_\mu^+,\ |\,\mu\,|\,]\,, \quad F_{n,R}^- := \psi_n[\,[-R,R] \cap \mathbb{R}_\mu^-,\ |\,\mu\,|\,]\,,\ n \ge 1\,.$$

Так как для произвольных $n, m \ge 1$, $R > 0$, $\varepsilon \in (0,1)$ функции

$$w_m^\varepsilon \cdot (F_{n,R}^+ - F_{n,R}^-)$$

(см. (12)) являются финитными и в силу (14)

$$\left\| w_m^\varepsilon \cdot (F_{n,R}^+ - F_{n,R}^-) \right\|_w \le 1\,,$$

то согласно определению нормы (15)

$$\|L\| \ge \int\limits_{\mathbb{R}} w(x) w_m^\varepsilon(x) (F_{n,R}^+(x) - F_{n,R}^-(x))\, d\mu(x) \ \ \forall n, m \ge 1,\ R > 0,\ \varepsilon \in (0,1)\,. \tag{24}$$

Ввиду (14) и (1) в правой части неравенства (24) можно перейти к пределу при $n \to \infty$. В результате получим

$$\|L\| \ge \int\limits_{-R}^{R} w(x) w_m^\varepsilon(x)\, d|\,\mu\,|(x) \ \ \forall m \ge 1,\ R > 0,\ \varepsilon \in (0,1)\,. \tag{25}$$

Свойства (13) и теорема Беппо – Леви дают возможность в правой части неравенства (25) перейти к пределу при $m \to \infty$:

$$\|L\| \geq \int_{-R}^{R} \frac{w(x)}{\varepsilon + w(x)}\, d|\mu|(x) = \int_{S_w \cap [-R, R]} \frac{w(x)}{\varepsilon + w(x)}\, d|\mu|(x) \quad \forall R > 0,\ \varepsilon \in (0,1).$$

Переходя здесь к пределу сначала по $\varepsilon \downarrow 0$, а затем при $R \to \infty$, получаем $\|L\| \geq$ $\geq |\mu|(S_w)$. Теорема 1 доказана.

5. Доказательство теоремы 2. Будем доказывать следующее эквивалентное теореме 2 утверждение: $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ не является плотным в C_w^0 тогда и только тогда, когда

$$M(w_1, 0) < +\infty \quad \text{и} \quad M(w_2, 0) < +\infty, \tag{26}$$

где для действительных x

$$w_1(x) := \frac{w(x)}{1 + |x|}, \quad w_2(x) := \frac{|x|}{1 + |x|}\, w(x).$$

5.1. Достаточность. Пусть справедливы неравенства (26). Нетрудно видеть, что при произвольных $z \in \mathbb{C}$ и $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ для величины

$$M_r(w, z) := \sup\left\{ |p(z)| \;\middle|\; \|p\|_w \leq 1,\ p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}] \right\} \tag{27}$$

выполняются неравенства

$$M_r(w, z) \leq M(w, z) \leq 2M_r(w, z).$$

Поэтому

$$M_r(w_1, 0) < +\infty \quad \text{и} \quad M_r(w_2, 0) < +\infty. \tag{28}$$

Тогда из правого неравенства (28) вытекает, что $S_w \setminus \{0\} \neq \varnothing$. Кроме того, ввиду (27)

$$|p(0)| \leq M_r(w_1, 0)\, \|p\|_{w_1}, \quad |p(0)| \leq M_r(w_2, 0)\, \|p\|_{w_2} \qquad \forall p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]. \tag{29}$$

По теореме Хана – Банаха (см. [1, с. 179], теорема 2.2.1) неравенства (29) означают, что для произвольного $i \in \{1, 2\}$ определенный на векторном подпространстве $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ полунормированного пространства $C_{w_i}^0$ линейный функционал $p(0)$ можно продолжить до линейного непрерывного функционала на $C_{w_i}^0$. Поэтому в силу теоремы 1 существуют такие заряды $\omega_1, \omega_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, что

$$|\omega_1|(S_w) > 0, \quad |\omega_1|(\mathbb{R} \setminus S_w) = 0, \quad |\omega_2|(S_w \setminus \{0\}) > 0, \quad |\omega_2|(\mathbb{R} \setminus (\, S_w \setminus \{0\})\,) = 0$$

и

$$p(0) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, w_1(t)\, d\omega_1(t) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, w_2(t)\, d\omega_2(t) \quad \forall p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]. \tag{30}$$

Определим заряды

$$d\theta_1(x) := \frac{1}{1 + |x|}\, d\omega_1(x) \quad \text{и} \quad d\theta_2(x) := \frac{|x|}{1 + |x|}\, d\omega_2(x).$$

