УДК 517.5

А. И. Степанец, В. В. Савчук (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ПРИБЛИЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

We investigate approximations of analytic functions defined by Cauchy-type integrals in Jordan domains of the complex plane. We develop, modify, and complete (in a certain sense) the results obtained by the authors earlier. Special attention is given to the investigation of approximations of functions analytic in a disk by Taylor sums. In particular, we obtain asymptotic equalities for upper bounds of the deviations of Taylor sums on the classes of ψ-integrals of functions that are analytic in the unit disk and continuous in its closure. These equalities are a generalization of the well-known results of S. B. Stechkin on the approximation of functions analytic in the unit disk and having bounded r th derivatives (here, r is a natural number).

On the basis of the results obtained for a disk, we establish pointwise estimates for the deviations of partial Faber sums on the classes of ψ-integrals of functions analytic in domains with rectifiable Jordan boundaries. We show that these estimates in a closed domain are exact in order and exact in the sense of constants with leading terms if and only if the domain is Faberian.

Досліджуються наближення аналітичних функцій, заданих інтегралами типу Коші в жорданових областях комплексної площини. Результати, одержані авторами раніше, набувають подальшого розвитку і модернізації та в певному розумінні завершеності. Важливе значення надається дослідженню наближень сумами Тейлора функцій, аналітичних у крузі. Зокрема, знаходяться асимптотичні рівності для верхніх меж відхилень сум Тейлора на класах ψ-інтегралів функцій, аналітичних в одиничному крузі та неперервних в його замиканні. Ці рівності є узагальненням відомих результатів С. Б. Стечкіна про наближення аналітичних в одиночному крузі функцій з обмеженими r-ми (r — натуральне) похідними.

На основі результатів, отриманих для круга, знаходяться поточкові оцінки відхилень частинних сум рядів Фабера на класах ψ-інтегралів функцій, аналітичних в областях зі спрямлюваними жордановими межами. Показано, що ці оцінки в замкненій області є точними за порядком і точними в розумінні констант при головних членах тоді і лише тоді, коли область є фаберовою.

Основой данной работы являются исследования авторов, изложенные в работах [1 – 3]. В работе результаты, полученные ранее, находят дальнейшее развитие и модернизацию и приобретают в известной мере законченность. Одним из элементов метода, использованного в работах [1 – 3] и в данной работе, является редукция задачи о приближении функций, заданных в произвольных областях, к соответствующей задаче о приближениях в единичном круге. Поэтому важное место в этих исследованиях отводится исследованию приближений суммами Тейлора функций, аналитических в круге.

Здесь находятся асимптотические равенства для верхних граней отклонений сумм Тейлора на классах ψ-интегралов функций, аналитических в круге и непрерывных в замкнутом круге, обобщающие известные результаты С. Б. Стечкина [4] для функций с ограниченными r-ми (r — натуральное) производными на окружности. Отметим, что первые такие результаты были получены в [2, 3].

На основании результатов, полученных для круга, находятся оценки отклонений частных сумм рядов Фабера на классах ψ-интегралов функций, аналитических в областях со спрямляемыми жордановыми границами. Показано, что для замкнутых областей эти оценки являются точными по порядку и точными в смысле констант у главных членов тогда и только тогда, когда данная область является фаберовой. В связи с этим отметим, что нам не известно о существовании жордановых областей со спрямляемыми границами, которые не были бы фаберовыми.

1. Определения и вспомогательные утверждения. Пусть Ω — односвязная область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, граница которой является спрямляемой жордановой замкнутой кривой Γ (при этом иногда будем писать $\Gamma = \partial\Omega$), $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ — замыкание области Ω, $\Omega_\infty = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ — внешность кривой Γ

(дополнение области Ω к расширенной комплексной плоскости $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$) и $\mathbb{D}_\infty = \{w \in \hat{\mathbb{C}} : |w| > 1\}$ — внешность единичной окружности $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$.

Вследствие теоремы Римана существует единственная мероморфная в облас ти $\mathbb{D}_\infty$ функция $\Psi(w)$, разлагаемая в окрестности бесконечно удаленной то ки $w = \infty$ в ряд Лорана

$$\Psi(w) = \gamma w + \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k w^{-k}, \quad \gamma > 0,$$

которая конформно и однолистно отображает область $\mathbb{D}_\infty$ на область Ω_∞, существует единственная обратная к $\Psi(w)$ функция $w = \Phi(z)$ с лорановски разложением в окрестности бесконечно удаленной точки $z = \infty$ вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\gamma} z + \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{-k},$$

которая конформно и однолистно отображает область Ω_∞ на область $\mathbb{D}_\infty$.

Число γ называется трансфинитным диаметром области Ω. В дальнейшем не умаляя общности, полагаем $\gamma = 1$.

Многочленом Фабера n-го порядка для области Ω называется алгебраи ческий многочлен $F_n(z)$, который состоит из суммы членов с неотрицательны ми степенями в лорановском разложении функции $[\Phi(z)]^n$ (т. е. правильна часть этого разложения):

$$[\Phi(z)]^n = \left[z + \beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k z^{-k} \right]^n = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} z^k + \sum_{k=-\infty}^{-1} c_{n,k} z^k,$$

так что

$$F_n(z) = z^n + \sum_{k=0}^{n-1} c_{n,k} z^k.$$

Систему многочленов Фабера $\{F_k\}$ для области Ω можно определить та же, как коэффициенты разложения функции

$$K_z(w) = \frac{\Psi'(w)}{\Psi(w) - z}$$

в окрестности точки $w = \infty$ в ряд Лорана:

$$K_z(w) = \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z) w^{-k-1}, \quad |w| > 1. \quad (1$$

Пусть, как обычно, H_p, $0 < p < \infty$, — пространство Харди функций f, каж дая из которых аналитична в круге $\mathbb{D} := \{w \in \mathbb{C} : |w| < 1\}$ и удовлетворяе при заданном $p \in (0, \infty)$ условию

$$\|f\|_{H_p} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{0<\rho<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(\rho e^{it}) \right|^p dt \right)^{1/p} < \infty.$$

Через H_∞ обозначим множество ограниченных аналитических в круге $\mathbb{D}$ функций f с нормой

$$\|f\|_{H_\infty} \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)|.$$

Множество функций f, аналитических в области $\mathbb{D}_\infty$, для которых функция $g(w) = f(w^{-1})$, $w \in \mathbb{D}$, принадлежит H_p, $p \in (0, \infty)$, обозначим через $H_p(\mathbb{D}_\infty)$.

Любая функция $f \in H_p$ $(f \in H_p(\mathbb{D}_\infty))$, $p > 0$, имеет почти всюду на окружности $\mathbb{T}$ определенные предельные значения по некасательным путям, образующие граничную функцию, которую будем обозначать через $f(e^{it})$.

Известно [5, с. 405], *что если функция* Ψ *однолистно отображает область* $\mathbb{D}_\infty$ *на дополнение* $\Omega_\infty = \hat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Omega}$ *области* Ω, *ограниченной замкнутой спрямляемой жордановой кривой, то*:

1) Ψ *непрерывна в* $\overline{\mathbb{D}}_\infty$ *и абсолютно непрерывна на окружности* $\mathbb{T}$;

2) $\Psi' \in H_1(\mathbb{D}_\infty)$;

3) $\dfrac{d\Psi(e^{it})}{dt} = ie^{it}\Psi'(e^{it})$ *почти всюду на окружности* $\mathbb{T}$;

4) *длина* $s(t_1, t_2)$ *дуги, заданной уравнением* $z = \Psi(e^{it})$, $t \in [t_1, t_2]$, *определяется по формуле*

$$s(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\Psi'(e^{it})|\,dt.$$

Из п. 2 этого утверждения и теоремы Ф. Рисса (см., например, [5, с. 390]) с учетом (1) вытекает, что *для любого фиксированного* $z \in \Omega$ *функция* $K_z(w)$ *имеет почти всюду на окружности* $\mathbb{T} = \{w \in \mathbb{C} : |w| = 1\}$ *определенные предельные значения по некасательным путям в области* $\mathbb{D}_\infty$, *образующие на окружности* $\mathbb{T}$ *суммируемую граничную функцию*

$$K_z(e^{it}) = K(e^{it}, z) = \frac{\Psi'(e^{it})}{\Psi(e^{it}) - z},$$

ряд Фурье которой имеет вид

$$S[K_z(e^{it})] \stackrel{\mathrm{df}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} F_k(z) e^{-i(k+1)t}. \tag{2}$$

Пусть $C(\Gamma)$ и $L_p(\Gamma)$, $1 \le p < \infty$, — соответственно пространства непрерывных и суммируемых в p-й степени функций φ на кривой Γ с нормами

$$\|\varphi\|_{C(\Gamma)} = \max_{\zeta\in\Gamma} |\varphi(\zeta)|$$

и

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} = \left(\frac{1}{|\Gamma|}\int_\Gamma |\varphi(\zeta)|^p |d\zeta|\right)^{1/p},$$

где $|\Gamma|$ — длина кривой Γ, $L_\infty(\Gamma)$ — пространство функций φ, существенно ограниченных на Γ с нормой

$$\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} = \operatorname*{ess\,sup}_{\zeta\in\Gamma}|\varphi(\zeta)|.$$

Везде в дальнейшем, не умаляя общности, считаем, что длина кривой Γ, ограничивающей область Ω, равна 2π.

Пусть, далее, $L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 \le p < \infty$, — подмножество функций $\varphi \in L_1(\Gamma)$, суммируемых в p-й степени с весом Φ':

$$L_p(\Gamma, \Phi') = \{\varphi \in L_1(\Gamma) : \varphi \cdot (\Phi')^{1/p} \in L_p(\Gamma)\}$$

и

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\Phi')} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma |\varphi(\zeta)|^p |\Phi'(\zeta)\|d\zeta|\right)^{1/p}.$$

Пространство $L_p(\Gamma, \Phi')$ при $p = \infty$ отождествим с пространством $L_\infty(\Gamma)$.

