УДК 517.518.4

П. В. Задерей (Киев. нац. ун-т технологий и дизайна),
Б. А. Смаль (Волын. ун-т)

О СХОДИМОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ L_1 РЯДОВ ФУРЬЕ

We obtain necessary and sufficient conditions of the mean convergence of trigonometric series whose coefficients satisfy the Boas – Telyakovskii conditions.

Одержано необхідні та достатні умови збіжності в середньому тригонометричних рядів, коефіцієнти яких задовольняють умови Боаса – Теляковського.

1. Обозначим через L_1 пространство 2π-периодических интегрируемых функций $f(x)$ с нормой

$$\|f\|_1 = \int_0^{2\pi} |f(x)|dx < \infty.$$

Пусть $f \in L_1$,

$$s[f] = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(f;x) \tag{1}$$

— ее ряд Фурье и $S_n(f;x)$ — частная сумма ряда (1).

Ряд (1) сходится в L_1 (сходится в среднем), если

$$\|f(x) - S_n(f;x)\|_1 = o(1) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{2}$$

Поскольку соотношение (2) выполняется не для всех функций $f(\cdot) \in L_1$ (см. [1], гл. VIII, § 22), то возникает задача об установлении условий на коэффициенты ряда (1), при выполнении которых этот ряд будет сходиться в среднем.

В настоящей работе устанавливаются условия сходимости в L_1 рядов

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \tag{3}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \tag{4}$$

являющихся рядами Фурье функций из L_1. Обозначим эти функции соответственно через $c(x)$ и $s(x)$.

Для дальнейшего изложения потребуются следующие определения и обозначения.

Будем называть последовательность $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ нуль-последовательностью, если

$$\lim_{k \to \infty} a_k = 0, \tag{5}$$

выпуклой последовательностью, если

$$\Delta^2 a_k = \Delta(\Delta a_k) \ge 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}^+ = \{k = 0, 1, 2, \dots\}, \qquad \Delta a_k = a_k - a_{k+1}, \tag{6}$$

квазивыпуклой последовательностью, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\left|\Delta^2 a_k\right| < \infty, \tag{7}$$

и последовательностью ограниченной вариации, если

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\Delta a_k\right| < \infty. \tag{8}$$

Обозначим через BV, Y, K и C_0 соответственно множества последовательностей ограниченной вариации, выпуклых, квазивыпуклых и нуль-последовательностей.

Имеют место включения $Y \cap C_0 \subset K \cap C_0$.

В. Юнг [2] (см. также [3], § 5.12) доказал, что если $\{a_k\} \in Y \cap C_0$, то ряд (3) сходится к некоторой интегрируемой неотрицательной функции $c(x)$ ($c(\cdot) \in L_1$) всюду, за исключением, быть может, точки $x = 0$, и является рядом Фурье этой функции. Он же установил, что если для нуль-последовательности $\{a_k\}$ выполняются условия $\Delta a_k \geq 0 \quad \forall k \in Z^+$ (т. е. она монотонно убывающая), то ряд (4) является рядом Фурье этой функции тогда и только тогда, когда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty. \tag{9}$$

А. Н. Колмогоров [4] показал, что для $\{a_k\} \in K \cap C_0$ ряд (3) является рядом Фурье некоторой функции $c(\cdot) \in L_1$ и этот ряд сходится в L_1 тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n \to \infty} a_n \ln n = 0. \tag{10}$$

Хилле и Тамаркин [5] доказали, что ряд (4) сходится в среднем, если $\Delta a_k \geq 0$, $\{a_k\} \in C_0$ и выполняется условие (9).

С. А. Теляковский [6] установил, что если $\{a_k\} \in K \cap C_0$, то ряд (4) является рядом Фурье тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_k|}{k} < \infty, \tag{11}$$

а также показал [7], что при $\{a_k\} \in K \cap C_0$ условия (10) и (11) необходимы и достаточны для сходимости ряда (4) в метрике пространства L_1.

Приведенные результаты В. Юнга, А. Н. Колмогорова, Хилле и Тамаркина, С. А. Теляковского распространялись многими авторами на более широкие, чем $K \cap C_0$, множества последовательностей $\{a_k\}$, но такие, что ряды (3) и (4) при этом оставались рядами Фурье функций из L_1.

