УДК 517.5

С. А. Стасюк (Ін-т математики НАН України, Київ)

ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАСІВ $B^{\Omega}_{p,\theta}$ ПЕРІОДИЧНИХ ФУНКЦІЙ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

We obtain exact order estimates of trigonometrical widths of the classes $B^{\Omega}_{p,\theta}$ of periodic multivariable functions in the space L_q, $1 < p \le 2 \le q < p/(p-1)$.

Одержано точні порядкові оцінки тригонометричних поперечників класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ періодичних функцій багатьох змінних у просторі L_q, $1 < p \le 2 \le q < p/(p-1)$.

У даній роботі досліджується тригонометричний поперечник класу $B^{\Omega}_{p,\theta}$ у просторі L_q

$$d^T_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) = \inf_{\Theta_M} \sup_{f \in B^{\Omega}_{p,\theta}} \inf_{t(\Theta_M, x)} \| f(\cdot) - t(\Theta_M, \cdot)\|_q,$$

де $t(\Theta_M, x) = \sum_{j=1}^{M} c_j e^{i(k^j, x)}$, $\Theta_M = \{k^j\}_{j=1}^{M}$ — довільний набір векторів k^j з цілочислової решітки Z^d, $(k^j, x) = k_1^j x_1 + \ldots + k_d^j x_d$, а $L_q = L_q(\pi_d)$, $\pi_d = \prod_{j=1}^{d} [-\pi, \pi]$, — простір 2π-періодичних за кожною змінною функцій f із скінченною нормою

$$\| f \|_q = \| f \|_{L_q(\pi_d)} := \left((2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} | f(x)|^q \, dx \right)^{1/q}, \quad 1 \le q < \infty.$$

Уперше величина тригонометричного поперечника була введена Р. С. Ісмагіловим у роботі [1], а пізніше досліджувалась у роботах [2 – 7] (див. також наведену в них бібліографію).

Будемо розглядати лише множини 2π-періодичних за кожною змінною функцій f, що належать простору

$$L^0_p(\pi_d) := \left\{ f \colon f \in L_p(\pi_d), \ \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx_j = 0, \ j = \overline{1,d} \right\}.$$

Класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, $1 < p < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$, введені в роботі [8], визначаються таким чином:

$$B^{\Omega}_{p,\theta} := \left\{ f \in L^0_p(\pi_d) \colon \| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \le 1 \right\},$$

де

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\theta}} \asymp \left\{ \sum_s \| \delta_s(f, \cdot) \|_p^{\theta} \, \Omega(2^{-s})^{-\theta} \right\}^{1/\theta}, \quad 1 \le \theta < \infty,$$

і

$$\| f \|_{B^{\Omega}_{p,\infty}} \asymp \sup_s \frac{\| \delta_s(f, \cdot) \|_p}{\Omega(2^{-s})}, \quad \theta = \infty,$$

 ISSN 0041-6053. Укр. мат. журн., 2002, т. 54, № 5

а $\Omega(2^{-s}) = \Omega(2^{-s_1}, \dots, 2^{-s_d})$, $\delta_s(f, x) = \sum_{k\in\rho(s)} \hat{f}(k) e^{i(k,x)}$, $s \in N^d$, $k \in Z^d$,

$$\rho(s) = \left\{ k = (k_1, \dots, k_d) \colon 2^{s_j - 1} \le |k_j| < 2^{s_j},\ j = \overline{1, d} \right\},$$

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d} \int_{\pi_d} f(t) e^{-i(k,t)} dt.$$

У наведеному вище визначенні класів $B^{\Omega}_{p,\theta}$ функція $\Omega(t) = \Omega(t_1, \dots, t_d)$ — задана функція типу мішаного модуля неперервності порядку l, яка задовольняє такі умови:

1) $\Omega(t) > 0$, $t_j > 0$, $j = \overline{1, d}$, $\Omega(t) = 0$, $\prod_{j=1}^{d} t_j = 0$;

2) $\Omega(t)$ зростає по кожній змінній;

3) $\Omega(m_1 t_1, \dots, m_d t_d) \le \left(\prod_{j=1}^{d} m_j \right)^l \Omega(t)$, $m_j \in N$, $j = \overline{1, d}$;

4) $\Omega(t)$ неперервна при $t_j \ge 0$, $j = \overline{1, d}$.