Заметим, что включение $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 \le p \le \infty$, возможно тогда и только тогда, когда $\varphi \circ \Psi \in L_p(\mathbb{T})$, и, кроме того, справедливо равенство

$$\|\varphi\|_{L_p(\Gamma,\Phi')} = \|\varphi \circ \Psi\|_{L_p(\mathbb{T})}.$$

Пусть $\varphi \in L_q(\Gamma, \Phi')$, $1 \le q \le \infty$. Положим

$$\tilde{\varphi} = (\widetilde{\varphi \circ \Psi}) \circ \Phi,$$

где $\widetilde{\varphi \circ \Psi}$ — функция, тригонометрически сопряженная к $\varphi \circ \Psi$;

$$\varphi_+ = \frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}(\varphi + i\tilde{\varphi}) \tag{3}$$

и

$$\varphi_- = -\frac{\varphi_0}{2} + \frac{1}{2}(\varphi - i\tilde{\varphi}), \tag{4}$$

где

$$\varphi_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi \circ \Psi)(e^{it})\,dt.$$

Известно, что функция f, представимая интегралом типа Коши

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta,$$

является функцией, аналитической в области $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, и если $z \in \Omega$, то $f(z)$ разлагается в ряд по многочленам Фабера

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} f_k F_k(z),$$

в котором

$$f_k \overset{\text{df}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\varphi \circ \Psi)(e^{it})e^{-ikt}\,dt, \quad k = 0, 1, 2, \ldots .$$

Заметим, что числа f_k совпадают с коэффициентами Фурье функции $\varphi \circ \Psi$ с неотрицательными индексами.

В вопросах приближения интегралов $\mathcal{K}\varphi(z)$ во внутренних точках области Ω важное место занимает следующее утверждение [1].

Предложение 1. *Пусть Ω — область, для которой $\Psi' \in H_p(\mathbb{D}_\infty)$, $1 \le p \le \le \infty$, и $\varphi \in L_q(\Gamma, \Phi')$, $\Gamma = \partial\Omega$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Тогда если $\tilde{\varphi} \in L_q(\Gamma, \Phi')$, то в каждой точке $z \in \Omega$*

$$\mathcal{K}\varphi(z) = \mathcal{K}\varphi_+(z). \tag{5}$$

Пусть теперь $L_1(\Gamma, \Phi')_+$ — подмножество функций $\varphi \in L_1(\Gamma, \Phi')$, которые порождают на окружности $\mathbb{T}$ функции $\varphi \circ \Psi$, принадлежащие $L_1(\mathbb{T})$ и имеющие ряды Фурье степенного типа, т. е.

$$L_1(\Gamma, \Phi')_+ = \left\{\varphi \in L_1(\Gamma, \Phi') : S[\varphi \circ \Psi] = \sum_{k=0}^{\infty} \widehat{(\varphi \circ \Psi)}(k) e^{ikt}\right\}.$$

Положим

$$L_p(\Gamma, \Phi')_+ = L_1(\Gamma, \Phi')_+ \cap L_p(\Gamma, \Phi'), \quad 1 < p \le \infty,$$

$$\mathcal{K}_p(\Omega) = \{\mathcal{K}\varphi(z),\ z \in \Omega : \varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')\},$$

$$\mathcal{K}_p(\Omega)_+ = \{\mathcal{K}\varphi(z),\ z \in \Omega : \varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')_+\}$$

и

$$C\mathcal{K}(\Omega)_+ = \{\mathcal{K}\varphi(z),\ z \in \Omega : \varphi \in C(\Gamma) \cap L_1(\Gamma, \Phi')_+\}$$

и докажем следующее утверждение.

Предложение 2. *Пусть $1 < p < \infty$ и область Ω такая, что $\Psi' \in \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $q = p/(p-1)$. Тогда*

$$\mathcal{K}_p(\Omega) = \mathcal{K}_p(\Omega)_+.$$

Доказательство. Соотношение $\mathcal{K}_p(\Omega) \supset \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ очевидно. Докажем противоположное включение. Пусть $f \in \mathcal{K}_p(\Omega)$, тогда

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta)\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega,$$

где $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')$. Поскольку $\varphi \circ \Psi \in L_p(\mathbb{T})$, $1 < p < \infty$, то в силу теоремы М. Рисса и $\widetilde{\varphi \circ \Psi} \in L_p(\mathbb{T})$. Поэтому $\tilde{\varphi} \in L_p(\Gamma, \Phi')$ и согласно предложению 1

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) = \mathcal{K}\varphi_+(z). \tag{6}$$

Но поскольку $\varphi_+ \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$, то из равенства (6) следует, что $f \in \mathcal{K}_p(\Omega)$. Таким образом, действительно, $\mathcal{K}_p(\Omega) \subset \mathcal{K}_p(\Omega)_+$.

Предложения 1 и 2 показывают, что для каждой функции $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')$ при $p \in [1, \infty]$, для которой $\tilde{\varphi} \in L_p(\Gamma, \Phi')$, и тем более для всех функций $\varphi \in \in L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 < p < \infty$, найдется функция $f \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$ такая, что $\mathcal{K}\varphi(z) = = \mathcal{K} f(z) \quad \forall z \in \Omega$. Поэтому при исследовании интегралов типа Коши $\mathcal{K}\varphi$, у которых $\varphi, \tilde{\varphi} \in L_p(\Gamma, \Phi')$, $1 \le p \le \infty$, достаточно ограничиться изучением интегралов типа Коши $\mathcal{K} f$, у которых плотности f принадлежат $L_p(\Gamma, \Phi')_+$.

В дальнейшем важную роль играет следующая конкретизация множеств $\mathcal{K}_p(\Omega)_+$ в случае, когда $\Omega = \mathbb{D}$.

Предложение 3. *Пусть* $1 \le p \le \infty$. *Тогда*

$$\mathcal{K}_p(\mathbb{D})_+ = H_p$$

и

$$C\mathcal{K}(\mathbb{D})_+ = A(\overline{\mathbb{D}}),$$

где $A(\overline{\mathbb{D}})$ *— пространство функций, аналитических в круге* $\mathbb{D}$ *и непрерывных в замкнутом круге* $\overline{\mathbb{D}}$, *снабженное нормой* $\| f \|_{A(\overline{\mathbb{D}})} = \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} | f(z) |$.

Доказательство этого утверждения является несложным упражнением с использованием основных свойств функций из H_p и принципа максимума для аналитических функций.

Пусть $H_p(\mathbb{T})$ — множество всех функций из $L_p(\mathbb{T})$, которые являются некасательными граничными значениями функций из H_p.

***Замечание* 1.** Из предложения 3 и теоремы Коши следует, что $L_p(\mathbb{T})_+ = H_p(\mathbb{T})$, откуда заключаем, что множество $\mathcal{K}_p(\mathbb{D})_+$ совпадает с множеством интегралов

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{\Psi'(e^{it}) e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z} \, dt, \quad z \in \Omega,$$

в которых $f \in H_p(\mathbb{T})$.

2. Множества ψ-интегралов. Множество $\mathcal{K}_p(\Omega)_+$ можно разбить на классы $\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ по принципу разбиения множества $L_p(\mathbb{T})_+$ на классы $L_p^{\psi}(\mathbb{T})_+$, которое осуществляется следующим образом.

Пусть $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(\psi_0 = 1)$ — произвольная последовательность комплексных чисел, функция $f \in L_1(\mathbb{T})_+$ и

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikt}$$

— ее ряд Фурье. Если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \hat{f}(k) e^{ikt}$$

является рядом Фурье некоторой функции $g \in L_1(\mathbb{T})_+$, то ее называют ψ-интегралом функции f и обозначают $\mathcal{J}^{\psi} f$. Множество ψ-интегралов всех функций $f \in L_1(\mathbb{T})_+$ обозначается через $L^{\psi}(\mathbb{T})_+$; если $\mathfrak{N}$ — некоторое подмножество $L_1(\mathbb{T})_+$, то $L^{\psi}\mathfrak{N}(\mathbb{T})_+$ обозначает множество ψ-интегралов всех функций из $\mathfrak{N}$.

Если для заданной функции $F \in L^{\psi}(\mathbb{T})_+$ указана функция $f \in L_1(\mathbb{T})_+$ такая, что почти всюду на $\mathbb{T}$ выполняется равенство $F(e^{it}) = \mathcal{J}^{\psi} f(e^{it})$, то функцию f естественно назвать ψ-производной функции F. При этом мы пишем $f = D^{\psi}F = F^{\psi}$.

Положим

$$L_p^{\psi}(\mathbb{T})_+ = L^{\psi}L_p(\mathbb{T})_+ \cap L_p(\mathbb{T}), \quad 1 \le p \le \infty.$$

Как обычно, через $\mathfrak{M}$ обозначим множество выпуклых убывающих к нулю последовательностей положительных чисел $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$, т. е. последовательностей, удовлетворяющих условиям

$$\psi_k > 0, \quad \psi_k \to 0, \quad k \to +\infty,$$

$$\psi_k - 2\psi_{k+1} + \psi_{k+2} \ge 0, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Сначала отметим следующий факт.

Предложение 4. *Пусть* $\psi_1 = \operatorname{Re}\psi$, $\psi_2 = \operatorname{Im}\psi$. *Если* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, *то для любого* $p \in [1, \infty]$

$$L^{\psi}L_p(\mathbb{T})_+ = L_p^{\psi}(\mathbb{T})_+.$$

При $p = \infty$

$$L^{\psi}L_{\infty}(\mathbb{T})_+ \subset C^{\psi}(\mathbb{T})_+,$$

где $C^{\psi}(\mathbb{T})_+ = L^{\psi}(\mathbb{T})_+ \cap C(\mathbb{T})$.

Доказательство. Понятно, что достаточно доказать включения

$$L^{\psi}L_p(\mathbb{T})_+ \subset L_p(\mathbb{T})_+ \tag{7}$$

и

$$L^{\psi}L_{\infty}(\mathbb{T})_+ \subset C(\mathbb{T})_+.$$

Для этого заметим, что если $f \in L^{\psi}L_p(\mathbb{T})_+$, то $f = \mathcal{J}^{\psi}g$, где $g = f^{\psi} \in L_p(\mathbb{T})_+$, причем

$$S[f] = \sum_{k=0}^{\infty} \hat{f}(k)e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \hat{g}(k)e^{ikt}. \tag{8}$$

Поскольку $\psi_j = \{\psi_{j,k}\}_{k=1}^{\infty} \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2$, то $\psi_{j,k} \le \psi_{j,1}$ и для каждого $\nu \in N$

$$\sum_{k=2^{\nu}}^{2^{\nu+1}-1} \left|\psi_{j,k} - \psi_{j,k+1}\right| = \psi_{j,2^{\nu}} - \psi_{j,2^{\nu+1}} \le 2\psi_{j,1}, \quad j = 1, 2.$$

Следовательно, последовательность ψ удовлетворяет условиям теоремы Марцинкевича [6], в силу которой заключаем, что если ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \hat{g}(k)e^{ikt}$$

является рядом Фурье функции из $L_p(\mathbb{T})_+$, $p \in (1, \infty)$, то такими же будут ряды в (8), т. е. включение (7) имеет место для $p \in (1, \infty)$.