Так, С. А. Теляковский [8], используя результаты Сидона [9], расширил множество K до множества $S-T$, которое определяется следующим образом: $\{a_k\} \in S-T$, если существует последовательность $\{A_k\}$ такая, что $A_k \downarrow 0$, $\sum_{k=0}^{\infty} A_k < \infty$ и

$$\left|\Delta a_k\right| < A_k \quad \forall k \in Z^+. \tag{12}$$

Множество $S-T$ было расширено Г. А. Фоминым [10] до множества F_p последовательностей $\{a_k\}$, для которых при некотором p, $1 \leq p \leq 2$, выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{k}\sum_{l=k}^{\infty}|\Delta a_l|^p\right)^{1/p} < \infty. \tag{13}$$

Он доказал [10], что если $\{a_k\} \in F_p \cap C_0$, то ряд (3) является рядом Фурье некоторой функции $c(\cdot) \in L_1$ и этот ряд сходится в метрике пространства L_1 тогда и только тогда, когда выполняется условие (10). Ряд (4) будет рядом Фурье тогда, когда $\{a_k\} \in F_p \cap C_0$ и имеет место соотношение (11), при этих условиях ряд (4) сходится в среднем тогда и только тогда, когда выполняется условие (10).

Распространение результатов С. А. Теляковского [8] и Г. А. Фомина [10] на более широкие, чем $S-T$ и F_p, множества тригонометрических рядов проводились в ряде работ (в частности, в [11 – 14]). Обзор работ, посвященных сходимости в среднем рядов Фурье, имеется в [14, 15].

Во всех упомянутых работах необходимым и достаточным условием сходимости в метрике пространства L_1 рядов (3) и (4) при условии, что эти ряды являются рядами Фурье суммируемых функций, есть условие (10).

В 1964 г. С. А. Теляковский [16] для нуль-последовательностей $\{a_k\}$, удовлетворяющих условию (8) и

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left|\sum_{l=1}^{[k/2]}\frac{1}{l}(\Delta a_{k-l}-\Delta a_{k+l})\right| < \infty, \tag{14}$$

установил, что ряд (3) является рядом Фурье своей суммы, а ряд (4) будет рядом Фурье тогда и только тогда, когда выполняется условие (11). В случае ряда (4) в формулах (8) и (14) полагаем $a_0 = 0$.

Условия (8) и (14) называют условиями Боаса – Теляковского интегрируемости тригонометрических рядов (3) и (4) (см. [17]), а множества последовательностей $\{a_k\}$, удовлетворяющие условиям (8), (14), обозначим через $B-T$.

В работах [10, 16] доказано, что $K \cap C_0 \subset F_p \cap C_0 \subset (B-T)\cap C_0$; обратные включения, как видно из приведенных в этих работах примеров, не имеют места. В работе [7] С. А. Теляковский установил, что если $\{a_k\} \in (B-T)\cap C_0$, то для сходимости ряда (3) в метрике пространства L_1 достаточно выполнения условия (10), а если $\{a_k\} \in (B-T)\cap C_0$ и имеет место (11), то для сходимости ряда (4) достаточно выполнения условия (10). Он доказал [18], что условие (10) не является необходимым для сходимости в среднем рядов Фурье (3) и (4), а также показал, что никакое другое условие на скорость стремления к нулю коэффициента a_k не будет при этом необходимым. С. А. Теляковским была высказана гипотеза о том, что необходимым и достаточным условием сходимости в метрике пространства L_1 ряда (3), коэффициенты которого удовлетворяют условиям (5), (8) и (14), является условие

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{|a_{n+k}|}{k} = 0. \tag{15}$$

Попытки решения этой задачи предпринимались в работах [19, 20].

Справедливость гипотезы С. А. Теляковского доказывается в п. 3 настоящей статьи. В п. 2 устанавливаются необходимые условия сходимости рядов Фурье (3) и (4) в метрике пространства L_1.

2. В ряде работ (см., например, [15, 20]) приведены необходимые и достаточные условия (т. е. критерии) сходимости рядов Фурье в метрике пространства L_1. Однако они выражены, как правило, в виде интегральной нормы некоторого полинома с коэффициентами a_k, что затрудняет их применение в каждом конкретном случае. Поэтому желательно иметь только необходимые или только достаточные условия, но выраженные непосредственно через коэффициенты a_k. В работе Г. А. Фомина [15] доказано, что если ряд (3) сходится в среднем, то для каждой последовательности натуральных чисел $\{m_n\}$ такой, что $m_n \le n$, $n = 1, 2, \ldots$, выполняется соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m_n} \frac{a_{n+k}}{k} = 0.$$

Аналогичное утверждение верно для ряда (4).

Докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть ряды* (3) *и* (4) *являются рядами Фурье соответственно функций* $c(\cdot)$ *и* $s(\cdot) \in L_1$. *Тогда для сходимости этих рядов в метрике пространства* L_1 *необходимо выполнение условия* (15), *а для ограниченности частных сумм в метрике пространства* L_1 *рядов* (3) *и* (4) *необходимо условие*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} < C, \tag{16}$$

где C *— абсолютная постоянная.*

Доказательство. Обозначим через $V_{2n}^{n}(c;x)$ сумму Валле Пуссена функции $c(x)$:

$$V_{2n}^{n}(c;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=n}^{2n} S_k(c;x) = \frac{a}{2} + \sum_{k=1}^{2n} \lambda_k^{(n)} a_0 \cos kx,$$

$$\lambda_k^{(n)} = \begin{cases} 1, & k = 1, 2, \ldots, n; \\ \dfrac{2n-k+1}{n+1}, & k = n+1, n+2, \ldots, 2n. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$\left\| c(x) - S_n(c;x) \right\|_1 \ge \left\| V_{2n}^{n}(c;x) - S_n(c;x) \right\|_1 - \left\| c(x) - V_{2n}^{n}(c;x) \right\|_1 =$$

$$= \left\| V_{2n}^{n}(c;x) - S_n(c;x) \right\|_1 + o(1) = \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n+1} a_k \cos kx \right\|_1 + o(1) \quad \forall c(\cdot) \in L_1. \tag{17}$$

Поскольку

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k\, a_k \cos kx + i \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k\, a_k \sin kx = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k\, a_k e^{ikx}$$

и

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k\, a_k e^{ikx} \right\|_1 \le$$

$$\le \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k\, a_k \cos kx \right\|_1 + \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k\, a_k \sin kx \right\|_1 =$$

$$= \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} a_k \sin kx \right)' \right\|_1 + \left\| \left(\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k}{n} a_k \cos kx \right)' \right\|_1,$$

то, используя неравенство С. Н. Бернштейна [21, с. 23], находим

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k a_k e^{ikx} \right\|_1 \leq 4n \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} a_k \cos kx \right\|_1 . \tag{18}$$

Далее, на основании неравенства Харди [22, с. 454] получаем

$$\left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k a_k e^{ikx} \right\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} k a_k e^{i(k-n)x} \right\|_1 =$$

$$= \left\| \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} (n+k) a_{n+k} e^{ikx} \right\|_1 \geq C \sum_{k=1}^{n} \frac{n-k}{n} (n+k) \frac{|a_{n+k}|}{k} \geq$$

$$\geq Cn \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} - C \sum_{k=1}^{n} |a_{n+k}|. \tag{19}$$

Из неравенств (18) и (19) следует

$$\left\| \sum_{k=n}^{2n} \frac{2n-k+1}{n} a_k \cos kx \right\| \geq C \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} - C \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{n+k}|.$$

Поскольку $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{n+k}| \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\left\| \sum_{k=n}^{2n} \frac{2n-k}{n} a_k \cos kx \right\| \geq C \sum_{k=1}^{n} \frac{|a_{n+k}|}{k} + o(1). \tag{20}$$

На основании соотношений (17) и (20) получаем утверждение теоремы 1 для функции $c(x)$. Для функции $s(x)$ доказательство теоремы 1 аналогично.

Замечание. Если $a_k \geq 0$ $(a_k \leq 0)$ $\forall k \in Z^+$, то эта теорема следует из работы Г. А. Фомина [15].

3. Целью настоящего пункта является доказательство следующих утверждений.

Теорема 2. *Пусть коэффициенты* a_k *ряда* (3) *образуют нуль-последовательность, которая принадлежит множеству* $B-T$, *т. е.*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}) \right| < \infty. \tag{21}$$

Тогда для сходимости ряда (3) *в среднем необходимо и достаточно выполнения соотношения* (15), *а для ограниченности частных сумм ряда* (3) *необходимо и достаточно выполнения соотношения* (16).