Крім цього, $\Omega(t)$ по кожній із змінних задовольняє умови (S) і (S_l) [9], які називають умовами Барі – Стечкіна.

Будемо говорити, що функція однієї змінної $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S), якщо існує деяке число $\alpha > 0$ таке, що функція $\varphi(\tau)/\tau^{\alpha}$ є майже зростаючою, тобто існує $C_1 > 0$, яке не залежить від τ_1 і τ_2, таке, що $\varphi(\tau_1)/\tau_1^{\alpha} \le C_1 \varphi(\tau_2)/\tau_2^{\alpha}$ при $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1$.

Вважатимемо, що функція $\varphi(\tau) \ge 0$ задовольняє умову (S_l), якщо існує деяке число γ, $0 < \gamma < l$, таке, що функція $\varphi(\tau)/\tau^{\gamma}$ є майже спадною, тобто існує $C_2 > 0$, яке не залежить від τ_1 і τ_2, таке, що $\varphi(\tau_1)/\tau_1^{\gamma} \ge C_2 \varphi(\tau_2)/\tau_2^{\gamma}$ при $0 < \tau_1 \le \tau_2 \le 1$.

Будемо називати функції $\mu_1(n)$ і $\mu_2(n)$ функціями одного порядку і писати $\mu_1(n) \asymp \mu_2(n)$, якщо для довільного $n > n_0$ виконується нерівність $C_3 \mu_1(n) \le \mu_2(n) \le C_4 \mu_1(n)$, $C_3, C_4 > 0$. Якщо ж $\mu_1(n) \le C_5 \mu_2(n)$ чи $\mu_1(n) \ge$ $\ge C_6 \mu_2(n)$ $(C_5, C_6 > 0)$, то будемо писати $\mu_1(n) << \mu_2(n)$ і $\mu_1(n) >> \mu_2(n)$ відповідно.

Зазначимо, що ми будемо розглядати класи $B^{\Omega}_{p,\theta}$, які визначаються функцією типу мішаного модуля неперервності порядку l вигляду

$$\Omega(t) = \omega\left(\prod_{j=1}^{d} t_j \right), \tag{1}$$

де $\omega(\tau)$ — одновимірний модуль неперервності порядку l, який задовольняє умови (S) і (S_l).

Справедливе наступне твердження.

Теорема. *Нехай* $1 < p \le 2 \le q < p/(p-1)$, $1 \le \theta \le \infty$ *і* $\Omega(t)$ *має вигляд* (1) *з* $\omega(\tau)$, *що задовольняє умови* (S) *з деяким* $\alpha > 1$ *і* (S_l). *Тоді для будь-яких натуральних* M *та* n, *що задовольняють умову* $M \asymp 2^n n^{d-1}$, *має місце співвідношення*

$$d^T_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q \right) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p - 1/2)} n^{(d-1)(1/2 - 1/\theta)_+},$$

де $a_+ = \max\{a; 0\}$.

Доведення. Встановимо спочатку оцінку зверху. При цьому будемо користуватися наступним допоміжним твердженням.

Лема А [10]. *Нехай* $2 \le q < \infty$, $\Theta_M = \{k^j\}_{j=1}^{M} \subset Z^d$. *Тоді для будь-якого тригонометричного полінома*

$$P(\Theta_M, x) = \sum_{j=1}^{M} e^{i(k^j, x)}$$

і будь-якого $N \le M$ *знайдеться тригонометричний поліном* $P(\Theta_N, x)$, *який містить не більше* N *гармонік і такий, що*

$$\| P(\Theta_M, \cdot) - P(\Theta_N, \cdot) \|_q \ll MN^{-1/2},$$

причому $\Theta_N \subset \Theta_M$, *всі коефіцієнти* $P(\Theta_N, x)$ *однакові і не перевищують* MN^{-1}.