При условиях, которым удовлетворяет последовательность ψ, ряды

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\psi_{j,k}\cos kt = \sum_{k\in Z\setminus\{0\}}\psi_{j,|k|}e^{ikt}, \quad j = 1, 2,$$

являются рядами Фурье суммируемых функций χ_j. Поэтому если производная f^{ψ} принадлежит $L_1(\mathbb{T})_+$ $(L_\infty(\mathbb{T})_+)$ и имеет ряд Фурье

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\hat f(k)}{\psi_k}e^{ikt},$$

то свертка $f^{\psi} * \chi$, в которой $\chi = \chi_1 + i\chi_2$, является суммируемой (непрерывной) и

$$S[f^{\psi} * \chi] = \sum_{k=1}^{\infty}\hat f(k)e^{ikt}.$$

Отсюда сразу же следует справедливость соотношения (7) и в случае, когда $p = 1$ и $p = \infty$.

Переходя к распространению понятий ψ-интеграла и ψ-производной для функций, заданных на спрямляемых жордановых кривых, полагаем

$$L_p^{\psi}(\Gamma,\Phi')_+ = \{f\in L_p(\Gamma,\Phi')_+ : f\circ\Psi\in L_p^{\psi}(\mathbb{T})_+\}, \quad 1\le p\le\infty.$$

Определение 1. *Пусть* $f\in L_p(\Gamma,\Phi')_+$, $1\le p\le\infty$. *Функция* $g\in L_1^{\psi}(\Gamma,\Phi')$, *для которой почти всюду на* $\mathbb{T}$ *выполняется равенство* $(g\circ\Psi)(w) = \mathcal{J}^{\psi}(f\circ\Psi)(w)$, *называется* ψ*-интегралом функции* f *и обозначается через* $g = \mathcal{J}^{\psi}f$.

Определение 2. *Пусть* $f\in L_p^{\psi}(\Gamma,\Phi')_+$, $1\le p\le\infty$. *Функция* $h\in L_1(\Gamma,\Phi')$, *для которой почти всюду на* $\mathbb{T}$ *выполняется равенство* $\mathcal{J}^{\psi}(h\circ\Psi)(w) = (f\circ\Psi)(w)$, *называется* ψ*-производной функции* f *и обозначается через* f^{ψ}.

Классы интегралов типа Коши определим следующим образом:

$$\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+ = \mathcal{K}(L_p^{\psi}(\Gamma,\Phi')_+) = \{\mathcal{K}f(z) : z\in\Omega,\ f\in L_p^{\psi}(\Gamma,\Phi')_+\},$$

$$C\mathcal{K}^{\psi}(\Omega)_+ = \mathcal{K}_1^{\psi}(\Omega)_+\cap C\mathcal{K}(\Omega)_+.$$

Заметим, что согласно предложению 3 справедливы включения $\mathcal{K}_p^{\psi}(\mathbb{D})_+\subset H_p$ и $C\mathcal{K}^{\psi}(\mathbb{D})_+\subset A(\overline{\mathbb{D}})$. Поэтому в случае, когда $\Omega = \mathbb{D}$, таким образом осуществляется разбиение пространства Харди и пространства $A(\overline{\mathbb{D}})$ на классы $H_p^{\psi} \overset{\mathrm{df}}{=} \mathcal{K}_p^{\psi}(\mathbb{D})_+$ и $A^{\psi}(\overline{\mathbb{D}}) \overset{\mathrm{df}}{=} C\mathcal{K}^{\psi}(\mathbb{D})_+$ соответственно.

Рассмотрим конкретный пример.

Пусть

$$\psi_0 = 1, \qquad \psi_k = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k+r+1)}, \qquad r > 0, \quad k = \overline{1,\infty},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. Тогда множества H_p^{ψ} и $A^{\psi}(\overline{\mathbb{D}})$ являются множествами функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$, для которых дробные производные в смысле Римана – Лиувилля

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=[r]}^{\infty} \frac{\Gamma(k+r+1)}{\Gamma(k+1)} f_k z^k$$

принадлежат H_p и $A(\overline{\mathbb{D}})$ соответственно. Здесь $[r]$ — целая часть числа r.

Если $f = \mathcal{K}\varphi$, то согласно определению полагаем

$$f(z\langle e^{it}\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta\langle e^{it}\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

$$\mathcal{I}^{\psi} f(z\langle e^{it}\rangle) = \mathcal{K}(\mathcal{I}^{\psi}\varphi \circ \zeta\langle e^{it}\rangle)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{I}^{\psi}\varphi(\zeta\langle e^{it}\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

$$f^{\psi}(z\langle e^{it}\rangle) = \mathcal{K}(\varphi^{\psi} \circ \zeta\langle e^{it}\rangle)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^{\psi}(\zeta\langle e^{it}\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

где

$$\zeta\langle e^{it}\rangle = \Psi(\Phi(\zeta)e^{it}), \qquad \zeta \in \Gamma, \quad t \in R.$$

Докажем следующее утверждение о представлении функций из множеств $\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)$ с помощью сверток.

Предложение 5. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, $f \in \mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ $(f = \mathcal{K}\varphi)$, $1 \le p \le \infty$, *и кривая* Γ *такова, что* $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. *Тогда в каждой точке* $z \in \Omega$ *имеет место равенство*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} D_{\psi}(t) f^{\psi}(z\langle e^{it}\rangle)\, dt = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_0^{2\pi} D_{\psi}(t) \int_{\Gamma} \frac{\varphi^{\psi}(\zeta\langle e^{it}\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta\, dt, \tag{9}$$

где

$$D_{\psi}(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \psi_k \cos kt = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (\psi_{1,k} + i\psi_{2,k}) \cos kt.$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что при $\psi_j \in \mathfrak{M}$, $j = 1, 2$, функция D_{ψ} суммируема.

Поскольку $\varphi \in L_p^{\psi}(\Gamma, \Phi')_+$, то $\varphi = \mathcal{I}^{\psi} g$, причем почти всюду на Γ $g = \varphi^{\psi} \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$. Это позволяет рассмотреть для произвольной фиксированной точки $z \in \Omega$ функцию

$$f^{\psi}(z\langle\cdot\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi^{\psi}(\zeta\langle\cdot\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

определенную на окружности $\mathbb{T}$.

Производя в интеграле замену $\zeta = \Psi(e^{i\theta})$, получаем

$$f^{\psi}(z\langle e^{it}\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\varphi^{\psi} \circ \Psi)(e^{i(\theta+t)}) \frac{\Psi'(e^{i\theta})}{\Psi(e^{i\theta}) - z}\, de^{i\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} (\varphi^{\psi} \circ \Psi)(e^{i(\theta+t)}) K(e^{i\theta}; z)\, de^{i\theta}.$$

Таким образом, с учетом (2) функция $f^{\psi}(z\langle e^{it}\rangle)$, как свертка функций из $L_p(\mathbb{T})$ и $L_q(\mathbb{T})$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, является непрерывной и разлагается в ряд Фурье

$$S[f^{\psi}(z\langle\cdot\rangle)] = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\psi_k}\widehat{(\varphi\circ\Psi)}(k)F_k(z)e^{ikt}. \tag{10}$$

Поэтому на основании равенства Парсеваля имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} D_{\psi}(t)f^{\psi}(z\langle e^{it}\rangle)\,dt \sim \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{(\varphi\circ\Psi)}(k)F_k(z).$$

Но для каждого $z\in\Omega$

$$f(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{(\varphi\circ\Psi)}(k)F_k(z).$$

Отсюда следует справедливость равенства (9).

Предложение 5 позволяет рассматривать элементы множества $\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ в каждой фиксированной точке $z\in\Omega$ как значение в точке $x=0$ свертки $(h(z\langle e^{i\cdot}\rangle) * D_{\psi})(x)$ 2π-периодических функций $h(z\langle e^{i\cdot}\rangle$ с ядрами D_{ψ}.

Развивая эту идею, докажем следующее утверждение.

Предложение 6. *Пусть* $\psi=\psi_1+i\psi_2$, $\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{M}$, $f\in\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$, $1\le p\le\infty$, *и кривая* Γ *такова, что* $\Psi'\in H_q(\mathbb{D}_{\infty})$, $q^{-1}+p^{-1}=1$. *Тогда для каждой фиксированной точки* $z\in\Omega$ *функция* $f(z\langle\cdot\rangle)$ *принадлежит* $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$, *причем* $(f(z\langle\cdot\rangle))^{\psi}=f^{\psi}(z\langle\cdot\rangle)$.

Доказательство. Пусть $f=\mathcal{K}\varphi$, где $\varphi\in L_p^{\psi}(\Gamma,\Phi')_+$. Тогда $f(z\langle\cdot\rangle)$, как свертка функций из $L_p(\mathbb{T})$ и $L_q(\mathbb{T})$, $p^{-1}+q^{-1}=1$, является непрерывной и согласно (2) разлагается в ряд Фурье

$$S[f(z\langle\cdot\rangle)] = \sum_{k=0}^{\infty}\widehat{(\varphi\circ\Psi)}(k)F_k(z)e^{ikt},$$

т. е. $f(z\langle\cdot\rangle)\in C(\mathbb{T})_+$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{\psi_k}\widehat{(\varphi\circ\Psi)}(k)F_k(z)e^{ikt}.$$

Согласно (10) и теореме единственности рядов Фурье этот ряд является рядом Фурье некоторой функции $h\in C(\mathbb{T})_+$, а именно ψ-производной функции $f(z\langle\cdot\rangle)$, т. е $(f(z\langle\cdot\rangle))^{\psi}=h(\cdot)$. Следовательно, $f(z\langle\cdot\rangle)\in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ и, к тому же, в силу равенства (10) $(f(z\langle\cdot\rangle))^{\psi}=f^{\psi}(z\langle\cdot\rangle)$.

Предложение 6 позволяет редуцировать задачу о приближении функций из классов $\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ к задаче о приближении функций из классов $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$, поскольку если $f\in\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ и $P(z)$ — некоторый алгебраический многочлен, то для каждого $z\in\Omega$ справедливо неравенство

$$|f(z)-P(z)| \le \max_t |f(z\langle e^{it}\rangle)-P(z\langle e^{it}\rangle)|,$$

где $f(z\langle\cdot\rangle) \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ и $P(z\langle\cdot\rangle)$ — тригонометрический многочлен.

С учетом этого замечания целесообразно более детально рассмотреть приближения функций из классов $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$, чему и посвящен следующий пункт.

3. Приближения функций из классов $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$. Пусть $\Lambda = \left\| \lambda_k^{(n)} \right\|$, $n = \overline{0, \infty}$, $k = \overline{0, n}$, — произвольная бесконечная треугольная матрица чисел. Каждой функции $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ на основании ее разложения в ряд Фурье поставим в соответствие многочлен $U_n(f; e^{it}; \Lambda)$ вида

$$U_n(f; e^{it}; \Lambda) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k^{(n)} \hat{f}(k) e^{ikt}.$$

Ближайшей нашей целью будет получение интегрального представления для величины

$$\delta_n(f; e^{it}; \Lambda) \stackrel{\mathrm{df}}{=} f(e^{it}) - U_n(f; e^{it}; \Lambda)$$

на классах $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$. Для этого будем пользоваться следующим утверждением.