Очевидно, что $\theta_1, \theta_2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ и неравенства (30) примут вид

$$p(0) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, w(t)\, d\theta_1(t) = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, w(t)\, d\theta_2(t) \quad \forall p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}].$$

Применяя левое равенство (31) к многочленам, которые в нуле равны н
получаем

$$0 = \int_{\mathbb{R}} p(t)\, w(t)\, d\widetilde{\theta}_1(t) \quad \forall p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}], \quad \text{где} \quad d\widetilde{\theta}_1(x) := x\, d\theta_1(x) = \frac{x}{1+|x|} d\omega_1(x$$

Если $|\omega_1|(\, S_w \setminus \{0\}\,) > 0$, то формула (3) при $\mu = \widetilde{\theta}_1$ определяет функци
из $(C_w^0)^* \setminus \{0\}$ и поэтому равенство (32) означает, что $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ не является плот
в C_w^0.

Если же $|\omega_1|(S_w \setminus \{0\}) = 0$, то по теореме 1

$$0 \in S_w, \quad |\omega_1|(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 0$$

и в силу (30)

$$\omega_1(\{0\}) = 1/w_1(0).$$

Тогда, очевидно,

$$(\theta_1 - \theta_2)(\{0\}) = 1/w_1(0).$$

Поэтому определяемый формулой (3) при $\mu = \theta_1 - \theta_2$ функционал принадле
$(C_w^0)^* \setminus \{0\}$, откуда с учетом вытекающих из (31) равенств

$$0 = \int_{\mathbb{R}} w(t)\, p(t)\, d(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \quad \forall p \in \mathcal{P}[\mathbb{R}]$$

следует неплотность $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ в C_w^0.

5.2. *Необходимость*. Пусть $\mathcal{P}[\mathbb{R}]$ неплотно в пространстве C_w^0. Тогда по
реме А $M(w_1, i) < \infty$. Применяя соотношения (9) и (10), получаем

$$M(w_1, 0) \le M(w_1, i) < \infty,$$

$$M(w_2, 0) \le M(w_2, i) \le M(w_1, i) < \infty.$$

Эти неравенства совпадают с (26), что и завершает доказательство теоремы.

1. *Эдвардс Р.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1969. — 1071 с.
2. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. — Киев: Выща
1990. — 600 с.
3. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974. — 480 с.
4. *Bernstein S.* Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel at l'u
ses applications // Bull. Math. France. — 1924. — **52**. — P. 399–410.
5. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. — 1956. — 1
P. 107–152.
6. *Koosis P.* The logarithmic integral I. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.
7. *Berg Ch.* Moment problems and polynomial approximation // Ann. Fac. Sci. Toulouse. Sti
Special Issue. —1996. — P. 9–32.

8. *Borichev A., Sodin M.* The Hamburger moment problem and weighted polynomial approximation on discrete subsets of the real line // J. Anal. Math. – 1998. – **71**. – P. 219 – 264.
9. *Bakan A. G.* Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem // Approximation, Optimization and Math. Economics / Ed. M. Lassonde. – Heidelberg; New York: Physica-Verlag, 2001. – P. 37 – 46.
10. *Sodin M., Yuditskii P.* Another approach to de Branges' theorem on wighted polynomial approximation // Proc. Ashkelon Workshop on Complex Function Theory: Israel Math. Conf. (May 1996). – Providence: Amer. Math. Soc., 1997. – **11**. – P. 221 – 227.
11. *Ахиезер Н. И.* О взвешенном приближении непрерывных функций на всей числоваой оси // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 4. – С. 107 – 152.
12. *Branges L.* The Bernstein problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – **10**. – P. 825 – 832.
13. *Holl T.* Sur l'approximation polynomiale des fonctions contenues d'une variable // Proc. 9th Congr. – Math. Scand, 1939.
14. *Левин Б. Я.* Полнота систем функций, квазианалитичность и субгармонические мажоранты // Зап. научн. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1989. – **170**. – P. 102 – 156.
15. *Riesz M.* Sur le probleme des moments et le theoreme de Parseval correspondant // Acta Litt. Acad. Sci Szeged. – 1923. – **1**. – P. 209 – 225.
16. *Hamburger H.* Uber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems // Math. Ann. – 1920. – **81**. – S. 235 – 319; 1921. – **82**. – S. 120 – 164; 168 – 187.
17. *Shohat J., Tamarkin J.* The problem of moments. – Providence: Amer. Math. Soc., 1950. – 144 p.
18. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1971. – 359 с.
19. *Крейн М. Г.* Основные свойства конических множеств в пространствах Банаха // Докл. АН СССР. – 1940. – **28**. –С. 13 – 17.
20. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.

Получено 11.03.2002