Нехай задано M. Підберемо $n \in N$ так, щоб $2^n n^{d-1} \asymp M$ і $2^n n^{d-1} \ge 2M$. Далі кожному вектору $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$, що задовольняє умову $n \le (s,1) < \beta n$, $(s,1) = s_1 + \ldots + s_d$, $\beta = (\alpha - 1/p + 1/2)/(\alpha - 1/p + 1/q)$, поставимо у відповідність число

$$N_s = \left[\omega^{-1}(2^{-n}) \omega(2^{-(s,1)}) 2^{(s,1)} \right] + 1. \tag{2}$$

Тоді, врахувавши, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > 1$ та

$$\sum_{(s,1) \ge n} 2^{-\sigma(s,1)} \asymp 2^{-\sigma n} n^{d-1}, \quad \sigma > 0, \tag{3}$$

матимемо

$$\sum_{n \le (s,1) < \beta n} N_s \ll \omega^{-1}(2^{-n}) \sum_{n \le (s,1) < \beta n} \frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} 2^{-(\alpha-1)(s,1)} + n^d \ll$$

$$\ll \omega^{-1}(2^{-n}) \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}} \sum_{(s,1) \ge n} 2^{-(\alpha-1)(s,1)} + n^d \ll 2^n n^{d-1} \asymp M.$$

Позначимо через $t(\Theta_{N_s}, x)$ тригонометричний поліном, підібраний для кожного „блоку" $t_s(x) = \sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)}$ згідно з лемою А. Отже,

$$\left\| t_s(\cdot) - t(\Theta_{N_s}, \cdot) \right\|_q \ll 2^{(s,1)} N_s^{-1/2}.$$

Зазначимо, що внаслідок леми А $\Theta_{N_s} \subset \rho(s)$ і всі коефіцієнти $t(\Theta_{N_s}, x)$ однакові. Покажемо, що на підпросторі тригонометричних поліномів з номерами гармонік з об'єднання множин

$$Q_n^1 = \bigcup_{(s,1) < n} \rho(s), \qquad P_n^1 = \bigcup_{n \le (s,1) < \beta n} \Theta_{N_s}$$

реалізується значення поперечника $d_M^T \left(B_{p,\theta}^{\Omega}, L_q \right)$.

Нехай f — деяка функція з класу $B_{p,\theta}^{\Omega}$. Переконаємось, що за допомогою полінома

$$t(\Theta_M, x) = \sum_{(s,1) < n} \delta_s(f, x) + \sum_{n \le (s,1) < \beta n} t(\Theta_{N_s}, x) * \delta_s(f, x) \tag{4}$$

можна одержати потрібну оцінку наближення для f. Маємо

$$\| f(\cdot) - t(\Theta_M, \cdot) \|_q \le \left\| \sum_{n \le (s,1) < \beta n} \left(\delta_s(f, \cdot) - t(\Theta_{N_s}, \cdot) * \delta_s(f, \cdot) \right) \right\|_q +$$

$$+ \left\| \sum_{(s,1) \ge \beta n} \delta_s(f, \cdot) \right\|_q =: I_1 + I_2. \tag{5}$$

Застосувавши для оцінки I_2 теорему 6 [8] та врахувавши, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > 1$, одержимо

$$I_2 \ll \omega(2^{-\beta n})\, 2^{\beta n(1/p-1/q)}\, n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+} =$$

$$= \frac{\omega(2^{-\beta n})}{2^{-\alpha\beta n}}\, 2^{-\beta n(\alpha-1/p+1/q)}\, n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+} \ll$$

$$\ll \frac{\omega(2^{-n})}{2^{-\alpha n}}\, 2^{-n(\alpha-1/p+1/2)}\, n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+} = \omega(2^{-n})\, 2^{n(1/p-1/2)}\, n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}. \quad (6)$$

Для того щоб оцінити доданок I_1, розглянемо для кожного вектора $s = (s_1, \ldots, s_d)$, $s_j \in N$, $j = \overline{1, d}$, $n \le (s,1) < \beta n$, лінійний оператор T_s, який діє за правилом

$$T_s f = f * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,x)} - t(\Theta_{N_s}, x) \right).$$

Для проведення подальших міркувань необхідне допоміжне твердження.