Лемма 1. *Пусть γ_1 и γ_2 — функции, непрерывные на полуоси R^+ такие, что их преобразования Фурье*

$$\hat{\gamma}_{1+}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma_1(v) \cos vt \, dv, \qquad \hat{\gamma}_{2-}(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \gamma_2(v) \sin vt \, dv$$

суммируемы на оси R. Тогда для любой функции $\varphi \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ свертка

$$(\varphi * \hat{\gamma})(e^{ix}) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^{i(x+t)}) \hat{\gamma}(t) \, dt, \tag{11}$$

в которой

$$\hat{\gamma}(t) = \hat{\gamma}_{1+}(t) - i \hat{\gamma}_{2-}(t),$$

является непрерывной функцией на окружности $\mathbb{T}$ и

$$S[\varphi * \hat{\gamma}] = \sum_{k=0}^{\infty} (\gamma_1(k) + \gamma_2(k)) \hat{\varphi}(k) e^{ikt}. \tag{12}$$

Доказательство. Непрерывность свертки $\varphi * \hat{\gamma}$ является следствием того факта, что $\varphi \in C(\mathbb{T})_+$ и $\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\gamma}(t)| \, dt < \infty$. Поэтому остается показать справедливость (12). Для этого вычислим коэффициенты Фурье функции (11). Поскольку произведение $\varphi(e^{i(x+t)}) \hat{\gamma}(t)$ суммируемо в полосе $\{(x, t) : x \in [0, 2\pi], t \in \mathbb{R}\}$, то по теореме Фубини имеем

$$\widehat{\varphi * \hat{\gamma}}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(e^{i(x+t)}) \hat{\gamma}(t) \, dt \right) e^{-ikx} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(t) \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i(x+t)}) e^{-ikx} \, dx \, dt = \hat{\varphi}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(t) e^{ikt} \, dt.$$

Далее, используя известные формулы о преобразованиях Фурье, получаем

$$\widehat{\varphi * \hat{\gamma}}(k) = \hat{\varphi}(k) \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\gamma}(t) e^{ikt}\, dt =$$

$$= \hat{\varphi}(k) \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{\gamma}_{1+}(t) - i\hat{\gamma}_{2-}(t))(\cos kt + i \sin kt)\, dt = (\gamma_1(k) + \gamma_2(k))\hat{\varphi}(k),$$

откуда и следует равенство (12).

В дальнейшем последовательность $\psi = \{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$, определяющую класс $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$, будем считать значениями некоторой непрерывной на полуоси R^+ комплекснозначной функции $\psi(\cdot)$ при натуральном аргументе. Учитывая это, докажем следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть* $\Lambda = \left\|\lambda_k^{(n)}\right\|$, $n = \overline{0, \infty}$, $k = \overline{0, n}$, *— фиксированная бесконечная треугольная числовая матрица,* $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty}$ $(\psi_0 = 1,\ |\psi_k| > 0)$ *— произвольная последовательность комплексных чисел,* $\lambda(\cdot)$ *и* $\psi(\cdot) = \psi_1(\cdot) + i\psi_2(\cdot)$ *— функции, непрерывные на полуоси* R^+, *такие, что* $\lambda_n(k) = \lambda_k^{(n)}$ *и* $\psi(k) = \psi_k$. *Тогда*:

1) *если косинус-преобразование Фурье функции* $\tau(v) = (1 - \lambda_n(v))\psi(v)$ *суммируемо на оси* R $(\hat{\tau}_+ \in L(\mathbb{R}))$, *то для любой функции* $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ *в каждой точке окружности* $\mathbb{T}$

$$\delta_n(f; e^{it}; \Lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta) f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\, d\theta, \tag{13}$$

где

$$\hat{\tau}_n(\theta) = \hat{\tau}_+(\theta) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \tau(v) \cos v\theta\, dv;$$

2) *если косинус- и синус-преобразование Фурье функции* $\tau(v) = (1 - \lambda_n(v))\psi(v)$ *суммируемы на оси* R $(\hat{\tau}_+, \hat{\tau}_- \in L(\mathbb{R}))$, *то для любой функции* $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ *в каждой точке окружности* $\mathbb{T}$ *выполняется равенство* (13) *и в случае, когда*

$$\hat{\tau}_n(\theta) = \frac{1}{2}[\hat{\tau}_+(\theta) - i\hat{\tau}_-(\theta)] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} \tau(v) e^{-iv\theta}\, dv.$$

Доказательство. Если положить в лемме 1 $\gamma_1(v) = \tau(v)$, $\gamma_2(v) = 0$, то согласно (12) по теореме единственности рядов Фурье получим равенство (13). Если же положить $\gamma_1(v) = \gamma_2(v) = \tau(v)/2$, то получим (13) и в оставшемся случае.

Использовав теорему 1, найдем интегральные представления для величин

$$r_n(f; e^{it}) \stackrel{\text{df}}{=} f(e^{it}) - \sum_{k=0}^{n-1} \hat{f}(k) e^{ikt} = f(e^{it}) - S_{n-1}(f; e^{it})$$

— уклонений сумм Фурье на классах $C^{\psi}(\mathbb{T})_+$.

С этой целью положим

$$\lambda_n(v) = \begin{cases} 1, & v \in [0; n-1]; \\ n-v, & v \in [n-1; n]; \\ 0, & v \in [n; \infty). \end{cases} \tag{14}$$

Пусть, как обычно, $\mathfrak{M}$ — множество непрерывных на полуоси R^+ положительных функций ψ, выпуклых вниз и убывающих к нулю на бесконечности и $\mathfrak{M}'$ — подмножество функций $\psi(\cdot)$ из $\mathfrak{M}$, удовлетворяющих условию

$$\int_1^\infty \frac{\psi(t)}{t}\,dt < \infty.$$

Если $\psi \in \mathfrak{M}$, то согласно лемме 5.1 из [7, с. 64] косинус-преобразование Фурье функции $\tau(n-1;\cdot) = (1-\lambda_n(\cdot))\psi(\cdot)$ суммируемо на оси R $(\tau(n-1;\cdot)_+ \in \in L(\mathbb{R}))$, а если $\psi \in \mathfrak{M}'$, то согласно лемме 4.1 из [7, с. 58] и синус-преобразование Фурье также суммируемо на $\mathbb{R}$ $(\tau(n-1;\cdot)_- \in L(R))$. Учитывая эти факты, получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть* $n \in N$, $\lambda_n(v)$ *определяется формулой* (14). *Тогда*:

1) *если* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *и* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, *то для любой функции* $f \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ *в каждой точке окружности* $\mathbb{T}$

$$r_n(f; e^{it}) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta) f^\psi(e^{i(t+\theta)})\,d\theta, \tag{15}$$

где

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty (1-\lambda_n(v))(\psi_1(v)+i\psi_2(v))\cos vt\,dv; \tag{16}$$

2) *если* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *и* $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, *то для любой функции* $f \in \in C^\psi(\mathbb{T})_+$ *в каждой точке окружности* $\mathbb{T}$ *выполняется равенство* (15) *и в случае, когда*

$$\hat{\tau}_n(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty (1-\lambda_n(v))(\psi_1(v)+i\psi_2(v))e^{-ivt}\,dv. \tag{17}$$

Приведем некоторые следствия из этой теоремы.

Пусть $\mathcal{T}_n$ — множество тригонометрических полиномов вида

$$T_n(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Прежде всего заметим, что справедливо такое следствие.

Следствие 1. *Для любого полинома* $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ *в каждой точке* e^{it} *окружности* $\mathbb{T}$ *выполняется равенство*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta) T_{n-1}(e^{i(t+\theta)})\,d\theta = 0. \tag{18}$$

Пусть выполняются условия теоремы 2. Положим

$$\delta(f; e^{it}) = f(e^{it}) - T_{n-1}(e^{it}), \quad T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}.$$

Тогда равенство (15) с учетом (18) можно преобразовать в следующее:

$$r_n(f; e^{it}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{\tau}_n(\theta)\delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)})d\theta. \tag{19}$$

Поскольку согласно (14)

$$(1-\lambda_n(v))\psi(v) = \begin{cases} 0, & v \in [0; n-1]; \\ (v-n+1)\psi(n), & v \in [n-1; n]; \\ \psi(v), & v \in [n, \infty), \end{cases}$$

то формулу (16) можно записать таким образом:

$$\hat{\tau}_n(\theta) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty} (1-\lambda_n(v))\psi(v)\cos v\theta\, dv =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\int\limits_{n-1}^{n} (v-n+1)\cos v\theta\, dv + \frac{1}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty} \psi(v)\cos v\theta\, dv =$$

$$= \frac{\psi(n)}{\pi}\left(\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^2}\sin n\theta + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\cos n\theta\right) + \frac{1}{\pi}\int\limits_{n}^{\infty} \psi(v)\cos v\theta\, dv. \tag{20}$$

Аналогично, формулу (17) можно записать в виде

$$\hat{\tau}_n(\theta) = \frac{\psi(n)}{2\pi}e^{-in\theta}\left(\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} + i\frac{\theta-\sin\theta}{\theta^2}\right) + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{n}^{\infty} \psi(v)e^{-iv\theta}\, dv. \tag{21}$$

Рассмотрим функцию

$$F(t) = \delta(f^{\psi}; e^{it}).$$

В силу условий теоремы 2 функция $F(\cdot)$ является 2π-периодической и непрерывной на оси R. Поэтому согласно лемме 1.1 из [7, с. 43] справедливы равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)\sin nt\,\frac{t-\sin t}{t^2}\,dt = 0, \tag{22}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)\cos nt\,\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)\cos nt\,dt = \frac{\pi}{2}\frac{\hat{f}(n)}{\psi(n)}, \tag{23}$$

а также равенства

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-int}\,\frac{t-\sin t}{t^2}\,dt = 0, \tag{24}$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(t)e^{-int}\,\frac{1-\cos t}{t^2}\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F(t)e^{-int}\,dt = \pi\frac{\hat{f}(n)}{\psi(n)}. \tag{25}$$

Подставляя формулы (20) и (21) в (19) и учитывая равенства (22) – (25), получаем такое следствие.