Теорема 3. *Пусть коэффициенты* a_k *ряда* (4) *образуют нуль-последовательность, принадлежащую множеству* $B-T$, *т. е. удовлетворяющую условиям* (21). *Тогда для сходимости в среднем ряда* (4) *необходимо и достаточно выполнения соотношений* (11) *и* (15), *а для ограниченности частных сумм ряда* (4) *необходимо и достаточно выполнения соотношений* (11) *и* (16).

Доказательство теоремы 2. Необходимость условия (15) (для ограниченности частных сумм ряда (3) необходимость условия (16)) следует из теоремы 1.

В работе [18] (следствие 1) для рядов вида (3), у которых $\{a_k\} \in (B-T) \cap C_0$, доказано, что равномерно относительно $m = 0, 1, 2, \ldots$ справедливо асимптотическое равенство

$$\int_0^\pi \left| \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty a_k \cos kx \right| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k} |a_{m-k} - a_{m+k}| +$$

$$+ O\left(\sum_{k=0}^\infty |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^{m-2} \left| \sum_{l=1}^{r_{k,m}} \frac{1}{l}(\Delta a_{k-l} - \Delta a_{k+l}) \right| + \sum_{k=2}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta a_{m+k-l} - \Delta a_{m+k+l}) \right| \right), \tag{22}$$

где $r_{k,m} = \min\{[k/2], [(m-k)/2]\}$.

Последовательность

$$\gamma_k = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \le k \le n; \\ a_k, & \text{если } k \ge n+1, \end{cases} \tag{23}$$

принадлежит множеству $(B-T)\cap C_0$. То, что $\{\gamma_k\} \in BV \cap C_0$, очевидно, а выполнение соотношения (14) для $\{\gamma_k\}$ следует из неравенства

$$\sum_{k=2}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta\gamma_{k+l}) \right| \le \sum_{k=n}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta a_{k+l}) \right| + C \max_{[n/2]\le k \le [3n/2]} |a_k| \log n$$

(см. лемму из [7]). Отсюда и из соотношения (22) следует, что при $m = n$

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^\infty a_k \cos kx \right| dx = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |a_{n+k}| + O\left(\sum_{k=n}^\infty |\Delta a_k| + \sum_{k=2}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta a_{n+k-l} - \Delta a_{n+k+l}) \right| \right) \tag{24}$$

и

$$T_n(\gamma) =: \sum_{k=n}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta\gamma_{k-l} - \Delta\gamma_{k+l}) \right| \to 0, \quad n \to \infty. \tag{25}$$

При доказательстве достаточности условия (15) для сходимости частных сумм ряда (3) в метрике пространства L_1 воспользуемся равенством (24). Для этого оценим второе слагаемое остаточного члена из (24):

$$\sum_{k=2}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta a_{n+k-l} - \Delta a_{n+k+l}) \right| \le \sum_{k=n}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta\gamma_{k-l} - \Delta\gamma_{k+l}) \right| +$$

$$+ \sum_{k=n+2}^\infty \left| \sum_{l=[(k-n)/2]+1}^{[k/2]} \frac{1}{l}(\Delta\gamma_{k-l} - \Delta\gamma_{k+l}) \right| =: T_n(\gamma) + \delta_n(\gamma), \tag{26}$$

где γ_k определена соотношениями (23).

Найдем оценку сверху для $\delta_n(\gamma)$:

$$\delta_n(\gamma) \le \sum_{k=n+2}^{2n} \left| \sum_{l=[(k-n)/2]+1}^{[k/2]} \frac{1}{l}\Delta\gamma_{k-l} \right| + \sum_{k=2n}^\infty \sum_{l=[(k-n)/2]+1}^{[k/2]} \frac{1}{l}|\Delta\gamma_{k-l}| +$$

$$+ \sum_{k=n+2}^\infty \sum_{l=[(k-n)/2]+1}^{[k/2]} \frac{1}{l}|\Delta a_{k+l}| =: \delta_n'(\gamma) + \delta_n''(\gamma) + \delta_n'''(\gamma). \tag{27}$$

Для $\delta_n''(\gamma)$ имеем неравенство

$$\delta_n''(\gamma) \le \sum_{k=2n}^\infty \sum_{l=[k/2]}^{[(k+n)/2]} \frac{1}{k-l}|\Delta\gamma_l| \le \sum_{l=n}^{[3n/2]} |\Delta a_l| \sum_{k=2n}^{2l} \frac{1}{k-l} + \sum_{l=[3n/2]}^\infty |\Delta a_l| \sum_{k=2l-n}^{2l} \frac{1}{k-l}.$$