Лема Б [7]. *Нехай* $1 \le p \le 2 \le q < p'$, $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. *Тоді норма оператора* T_s, *який діє з* L_p *в* L_q, *задовольняє нерівність*

$$\| T_s \|_{p \to q} = \sup_{\|f\|_p \le 1} \| T_s f \|_q \ll 2^{(s,1)} N_s^{-(1/2+1/p')}.$$

Скориставшись для оцінки I_1 теоремою Літтлвуда – Пелі (див. [11, с. 52 – 56]), потім нерівністю Мінковського і, нарешті, застосувавши лему Б, одержимо

$$I_1 \ll \left\| \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} \left| \delta_s(f,\cdot) - \delta_s(f,\cdot) * t(\Theta_{N_s}, \cdot) \right|^2 \right)^{1/2} \right\|_q \le$$

$$\le \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} \left\| \delta_s(f,\cdot) * \left(\sum_{k \in \rho(s)} e^{i(k,\cdot)} - t(\Theta_{N_s}, \cdot) \right) \right\|_q^2 \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} \| T_s \|_{p \to q}^2 \| \delta_s(f,\cdot) \|_p^2 \right)^{1/2} \ll \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} \frac{2^{2(s,1)}}{N_s^{1+2/p'}} \| \delta_s(f,\cdot) \|_p^2 \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Далі, підставляючи в (7) замість N_s його значення з (2) та враховуючи, що $\omega(\tau)$ задовольняє умову (S) з $\alpha > 1$, знаходимо

$$I_1 \ll (\omega(2^{-n}))^{1/2+1/p'} \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} \left(\frac{\omega(2^{-(s,1)})}{2^{-\alpha(s,1)}} 2^{-(\alpha-1)(s,1)} \right)^{1-2/p'} \frac{\| \delta_s(f,\cdot) \|_p^2}{\omega^2(2^{-(s,1)})} \right)^{1/2} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n})\, 2^{(1/2-1/p')\alpha n} \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} 2^{-(\alpha-1)(1-2/p')(s,1)}\, \omega^{-2}(2^{-(s,1)})\, \| \delta_s(f,\cdot) \|_p^2 \right)^{1/2}. \quad (8)$$

Для того щоб продовжити оцінку, розглянемо три випадки.

1. Нехай $1 \le \theta \le 2$. Тоді з (8) згідно з нерівністю [12, с. 43]

$$\left(\sum_k |a_k|^{c_2}\right)^{1/c_2} \le \left(\sum_k |a_k|^{c_1}\right)^{1/c_1}, \quad 1 \le c_1 \le c_2 < \infty,$$

одержимо

$$I_1 \ll \omega(2^{-n}) 2^{(1/2-1/p')\alpha n} \times$$

$$\times \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} 2^{-(\alpha-1)(1/2-1/p')\theta(s,1)} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \le$$

$$\le \omega(2^{-n}) 2^{(1/2-1/p')\alpha n} 2^{-(\alpha-1)(1/2-1/p')n} \left(\sum_{n \le (s,1) < \beta n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{(1/2-1/p')n} \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)}. \qquad (9)$$

2. Нехай $2 < \theta < \infty$. Тоді, застосувавши до останньої суми (8) нерівність Гельдера з показником $\theta/2$ і (3), знайдемо

$$I_1 \ll \omega(2^{-n}) 2^{(1/2-1/p')\alpha n} \left(\sum_{(s,1) \ge n} 2^{-(\alpha-1)(1/2-1/p')(2\theta/(\theta-2))(s,1)}\right)^{(\theta-2)/2\theta} \times$$

$$\times \left(\sum_{(s,1) \ge n} \omega^{-\theta}(2^{-(s,1)}) \|\delta_s(f,\cdot)\|_p^\theta\right)^{1/\theta} \ll$$

$$\ll \omega(2^{-n}) 2^{(1/p-1/2)\alpha n} 2^{-(\alpha-1)(1/p-1/2)n} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)} \|f\|_{B^\Omega_{p,\theta}} \le$$

$$\le \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)}. \qquad (10)$$

3. При $\theta = \infty$ згідно з (3) одержимо

$$I_1 \ll \omega(2^{-n}) 2^{(1/2-1/p')\alpha n} \sup_s \frac{\|\delta_s(f,\cdot)\|_p}{\omega(2^{-(s,1)})} \left(\sum_{(s,1) \ge n} 2^{-(\alpha-1)(1-2/p')(s,1)}\right)^{1/2} \asymp$$

$$\asymp \omega(2^{-n}) 2^{(1/2-1/p')\alpha n} \|f\|_{B^\Omega_{p,\infty}} 2^{-(\alpha-1)(1/2-1/p')n} n^{(d-1)/2} \le$$

$$\le \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)/2}. \qquad (11)$$

Отже, об'єднуючи (9) – (11), одержуємо оцінку для I_1:

$$I_1 \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}, \qquad (12)$$

а підставляючи (12) і (6) в (5), приходимо до шуканої оцінки зверху

$$\|f(\cdot) - t(\Theta_M,\cdot)\|_q \ll \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)(1/2-1/\theta)_+}.$$