Следствие 2. *Пусть $n \in N$, $\Delta(f^{\psi}; e^{it})$ обозначает либо $f^{\psi}(e^{it})$, либо $\delta(f^{\psi}; e^{it})$. Тогда:*

1) *если $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, где $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}$, то для любой функции $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$*

$$r_n(f; e^{it}) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}(\psi; n; \theta)\, d\theta + \frac{1}{2} \hat{f}(n) e^{int}, \tag{26}$$

где

$$\mathcal{J}(\psi; n; \theta) = \mathcal{J}_2(\psi; n; \theta)_0 = \frac{1}{\pi} \int\limits_{n}^{\infty} \psi(v) \cos v\theta\, dv; \tag{27}$$

2) *если $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, где $\psi_1 \in \mathfrak{M}$, $\psi_2 \in \mathfrak{M}'$, то для любой функции $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$ выполняется равенство* (26) *и в том случае, когда*

$$\mathcal{J}(\psi; n; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{n}^{\infty} \psi(v) e^{-iv\theta}\, dv. \tag{28}$$

Важной характеристикой функций из множества $\mathfrak{M}$ является величина

$$\mu(t) = \mu(\psi; t) = \frac{t}{\eta(t) - t},$$

в которой

$$\eta(t) = \eta(\psi; t) = \psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right).$$

С помощью этих двух величин из множества $\mathfrak{M}$ выделим два подмножества: $\mathfrak{M}_0$ и F. Ко множеству $\mathfrak{M}_0$ относятся все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых $0 < \mu(\psi; t) \le \text{const}$, а ко множеству F — все функции $\psi \in \mathfrak{M}$, для которых

$$\eta'(t) = \eta'(\psi; t) = \frac{\psi'(t)}{2\psi'(\eta(t))} \le \text{const}, \quad t \ge 1,$$

$$\eta'(t) \overset{\text{df}}{=} \eta'(t+0).$$

Отметим, что естественными представителями множества $\mathfrak{M}_0$ являются функции $\psi(t) = t^{-r}$ $(r > 0)$, $\psi(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$ $(r > 0)$, $\psi(t) = t^{-r} \ln^{\varepsilon}(t + e)$ $(r \ge 0)$ и др.. Множеству F принадлежат функции $\psi(t) = \exp(-\alpha t^{r})$ при любых $\alpha > 0$ и $r > 0$.

На основании теоремы 2 доказывается следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. Тогда для любой функции $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ и любого полинома $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ в каждой точке окружности $\mathbb{T}$ при $n \in N$*

$$r_n(f; e^{it}) = -\psi(n) S_{n-1}(f^{\psi} - T_{n-1}; e^{it}) + O(1)|\psi(n)| \, \|f^{\psi} - T_{n-1}\|_{C(\mathbb{T})}, \tag{29}$$

где $O(1)$ — величина, равномерно ограниченная по n и f.

Эта теорема устанавливает связь между поведением остатка ряда Фурье функции f и частной суммы ряда Фурье ее ψ-производной. В частности, из нее вытекает такое следствие.

Следствие 3. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *и* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда для любой функции* $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ *и любого полинома* $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ *при* $n \in N$ *выполняется равенство*

$$\| r_n(f;\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = |\psi(n)| \| S_{n-1}(f^{\psi} - T_{n-1};\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} +$$

$$+ O(1)|\psi(n)| \|f^{\psi}(\cdot) - T_{n-1}(\cdot)\|_{C(\mathbb{T})}.$$

Отсюда, в частности, следует, что для того чтобы выполнялось равенство

$$\| r_n(f;\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = O(1)|\psi(n)| E_n(f^{\psi}), \quad n \in N,$$

где

$$E_n(\varphi) = \inf_{T_{n-1}} \|\varphi - T_{n-1}\|_{C(\mathbb{T})},$$

необходимо и достаточно, чтобы

$$\| S_{n-1}(f^{\psi};\cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = O(1).$$

В случае, когда $\psi = \Gamma(k+1)/\Gamma(k+r+1)$, теорема 3 и следствие 3 доказаны С. Б. Стечкиным [4].

Доказательство теоремы 3. Рассмотрим равенство

$$r_n(f;e^{it}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}_2(\psi;n;\theta)_0 \, d\theta + \frac{1}{2}\hat{f}(n)e^{int},$$

в котором $\mathcal{J}_2(\psi;n;\theta)_0$ определяется формулой (27).

Поскольку

$$\mathcal{J}_2(\psi;n;\theta)_0 = \frac{1}{\pi}\int_n^{\infty} \psi(v)\cos v\theta \, dv = -\frac{\psi(n)}{\pi}\frac{\sin n\theta}{\theta} - \frac{1}{\pi\theta}\int_n^{\infty} \psi'(v)\sin v\theta \, dv =$$

$$= -\frac{\psi(n)}{\pi}\frac{\sin n\theta}{\theta} - \frac{1}{\pi}\mathcal{J}_3(\psi;n;\theta)_0,$$

то

$$r_n(f;e^{it}) = -\psi(n)\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)})\frac{\sin n\theta}{\theta}\, d\theta -$$

$$- \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}_3(\psi;n;\theta)_0 \, d\theta + \frac{1}{2}\hat{f}(n)e^{int}. \tag{30}$$

Для сокращения записей доказательство проведем для случая, когда $\Delta(f^{\psi}; e^{it}) = f^{\psi}(e^{it})$, поскольку в оставшемся случае оно аналогично.

Пусть $0 < \rho < 1$. Рассмотрим тождество

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(\rho e^{i(t+\theta)})\frac{\sin n\theta}{\theta}\, d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(k)}\rho^k e^{i(t+\theta)}\frac{\sin n\theta}{\theta}\, d\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(k)}\rho^k e^{ikt}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta}\frac{\sin n\theta}{\theta}\, d\theta,$$

в котором

$$\bar{f}^{\psi}(\rho e^{it}) \stackrel{\text{df}}{=} \mathcal{K} f^{\psi}(\rho e^{it}).$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ik\theta} \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta = \int_{-\infty}^{\infty} \cos k\theta \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta + i \int_{-\infty}^{\infty} \sin k\theta \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cos k\theta \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta = \begin{cases} \pi, & k = \overline{0, n-1}; \\ \frac{\pi}{2}, & k = n; \\ 0, & k = \overline{n+1, \infty}, \end{cases}$$

и, кроме того, в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$\lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\hat{f}(k)}{\psi_k} \rho^k e^{ikt} = f^{\psi}(e^{it}),$$

то

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)}) \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(\rho e^{i(t+\theta)}) \frac{\sin n\theta}{\theta} d\theta =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\hat{f}(k)}{\psi(k)} e^{ikt} + \frac{\hat{f}(n)}{2\psi(n)} e^{int} = S_{n-1}(f^{\psi}; e^{it}) + \frac{\hat{f}(n)}{2\psi(n)} e^{int}.$$

Подставляя полученное выражение в (30), получаем

$$r_n(f; e^{it}) = -\psi(n) S_{n-1}(f^{\psi}; e^{it}) - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)}) \mathcal{I}_3(\psi; n; \theta)_0 \, d\theta.$$

Но согласно соотношению (10.9) из [7, с. 133] для $\psi_j \in \mathfrak{M}_0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \mathcal{I}_3(\psi_j; n; \theta)_0 \right| d\theta \le O(1) \psi_j(n), \quad j = 1, 2,$$

поэтому в каждой точке окружности $\mathbb{T}$

$$| r_n(f; e^{it}) + \psi(n) S_{n-1}(f^{\psi}; e^{it}) | \le O(1) | \psi(n) |,$$

что и доказывает теорему 3.

Отправляясь от следствия 2, докажем следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *и* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}'$, $a = \{a(n)\}_0^{\infty}$ — *произвольная последовательность действительных чисел, для которой* $n\,a(n) \ge a_0 > 0$ $\forall n \in N$. *Тогда если* $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$, *то в каждой точке окружности* $\mathbb{T}$ *выполняется равенство*

$$r_n(f; e^{it}) = \psi(n) \frac{1}{2\pi i} \int_{|\theta| \ge a(n)} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta + b_n^{\psi}(a; f; e^{it}), \qquad (31)$$

где

$$\left\| b_n^{\psi}(a; f; \cdot) \right\|_{C(\mathbb{T})} \le O(1) \max_{j=1,2} \left(\psi_j(n) + Q_n^{\psi_j}(a) \right). \tag{31'}$$

Кроме того, для любого полинома $T_{n-1} \in \mathcal{T}_{n-1}$ *в каждой точке окружности* $\mathbb{T}$

$$r_n(f; e^{it}) = \psi(n) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\theta| \ge a(n)} \delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta + \bar{b}_n^{\psi}(a; f; e^{it}), \tag{32}$$

где $\delta(f^{\psi}; e^{i\tau}) = f^{\psi}(e^{i\tau}) - T_{n-1}(e^{i\tau})$ *и*

$$\left\| \bar{b}_n^{\psi}(a; f; \cdot) \right\|_{C(\mathbb{T})} \le O(1) \max_{j=1,2} \left(\psi_j(n) + Q_n^{\psi_j}(a) \right) \left\| \delta(f^{\psi}; \cdot) \right\|_{C(\mathbb{T})}. \tag{32'}$$

Величины $Q_n^{\psi_j}(a)$ *определяются равенствами*

$$Q_n^{\psi_j}(a) = \int\limits_{1/a(n)}^{\infty} \frac{\psi_j(\theta + n)}{\theta} d\theta + \int\limits_{a(n)}^{\infty} \frac{\psi_j(n) - \psi_j(n + 1/\theta)}{\theta} d\theta, \quad j = 1, 2. \tag{31''}$$

Доказательство. Эта лемма является аналогом леммы 3 и следствия 2 из [8] и ее доказательство получается повторением соответствующих мест из рассуждений, с помощью которых были установлены лемма 3 и следствие 2 из [8] с их модификацией для комплексного случая.