Поскольку $\sum_{k=2n}^{2l} \frac{1}{k-l} \le C$ при $n \le l \le [3n/2]$ и $\sum_{k=2l-n}^{2l} \frac{1}{k-l} \le C$ при $l \ge [3n/2]$, то

$$\delta_n''(\gamma) \le C \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|. \tag{28}$$

Таким же образом оценивается $\delta_n'''(\gamma)$:

$$\delta_n'''(\gamma) \le \sum_{k=n}^{\infty} \sum_{l=[(3n-n)/2]}^{[3n/2]} \frac{1}{l-k} |\Delta \gamma_l| \le$$

$$\le \sum_{l=n}^{[3n/2]} |\Delta a_l| \sum_{k=n+2}^{[(2l+n)/3]} \frac{1}{l-k} + \sum_{l=[3n/2]}^{\infty} |\Delta a_l| \sum_{l=[2l/3]}^{[(2l+n)/3]} \frac{1}{l-k} \le C \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta a_k|. \tag{29}$$

Преобразовав выражение, стоящее под знаком модуля в $\delta_n'(\gamma)$, найдем

$$\sum_{l=[(k-n)/2]+1}^{[k/2]} \frac{1}{l} \Delta \gamma_{k-l} = \sum_{l=[(k-n)/2]}^{[k/2]} \frac{\gamma_{k-l}}{l(l+1)} - \frac{\gamma_{k-[(k-n)/2]}}{[(k-n)/2]} + \frac{\gamma_{k-[k/2]}}{[k/2]+1}.$$

Тогда

$$\delta_n'(\gamma) \le C \sum_{k=n+2}^{2n} \left| \sum_{l=[(k-n)/2]}^{[k/2]} \frac{\gamma_{k-l}}{l(l+1)} \right| + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{\left|\gamma_{k-[(k-n)/2]}\right|}{[(k-n)/2]} + \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{\left|\gamma_{[k/2]}\right|}{[k/2]}.$$

Поскольку

$$\sum_{k=n+2}^{2n} \frac{\left|\gamma_{k/2}\right|}{[k/2]} \le C \sum_{k=[n/2]}^{\infty} |\Delta a_k|, \qquad \sum_{k=n+2}^{2n} \frac{\left|\gamma_{(k+n)/2}\right|}{[(k-n)/2]} \le C \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{|a_{n+k}|}{k},$$

$$\sum_{k=n+2}^{2n} \left| \sum_{l=[(k-n)/2]}^{[k/2]} \frac{\gamma_{k-l}}{l(l+1)} \right| \le C \sum_{k=n+2}^{2n} \sum_{\nu=[k/2]}^{[(k+n)/2]} \frac{|\gamma_\nu|}{(k-\nu)(k-\nu+1)} \le$$

$$\le \sum_{\nu=[(n+2)/2]}^{n+1} |\gamma_\nu| \left(\frac{1}{n-\nu+2} - \frac{1}{\nu+1} \right) + \sum_{\nu=n+2}^{[3n/2]} |\gamma_\nu| \left(\frac{1}{\nu-n} - \frac{1}{2n-\nu+1} \right) \le$$

$$\le |a_{n+1}| + \sum_{\nu=n+2}^{[3n/2]} |a_\nu| \frac{1}{\nu-n} + \frac{C}{n} \sum_{\nu=n+2}^{[3n/2]} |a_\nu| \le \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{|a_{n+k}|}{k} + C \left(\sum_{k=n+2}^{\infty} |\Delta a_k| + \frac{1}{n} \sum_{k=n+2}^{[3n/2]} |a_k| \right),$$

имеем

$$\delta_n'(\gamma) \le C \left(\sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{|a_{n+k}|}{k} + \sum_{k=[n/2]}^{\infty} |\Delta a_k| \right). \tag{30}$$

Из соотношений (27) – (30) следует

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{n+k-l} - \Delta a_{n+k+l}) \right| \le C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |a_{n+k}| + o(1). \tag{31}$$

Учитывая (24) и (31), находим

$$\int_0^{\pi} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cos kx \right| dx \le C \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} |a_{n+k}|,$$

что и завершает доказательство теоремы 2.

Доказательство теоремы 3. Необходимость условия (15) следует из теоремы 1, а необходимость условия (11) для интегрируемости ряда (4) доказана в [16].