Оцінка знизу встановлюється з використанням співвідношення

$$d_M^T\left(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\right) \ge d_M\left(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\right)$$

та відомої оцінки колмогоровського поперечника $d_M\left(B^\Omega_{p,\theta}, L_q\right)$ (див. теорему 8 [8]) у випадку $1 < p \le 2 \le q < \infty$, $\alpha > 1/p$.

Теорему доведено.

***Зауваження.* 1.** При виконанні умов теореми для $\theta = \infty$ має місце співвідношення

$$d^T_M\left(B^{\Omega}_{p,\infty}, L_q\right) = d^T_M\left(H^{\Omega}_p, L_q\right) \asymp \omega(2^{-n}) 2^{n(1/p-1/2)} n^{(d-1)/2}, \quad M \asymp 2^n n^{d-1},$$

оскільки при $\theta = \infty$ клас $B^{\Omega}_{p,\infty}$ збігається з класом H^{Ω}_p [13].

2. Якщо $\Omega(t) = \prod_{j=1}^d t_j^{r_1}$, $1 < p \le 2 \le q < p'$, $1 \le \theta \le \infty$ і $\alpha = r_1 > 1$, то має місце порядкова рівність

$$d^T_M\left(B^{\Omega}_{p,\theta}, L_q\right) \asymp \left(M^{-1} \log^{d-1} M\right)^{r_1 - 1/p - 1/2} \left(\log^{d-1} M\right)^{(1/2-1/\theta)_+},$$

встановлена А. С. Романюком у роботі [7].

1. *Исмагилов Р. С.* Поперечники множеств в линейных нормированных пространствах и приближение функций тригонометрическими многочленами // Успехи мат. наук. – 1974. – **29**, № 3. – С. 161 – 178.
2. *Майоров В. Е.* О линейных поперечниках соболевских классов и цепочках экстремальных подпространств // Мат. сб. – 1980. – **113**, № 3. – С. 437 – 463.
3. *Makovoz Y.* On trigonometric n-widths and their generalizations // J. Approxim. Theory. – 1984. – **41**, № 4. – P. 361 – 366.
4. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Исследование по теории функций многих вещественных переменных. – Ярославль: Ярослав. ун-т, 1984. – С. 10 – 24.
5. *Белинский Э. С.* Приближение периодических функций многих переменных „плавающей" системой экспонент и тригонометрические поперечники // Докл. АН СССР. – 1985. – **284**, № 6. – С. 1294 – 1297.
6. *Темляков В. Н.* Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – М.: Наука, 1986. – **178**. – 112 с.
7. *Романюк А. С.* Тригонометрические поперечники классов $B^r_{p,\theta}$ функций многих переменных в пространстве L_q // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 8. – С. 1089 – 1097.
8. *Sun Yongsheng, Wang Heping.* Representation and approximation of multivariate periodic functions with bounded mixed moduli of smoothness // Тр. Мат. ин-та РАН. – 1997. – **219**. – С. 356 – 377.
9. *Бари Н. К., Стечкин С. Б.* Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. – 1956. – **5**. – С. 483 – 522.
10. *Белинский Э. С., Галеев Э. М.* О наименьшей величине норм смешанных производных тригонометрических полиномов с заданным числом гармоник // Вест. Моск. ун-та. Мат. и мех. – 1991. – № 2. – С. 3 – 7.
11. *Никольский С. М.* Приближение периодических функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
12. *Харди Г., Литтлвуд Д., Полиа Г.* Неравенства. – М.: Изд-во иностр. лит., 1948. – 456 с.
13. *Пустовойтов Н. Н.* Представление и приближение периодических функций многих переменных с заданным смешанным модулем непрерывности // Anal. math. – 1994. – **20**. – P. 35 – 48.

Одержано 24.07.2001