Прежде всего, в силу равенства (26), в котором величина $\mathcal{J}(\psi; n; \theta)$ выбрана согласно (28), имеем

$$r_n(f; e^{it}) = \left(\int\limits_{|\theta| \ge a(n)} + \int\limits_{|\theta| \le a(n)} \right) \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}(\psi; n; \theta) d\theta + \frac{1}{2} \hat{f}(n) e^{int}.$$

Поскольку

$$\mathcal{J}(\psi; n; \theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_n^{\infty} \psi(v) e^{-iv\theta} dv = \frac{\psi(n)}{2\pi i} \frac{e^{-in\theta}}{\theta} + \frac{1}{2\pi i\theta} \int\limits_n^{\infty} \psi'(v) e^{-iv\theta} dv \overset{\text{df}}{=}$$

$$\overset{\text{df}}{=} \frac{\psi(n)}{2\pi i} \frac{e^{-in\theta}}{\theta} + \frac{1}{2\pi i} \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta),$$

то

$$r_n(f; e^{it}) = \psi(n) \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\theta| \ge a(n)} \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta +$$

$$+ B_n(a; f^{\psi}; e^{it}) + P_n(a; f^{\psi}; e^{it}) + \frac{1}{2} \hat{f}(n) e^{int},$$

где

$$B_n(a; f^{\psi}; e^{it}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\theta| \ge a(n)} \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}_3(\psi; n; \theta) d\theta, \tag{33}$$

$$P_n(a; f^{\psi}; e^{it}) = \int\limits_{|\theta| \le a(n)} \Delta(f^{\psi}; e^{i(t+\theta)}) \mathcal{J}(\psi; n; \theta) d\theta. \tag{34}$$

Поскольку

$$\mathcal{I}_3(\psi; n; \theta) = \frac{1}{\theta}\int_n^\infty \psi'(v)\cos v\theta\, dv - \frac{i}{\theta}\int_n^\infty \psi'(v)\sin v\theta\, dv$$

и

$$\mathcal{I}(\psi; n; \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_n^\infty \psi(v)\cos v\theta\, dv - \frac{i}{2\pi}\int_n^\infty \psi(v)\sin v\theta\, dv,$$

то, используя обозначения

$$\mathcal{I}_3(\psi; n; \theta)_\beta = \frac{1}{\theta}\int_n^\infty \psi'(v)\cos\left(v\theta - \beta\frac{\pi}{2}\right)dv, \quad \beta \in R,$$

$$\mathcal{I}_2(\psi; n; \theta)_\beta = \int_n^\infty \psi(v)\cos\left(v\theta - \beta\frac{\pi}{2}\right)dv, \quad \beta \in R,$$

имеем

$$\mathcal{I}_3(\psi; n; \theta) = \mathcal{I}_3(\psi_1; n; \theta)_0 - i\mathcal{I}_3(\psi_1; n; \theta)_1 + \mathcal{I}_3(\psi_2; n; \theta)_1 + i\mathcal{I}_3(\psi_2; n; \theta)_0$$

и

$$\mathcal{I}(\psi; n; \theta) = \frac{1}{2\pi}\left[\mathcal{I}_2(\psi_1; n; \theta)_0 - i\mathcal{I}_2(\psi_1; n; \theta)_1 + \mathcal{I}_2(\psi_2; n; \theta)_1 + i\mathcal{I}_2(\psi_2; n; \theta)_0\right].$$

Подставляя эти выражения в (33) и (34), видим, что доказательство первой части леммы фактически сводится к получению оценок для величин, аналогичных величинам $R_n^\psi(a; f; x)$ и $P_n^\psi(a; f; x)$ из соотношения (6.13) [7, с. 99]. Производя необходимые оценивания, получаем соотношения (31) и (31′). Соотношения (32) и (32′) получаются аналогично.

4. Асимптотические равенства. Для получения асимптотически точных равенств для величин

$$\| r_n(f; \cdot)\|_{C(\mathbb{T})} = \| f - S_{n-1}(f)\|_{C(\mathbb{T})}$$

на классах $C^\psi(\mathbb{T})_+$ нам понадобится следующий результат Е. Ландау [9] о норме частных сумм рядов Тейлора функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$.

Теорема А. *Пусть B — множество функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$ таких, что $\|f\|_{H_\infty} = \sup_{z\in\mathbb{D}}|f(z)| \le 1$. Тогда для каждого $n \in N \cup \{0\}$*

$$\sup_{f\in B}\max_{z\in\overline{\mathbb{D}}}|S_n(f; z)| = G_n,$$

где

$$G_0 = 1, \quad G_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\right]^2, \quad n = \overline{1, \infty}.$$

При этом

$$G_n = \frac{1}{\pi}\ln(n+1) + O(1), \quad n \in \mathbb{N}.$$

На основании теоремы 3 и леммы 2 находятся асимптотические равенства для величин

$$R_n(C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+) = \sup_{f \in C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+} \| f(\cdot) - S_{n-1}(f;\cdot) \|_{C(\mathbb{T})},$$

где

$$C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+ = \{ f \in C^\Psi(\mathbb{T})_+ : \|f^\Psi\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \le 1 \}.$$

В случае, когда $\psi_i \in \mathfrak{M}_0$, $i = 1, 2$, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *и* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда при* $n \to \infty$ *выполняется асимптотическое равенство*

$$R_n(C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+) = \frac{1}{\pi} |\psi(n)| \ln n + O(1) |\psi(n)|, \tag{35}$$

где $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n.

В случае, когда $\psi(t) = \Gamma(t+1)/\Gamma(t+r+1)$, теорема 4 доказана С. Б. Стечкиным [4].

Доказательство. Согласно следствию 3

$$R_n(C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+) = |\psi(n)| \sup_{f \in C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+} \left\| S_{n-1}(f^\Psi;\cdot) \right\|_{C(\mathbb{T})} + O(1) |\psi(n)|. \tag{36}$$

Если $f \in C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+$, то $f^\Psi(\rho e^{it}) = \mathcal{K} f^\Psi(\rho e^{it}) \in B$, причем почти всюду на окружности $\mathbb{T}$

$$\lim_{\rho \to 1-0} f^\Psi(\rho e^{it}) = f^\Psi(e^{it}).$$

С другой стороны, для любой функции $g \in B$ в классе $C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+$ найдется функция f, для которой f^Ψ почти всюду на окружности $\mathbb{T}$ совпадает с угловыми граничными значениями функции g.

Поэтому согласно теореме A при $n \to \infty$

$$\sup_{f \in C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+} \left\| S_{n-1}(f^\Psi;\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})} = \sup_{f \in B} \max_{z \in \overline{\mathbb{D}}} |S_{n-1}(f;z)| = G_n = \frac{1}{\pi} \ln n + O(1). \tag{37}$$

Объединяя (36), (37), получаем соотношение (35).

Отправляясь от леммы 2, получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и, кроме того, выполняются условия*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1;t) - t}{\eta(\psi_2;t) - t} \le K_2 < \infty \quad \forall t \ge 1. \tag{38}$$

Тогда справедливо асимптотическое равенство

$$R_n(C_\infty^\Psi(\mathbb{T})_+) = \frac{1}{\pi} |\psi(n)| \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) |\psi(n)|, \tag{39}$$

в котором $\eta(n)$ *есть либо* $\eta(\psi_1;t) = \psi_1^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_1(n)\right)$, *либо* $\eta(\psi_2;t) = \psi_2^{-1}\left(\frac{1}{2}\psi_2(n)\right)$ *и* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n.

Доказательство. В [10, с. 112] доказано включение $F \subset \mathfrak{M}'$. Кроме того, там же показано, что

$$\mu(\psi;t) \ge K_1 > 0 \quad \forall t \ge 1,$$

а в [11, с. 134] показано, что

$$Q_n^{\psi}(\gamma) \le K_2|\psi(n)| \quad \forall\psi\in F,$$

$$\gamma = \gamma(n) = (\eta(\psi;n)-n)^{-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где $Q_n^{\psi}(\gamma)$ — величина, определяемая равенством (31″), а K_1, K_2 — некоторые постоянные.

Поэтому, выбирая величину $a(n)$ в (31) согласно равенству $a(n) = \gamma(n)$, с учетом (38) имеем

$$\left\| b_n^{\psi}(a; f; \cdot)\right\|_{C(\mathbb{T})} \le O(1)|\psi(n)|.$$

Таким образом, из (31) находим

$$R_n(C_\infty^{\psi}(\mathbb{T})_+) = |\psi(n)|\frac{1}{2\pi}\sup_{f\in C_\infty^{\psi}(\mathbb{T})_+}\max_{t\in[0,2\pi]}\left|\int\limits_{|\theta|\ge a(n)} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\frac{e^{-in\theta}}{\theta}\,d\theta\right| +$$
$$+ O(1)|\psi(n)|. \tag{40}$$

Заметим, что для любой функции $f\in C_\infty^{\psi}(\mathbb{T})_+$ найдется функция $g\in$ $\in L_\infty(\mathbb{T})_+$ такая, что $\|g\|_{L_\infty(\mathbb{T})}\le 1$ и $f^{\psi}=g$ почти всюду на $\mathbb{T}$. Поэтому, учитывая еще и инвариантность множества $L_\infty(\mathbb{T})$ относительно сдвига аргумента, заключаем, что

$$\sup_{f\in C_\infty^{\psi}(\mathbb{T})_+}\max_{t\in[0,2\pi]}\left|\int\limits_{|\theta|\ge a(n)} f^{\psi}(e^{i(t+\theta)})\frac{e^{-in\theta}}{\theta}\,d\theta\right| =$$
$$= \sup_{\varphi\in L_\infty(\mathbb{T})_+:\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})}\le 1}\left|\int\limits_{|\theta|\ge a(n)}\varphi(e^{i\theta})\frac{e^{-in\theta}}{\theta}\,d\theta\right| = \mathcal{M}_n.$$

При любом фиксированном $p\in(0,1]$ справедлива оценка (см. соотношение (7.11) из [7]):

$$\left|\int\limits_{p\pi}^{\infty}\varphi(e^{i\theta})\frac{e^{-in\theta}}{\theta}\,d\theta\right| = O(1)\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \quad n\to\infty.$$

Поэтому

$$\mathcal{M}_n = \sup_{\varphi\in L_\infty(\mathbb{T})_+:\|\varphi\|_{L_\infty(\mathbb{T})}\le 1}\left|\int\limits_{a(n)\le|\theta|\le p\pi}\varphi(e^{i\theta})\frac{e^{-in\theta}}{\theta}\,d\theta\right| + O(1) \tag{41}$$

и, следовательно,

$$\mathcal{M}_n \le 2\ln^+\frac{p\pi}{a(n)} + O(1) = 2\ln^+(\eta(n)-n) + O(1), \quad n\to\infty. \tag{42}$$

Отсюда с учетом соотношений (40) и (41) следует нужная оценка сверху величины $R_n(C_\infty^{\psi}(\mathbb{T})_+)$ и для получения равенства (38) остается показать, что в (42) строгого неравенства быть не может.

Для этого рассмотрим последовательность функций

$$L_n(z) = z^n\frac{l_n(1/z)}{l_n(z)}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

где

$$l_n(z) = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^k.$$

Поскольку коэффициенты многочлена $l_n(z)$ положительны и, кроме того,

$$1 > \frac{1}{2} > \ldots > \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

то согласно теореме Какейя (см., например, [12]) все нули $l_n(z)$ лежат вне окружности $\mathbb{T}$. Следовательно, функции $L_n(z)$, $n \in N$, аналитичны в замкнутом круге $\overline{\mathbb{D}}$ и

$$|L_n(\zeta)| = \left|\frac{l_n(\bar{\zeta})}{l_n(\zeta)}\right| = 1 \quad \forall \zeta \in \mathbb{T},$$

т. е. $L_n \in B$.