Из теоремы 1 работы [18] нетрудно получить оценку

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^\infty a_k \sin kx \right| dx \le C\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |a_{n+k}| + \sum_{k=2n+1}^\infty \frac{1}{k} |a_k| + \sum_{k=2}^\infty \left| \sum_{l=1}^{[k/2]} \frac{1}{l} (\Delta a_{n+k-l} - \Delta a_{n+k+l}) \right| \right).$$

Учитывая соотношения (31), последнее неравенство переписываем в виде

$$\int_0^\pi \left| \sum_{k=n+1}^\infty a_k \sin kx \right| dx \le C\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} |a_{n+k}| + \sum_{k=2n+1}^\infty \frac{1}{k} |a_k| \right),$$

откуда видна достаточность условий (15) и (11) для сходимости в среднем ряда Фурье (4), а также достаточность условий (16) и (11) для ограниченности в метрике пространства L_1 частных сумм ряда (4). Теорема 3 доказана.

1. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. – М.: Физматгиз, 1961. – 936 с.
2. *Young W. H.* On the Fourier series of bounded functions // Proc. London Math. Soc. – 1913. – **12**, № 1. – P. 41 – 70.
3. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. – М.;Л.: ГОНТИ, 1939. – 323 с.
4. *Колмогоров А. Н.* Sur l'ordre be grandeur des coefficients de la serie be Fourier – Lebesgue // Bull. Acad. pol. sci.(A). – 1923. – P. 83 – 86.
5. *Hille E., Tamarkin J. D.* On the summability of Fourier series. II // Ann. Math. – 1933. – **34**, № 2. – P. 329 – 348.
6. *Теляковский С. А.* Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб. – 1964. – **63**, № 3. – С. 426 – 444.
7. *Теляковский С. А.* К вопросу о сходимости рядов Фурье в метрике L // Мат. заметки. – 1967. – **1**, № 1. – С. 91 – 98.
8. *Теляковский С. А.* Об одном достаточном условии Сидона интегрируемости тригонометрических рядов // Там же. – 1973. – **14**, № 3. – С. 317 – 328.
9. *Sidon S.* Hinreichende Bedingungen fur den Fourier – Charakter einer trigonometrischen Reihen // J. London Math. Soc. – 1939. – **14**, № 2. – P. 158 – 160.
10. *Фомин Г. А.* Об одном классе тригонометрических рядов // Мат. заметки. – 1978. – **23**, № 2. – С. 213 – 222.
11. *Tanovic-Miller N.* On a paper of Bojanic and Stanojevic // Rend. Circ. math. Palermo. – 1985. – Ser. II. – **34**, № 2. – P. 310 – 324.
12. *Chand-Pao Chen.* L_1-convergence of Fourier series // J. Austral. Math. Soc. – 1986. – **41**, № 3. – P. 376 – 390.
13. *Stanojevic C. V., Stanojevic V. B.* Generalizations of the Sidon – Teljakovskii theorem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1987. – **101**, № 4. – P. 679 – 684.
14. *Buntinas M., Tanovic-Miller N.* New integrability and L^1-convergence classes for even trigonometric series // Rad. mat. – 1990. – **6**. – P. 149 – 170.
15. *Фомин Г. А.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Мат. сб. – 1979. – **110**, № 2. – С. 251 – 265.
16. *Теляковский С. А.* Условия интегрируемости тригонометрических рядов и их приложение к изучению линейных методов суммирования рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1964. – **28**, № 6. – С. 1209 – 1236.
17. *Задерей П. В.* Об условиях интегрируемости кратных тригонометрических рядов // Укр. мат. журн. – 1992. – **44**, № 3. – С. 340 – 365.
18. *Теляковский С. А.* Оценка нормы функции через ее коэффициенты Фурье, удобная в задачах теории аппроксимации // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1971. – **109**. – С. 65 – 97.
19. *Задерей П. В.* О сходимости рядов Фурье в среднем // Укр. мат. журн. – 1989. – **41**, № 4. – С. 562 – 568.
20. *Белов А. С.* Об условиях сходимости (ограниченности) в среднем частных сумм тригонометрического ряда // Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. ст. – М.: АФЦ, 1999. – 272 с.
21. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 2. – 538 с.
22. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: В 2 т. – М.: Мир, 1965. – Т. 1. – 615 с.

Получено 26.12.2001