Поэтому для величины $\mathcal{M}_n$ с учетом (41) имеем оценку снизу

$$\mathcal{M}_n \geq \left| \int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} L_n(e^{i\theta}) \frac{e^{-in\theta}}{\theta} d\theta \right| + O(1) =$$

$$= \left| \int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{d\theta}{\theta} \right| + O(1), \quad n \to \infty, \tag{43}$$

для любого положительного числа $p \leq 1/2$.

Для дальнейшего заменим интеграл в (43) интегралом

$$\int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{ie^{i\theta} d\theta}{e^{i\theta} - 1}.$$

Погрешность при этом равна величине

$$q_n = \left| \int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \left(\frac{1}{\theta} - i \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} - 1} \right) d\theta \right|.$$

Для ее оценки воспользуемся тождествами

$$\frac{1}{e^{i\theta} - 1} = \frac{2}{e^{i2\theta} - 1} + \frac{1}{e^{i\theta} + 1} = \frac{e^{-i\theta}}{i \sin\theta} + \frac{1}{e^{i\theta} + 1}.$$

Учитывая, что $\theta - \sin\theta \leq \theta \sin\theta$ $(\theta \in [0, \pi/2])$, получаем

$$q_n \leq \left| \int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\sin\theta} \right) d\theta \right| + \left| \int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1} d\theta \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{|\theta - \sin\theta|}{\theta \sin\theta} d\theta + \int\limits_{a(n) \leq |\theta| \leq p\pi} \frac{d\theta}{|e^{i\theta} + 1|} \leq$$

$$\leq 2(p\pi - a(n)) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) < 2\pi \quad \forall n \in N.$$

Следовательно, согласно (43) имеем

$$\mathcal{M}_n \geq \left| \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{e^{i\theta}\,d\theta}{e^{i\theta}-1} \right| + O(1) \geq \left| \operatorname{Re} \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{e^{i\theta}\,d\theta}{1-e^{i\theta}} \right| + O(1). \tag{44}$$

Но поскольку

$$\frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} = \left| \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{e^{i\theta}}{1-e^{i\theta}} \right| e^{i\phi(\theta)} = \frac{e^{i\phi(\theta)}}{\left|1-e^{i\theta}\right|},$$

где

$$\phi(\theta) = \theta - 2\arg l_n(e^{i\theta}) - \arg(1-e^{i\theta}),$$

то

$$\operatorname{Re} \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq p\pi} \frac{l_n(e^{-i\theta})}{l_n(e^{i\theta})} \frac{e^{i\theta}\,d\theta}{1-e^{i\theta}} = \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq p\pi} \operatorname{Re} \frac{e^{i\phi(\theta)}}{\left|1-e^{i\theta}\right|}\,d\theta = \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq p\pi} \frac{\cos\phi(\theta)}{\left|1-e^{i\theta}\right|}\,d\theta. \tag{45}$$

Следовательно, соотношение (44) принимает вид

$$\mathcal{M}_n \geq \left| \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq p\pi} \frac{\cos\phi(\theta)}{\left|1-e^{i\theta}\right|}\,d\theta \right| + O(1).$$

Пусть теперь s — произвольное фиксированное число, $s > 1$. Поскольку

$$\left| \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq sa(n)} \frac{\cos\phi(\theta)}{\left|1-e^{i\theta}\right|}\,d\theta \right| \leq \int\limits_{a(n)\leq|\theta|\leq sa(n)} \frac{d\theta}{\left|1-e^{i\theta}\right|} \leq 2\,\frac{a(n)(s-1)}{\left|1-e^{ia(n)}\right|} =$$

$$= \frac{a(n)(s-1)}{\sin a(n)/2} = O(1), \quad n \to \infty,$$

то согласно (44) и (45)

$$\mathcal{M}_n \geq \left| \int\limits_{sa(n)\leq|\theta|\leq p\pi} \frac{\cos\phi(\theta)}{\left|1-e^{i\theta}\right|}\,d\theta \right| + O(1). \tag{46}$$

Далее, получим оценки значений функции $\cos\phi(\theta)$ на промежутках $\gamma_n = \{\theta : sa(n) \leq |\theta| \leq p\pi\}$, $n \in N$. Используя разложения

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} z^k, \quad z \in \mathbb{D},$$

и

$$\frac{1}{1-z\sin^2 x} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sin^{2k} x, \quad z \in \mathbb{D}, \quad x \in R,$$

а также формулу Валлиса для коэффициентов первого разложения

$$\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\,dx, \tag{47}$$

получаем равенство

$$\frac{1}{\sqrt{1-z}} - l_n(z) = z^{n+1} \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sin^{2(n+1)} x}{1-z\sin^2 x}\,dx \quad \forall z \in \mathbb{D}.$$

Отсюда, если $\theta \in \gamma_n$, то, учитывая (47) и соотношение (см., например, [13, с. 280])

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^{2k} x\,dx = \frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1)), \quad n \to \infty,$$

имеем

$$\left|\frac{1}{\sqrt{1-e^{i\theta}}} - l_n(e^{i\theta})\right| = \left|\lim_{\rho\to 1-}\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2(n+1)}x}{1-\rho e^{i\theta}\sin^2 x}\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^{2(n+1)}x}{1-e^{i\theta}\sin^2 x}\,dx\right| \le \frac{1}{\min\limits_{x\in[0,\pi/2]}\left|1-e^{i\theta}\sin^2 x\right|}\,\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n}x\,dx =$$

$$= \frac{1}{\min\limits_{x\in[0,\pi/2]}\left|1-e^{i\theta}\sin^2 x\right|}\,\frac{1}{\sqrt{n\pi}}(1+o(1)), \quad n\to\infty. \tag{48}$$

Легко видеть, что

$$\min_{x\in[0,\pi/2]}\left|1-e^{i\theta}\sin^2 x\right| = \sin\theta \quad \forall\,\theta\in[0,\pi/2].$$

Поэтому из (48) с учетом того, что $na(n) > a_0 > 0$, $n\in N$, и $\sin x \ge 2x/\pi \quad \forall x \in \in [0,\pi/2]$, следует неравенство

$$\left|1-l_n(e^{i\theta})\sqrt{1-e^{i\theta}}\right| \le \frac{\sqrt{|1-e^{i\theta}|}}{|\sin\theta|}\,\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1)) =$$

$$= \frac{\sqrt{2|\sin\theta/2|}}{|\sin\theta|}\,\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1)) = \frac{1}{\cos\theta/2}\,\frac{1}{\sqrt{2|\sin\theta/2|}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1)) \le$$

$$\le \frac{1}{\sqrt{|\sin\theta/2|}}\,\frac{1}{\sqrt{\pi n}}(1+o(1)) \le \frac{1}{\sqrt{|\theta| n}}(1+o(1)) \le \frac{1}{\sqrt{sna(n)}}(1+o(1)) <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{sa_0}}(1+o(1)) \qquad \forall\,\theta\in\gamma_n, \quad n\to\infty. \tag{49}$$

Пусть $s > 4/a_0$. Тогда из (49) заключаем, что существует номер $n_0 \in N$ такой, что для всех $n \ge n_0$ будет выполняться неравенство

$$\left|1-l_n(e^{i\theta})\sqrt{1-e^{i\theta}}\right| < \frac{2}{\sqrt{sa_0}} < 1 \quad \forall\,\theta\in\gamma_n.$$

Отсюда, пользуясь простыми геометрическими соображениями, получаем, что для $\theta\in\gamma_n$ при $n\to\infty$

$$\left|\arg\left(l_n(e^{i\theta})\sqrt{1-e^{i\theta}}\right)\right| = \left|\arg l_n(e^{i\theta}) + \frac{1}{2}\arg(1-e^{i\theta})\right| < \arcsin\frac{2}{\sqrt{sa_0}}. \tag{50}$$

Выберем число p согласно равенству

$$p = p(s) = \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{2}{\sqrt{sa_0}}.$$

Теперь, учитывая (50), имеем оценку

$$|\phi(\theta)| = |\theta - 2\arg l_n(e^{i\theta}) - \arg(1-e^{i\theta})| \le$$

$$\leq |\theta| + 2\left|\arg l_n(e^{i\theta}) + \frac{1}{2}\arg(1-e^{i\theta})\right| \leq$$

$$\leq p\pi + 2\arcsin\frac{2}{\sqrt{sa_0}} = 3\arcsin\frac{2}{\sqrt{sa_0}} \quad \forall\,\theta\in\gamma_n, \quad n\to\infty.$$

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и подберем s столь большим, чтобы $\cos\phi(\theta) > 1-\varepsilon$ для всех $\theta\in\gamma_n$ при достаточно больших n.

Тогда, продолжая оценку (46), получаем

$$\mathcal{M}_n \geq (1-\varepsilon)\int\limits_{sa(n)\leq|\theta|\leq p\pi}\frac{d\theta}{\left|1-e^{i\theta}\right|} + O(1) =$$

$$= (1-\varepsilon)\int\limits_{sa(n)}^{p\pi}\frac{d\theta}{\sin\theta/2} + O(1) = 2(1-\varepsilon)\int\limits_{sa(n)}^{p\pi}\frac{d\theta}{\theta} + O(1) =$$

$$= 2(1-\varepsilon)\ln\frac{p\pi}{sa(n)} + O(1) = 2(1-\varepsilon)\ln(\eta(n)-n) + O(1), \quad n\to\infty. \tag{51}$$

Таким образом, в силу произвольности ε, учитывая (42), (46) и (51), имеем

$$\mathcal{M}_n = 2\ln^+(\eta(n)-n) + O(1), \quad n\to\infty.$$

Подставляя найденное асимптотическое значение величины $\mathcal{M}_n$ в (40), получим соотношение (39).

5. Неравенства Лебега – Ландау. Пусть $f\in A(\overline{\mathbb{D}})$, $n\in N$, тогда согласно теореме А

$$\|f-S_{n-1}(f)\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} \leq \|f-P_{n-1}^*\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} + \|S_{n-1}(f-P_{n-1}^*)\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} \leq$$

$$\leq (G_{n-1}+1)E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})} = \left(\frac{1}{\pi}\ln n + O(1)\right)E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})},$$

где P_{n-1}^* — алгебраический многочлен степени $\leq n-1$ наилучшего приближения функции f и

$$E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})} = \inf_{P_{n-1}}\|f-P_{n-1}\|_{A(\overline{\mathbb{D}})}$$

— величина наилучшего равномерного приближения функции f посредством алгебраических многочленов степени $\leq n-1$.

Таким образом, для каждой функции $f\in A(\overline{\mathbb{D}})$ при любом $n\in N$

$$\|f-S_{n-1}(f)\|_{A(\overline{\mathbb{D}})} \leq \left(\frac{1}{\pi}\ln n + O(1)\right)E_n(f)_{A(\overline{\mathbb{D}})}.$$

Последнее неравенство, являющееся аналогом известного неравенства Лебега, уместно назвать неравенством Лебега – Ландау для функций, аналитических в круге $\mathbb{D}$.

В этом пункте получим аналоги неравенства Лебега – Ландау для классов $C^\psi(\mathbb{T})_+$.

Теорема 6. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ *и* $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда для каждой функции* $f\in C^\psi(\mathbb{T})_+$ *при любом* $n\in N$ *справедливо неравенство*

$$\|r_n(f)\|_{C(\mathbb{T})} \leq \left(\frac{1}{\pi}\ln n + O(1)\right)|\psi(n)|E_n(f^\psi)_{C(\mathbb{T})}, \tag{52}$$

в котором $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Для любой функции $f \in C^{\psi}(\mathbb{T})_+$ *при каждом* $n \in N$ *найдется функция* $F(e^{it}) = F(e^{it}; n)$ *такая, что* $E_n(F^{\psi})_{C(\mathbb{T})} = E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})}$, *и для нее соотношение* (52) *является равенством.*

Замечание 2. Утверждение теоремы 6 остается в силе и в случае, когда $\psi \equiv 1$.

Доказательство. Пусть $P^*_{n-1}(e^{it})$ — многочлен степени $n-1$ наилучшего приближения функции $f^{\psi}(e^{it})$. Тогда согласно следствию 3

$$\| r_n(f) \|_{C(\mathbb{T})} = |\psi(n)| \left\| S_{n-1}(f^{\psi} - P^*_{n-1}) \right\|_{C(\mathbb{T})} + O(1) |\psi(n)| E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})}. \quad (53)$$

Поскольку функция $f^{\psi} - P^*_{n-1}$ является некасательным граничным значением ограниченной аналитической в круге $\mathbb{D}$ функции $f^{\psi}(z) - P^*_{n-1}(z)$, то согласно теореме А

$$\left\| S_{n-1}(f^{\psi} - P^*_{n-1}) \right\|_{C(\mathbb{T})} \le \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})}. \quad (54)$$

С учетом этой оценки из соотношения (53) получаем неравенство (52).

Для доказательства второй части теоремы построим функцию $F(e^{it})$ такую, что $F^{\psi}(e^{it}) = E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})} L_n(e^{it})$.

При доказательстве теоремы 5 было показано, что функция $L_n(z)$ аналитична в $\overline{\mathbb{D}}$ и, кроме того, в круге $\mathbb{D}$ имеет ровно n нулей. Следовательно, такие же свойства имеет и функция $F^{\psi}(z) = \mathcal{K} F^{\psi}(z)$, $z = \rho e^{it}$, $0 \le \rho < 1$. Учитывая еще, что $\| F^{\psi} \|_{A(\overline{\mathbb{D}})} = E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})} \| L_n \|_{A(\overline{\mathbb{D}})} = E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})} |L_n(e^{it})| = E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})} = |F^{\psi}(e^{it})|$, $0 \le t \le 2\pi$, видим, что функция $F^{\psi}(z)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 4′ из [14], согласно которой $E_n(F^{\psi})_{C(\mathbb{T})} = E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})}$.

Покажем, что для функции $F(e^{it}) = \mathcal{I}^{\psi} F^{\psi}(e^{it}) = E_n(f^{\psi})_{C(\mathbb{T})} \mathcal{I}^{\psi} L_n(e^{it})$ соотношение (52) является равенством. Для этого достаточно показать, что

$$|\mathcal{I}^{\psi} L_n(1) - S_{n-1}(\mathcal{I}^{\psi} L_n)(1)| \ge |\psi(n)| \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right). \quad (55)$$

Согласно соотношению (29) для любого полинома $P_{n-1}(e^{it})$ степени $\le n-1$

$$|\psi(n)| |S_{n-1}(L_n - P_{n-1}; 1)| \le |\mathcal{I}^{\psi} L_n(1) - S_{n-1}(\mathcal{I}^{\psi} L_n)(1)| + \\ + O(1) |\psi(n)| \| L_n - P_{n-1} \|_{C(\mathbb{T})}.$$

Выбирая в качестве полинома P_{n-1} полином наилучшего приближения функции L_n и учитывая то, что согласно теореме 4′ из [14] этот полином тождественно равен нулю, получаем

$$|\mathcal{I}^{\psi} L_n(1) - S_{n-1}(\mathcal{I}^{\psi} L_n)(1)| \ge |\psi(n)| |S_{n-1}(L_n; 1)| - O(1) |\psi(n)|, \quad n \in N.$$

Отсюда согласно теореме А следует соотношение (55). Теорема доказана.

Подобно тому, как на основании леммы 2 была получена оценка (42), получаем следующее утверждение.

Теорема 7. *Пусть* $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и, кроме того, выполняются условия* (38). *Тогда для каждой функции* $f \in C^{\Psi}(\mathbb{T})_+$ *при любом* $n \in N$ *справедливо неравенство*

$$\| r_n(f) \|_{C(\mathbb{T})} \leq \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^{\Psi})_{C(\mathbb{T})}, \tag{56}$$

в котором $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n, *а* $\eta(n)$ *имеет тот же смысл, что и в теореме* 5.

6. Приближения интегралов типа Коши. Перейдем к рассмотрению вопроса о приближении интегралов типа Коши из классов $\mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ во внутренних точках области Ω в случае, когда производная Ψ' отображающей функции принадлежит пространству $H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $q^{-1} + p^{-1} = 1$. Отправной точкой при этом будет предложение 6, согласно которому для любой функции $f \in \mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ ($f = \mathcal{K}\varphi$) в случае, когда $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, при каждом фиксированном $z \in \Omega$ интеграл типа Коши

$$f(z\langle e^{it}\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\zeta\langle e^{it}\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi(\Psi(\Phi(\zeta) e^{it}))}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

как функция точки e^{it}, заданная на окружности $\mathbb{T}$, принадлежит классу $C^{\Psi}(\mathbb{T})_+$ и $(f(z\langle\cdot\rangle))^{\Psi} = f^{\Psi}(z\langle\cdot\rangle)$.

С учетом этого предложения из неравенств Лебега – Ландау (52) и (56) непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 8. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда для каждой функции* $f \in \mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ *при любых* $n \in N$, $z \in \Omega$ *справедливо неравенство*

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z) \right| \leq \| f(z\langle\cdot\rangle) - S_{n-1}(f(z\langle e^{it}\rangle); \cdot) \|_{C(\mathbb{T})} \leq$$

$$\leq \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^{\Psi}(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})}, \tag{57}$$

в котором

$$E_n(f^{\Psi}(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} = \inf_{T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\varphi^{\Psi}(\zeta\langle\cdot\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta - T_{n-1,z}(\cdot) \right\|_{C(\mathbb{T})},$$

$\mathcal{T}_{n-1}$ — *множество функций* $T_{n-1,z}$ *вида*

$$T_{n-1,z}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) e^{ikt},$$

$O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Теорема 9. *Пусть* $1 \leq p \leq \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и, кроме того, выполняются условия* (38). *Тогда для каждой функции* $f \in \mathcal{K}_p^{\psi}(\Omega)_+$ *при любых* $n \in N$, $z \in \Omega$ *справедливо неравенство*

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z) \right| \le \left(\frac{1}{\pi} \ln^+(\eta(n)-n) + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(f^\Psi(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})}, \quad (58)$$

где η *есть либо* $\eta_1(\psi_1; n)$, *либо* $\eta_2(\psi_2; n)$ *и* $O(1)$ *— величина, равномерно ограниченная по* n.

В неравенствах (57), (58) фигурируют величины $E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})}$, которые зависят от точки z. Поэтому для получения равномерных оценок в замкнутой области $\overline{\Omega}$ целесообразно более детально исследовать эти величины.

Прежде всего заметим, что в интеграле типа Коши

$$\mathcal{K}\varphi(z\langle e^{it}\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta\langle e^{it}\rangle)}{\zeta - z}\, d\zeta$$

в случае, когда $\varphi \in L_p(\Gamma)_+$, можно существенно изменить ядро Коши, не изменяя значений самого интеграла. Именно, имеет место следующая лемма [1].

Лемма 3. *Пусть* $\Psi' \in H_1(\mathbb{D}_\infty)$, G_Ω *— множество функций* $g(\zeta, z)$, $\zeta \in \Gamma$, $z \in \Omega$, *удовлетворяющих условию: при каждом* $z \in \Omega$ *функция* $g_z(\cdot) = g(\Psi(\cdot), z)\Psi'(\cdot)$ *принадлежит* $L_1(\mathbb{T})_+$. *Тогда для любых функций* $f \in L_1(\Gamma, \Phi')_+$ *и* $g \in g_\Omega$ *в каждой точке* $z \in \Omega$ *почти всюду по переменной* w *на окружности* $\mathbb{T}$ *справедливо равенство*

$$\mathcal{K}f(z\langle w\rangle) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\zeta\langle w\rangle) \left(\frac{1}{\zeta - z} + g(\zeta, z) \right) d\zeta. \quad (59)$$

Если выполнены условия леммы 3, то для любой функции $h \in \mathcal{K}_1(\Omega)_+$ ($h = \mathcal{K}\varphi$) в каждой точке $z \in \Omega$ имеем

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \le \inf_{T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \varphi(\zeta\langle\cdot\rangle) Q(\zeta, z)\, d\zeta - T_{n-1,z}(\cdot) \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \quad (60)$$

где

$$Q(\zeta, z) = \frac{1}{\zeta - z} + g(\zeta, z), \qquad g \in G_\Omega.$$

Пусть $\tau_{n-1}(e^{it})$ — произвольный тригонометрический полином порядка $n - 1$ вида

$$\tau_{n-1}(e^{it}) = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \hat{\tau}_k e^{ikt} \quad (61)$$

и

$$T_{n-1,z}(e^{it}) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(z) e^{ikt}. \quad (62)$$

Тогда при каждом фиксированном $z \in \Omega$

$$\int_\mathbb{T} (\varphi \circ \Psi)(we^{it}) T_{n-1,z}(\overline{w}) \frac{dw}{w} +$$

$$+ \int_\mathbb{T} \tau_{n-1}(we^{it}) (Q(\Psi(w), z)\Psi'(w)w - T_{n-1,z}(\overline{w})) \frac{dw}{w} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z) e^{ikt} \in \mathcal{T}_{n-1}, \quad (63)$$

где $a_k(z)$ — некоторые функции от z и $\overline{w}$ — число, сопряженное к w.

Поэтому вследствие (60), (63) для каждого фиксированного $z \in \Omega$ справедлива оценка

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \le$$
$$\le \inf \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} ((\varphi \circ \Psi)(w \cdot) - \tau_{n-1}(w \cdot)) (Q(\Psi(w), z)\Psi'(w)w - T_{n-1,z}(\overline{w})) \frac{dw}{w} \right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \tag{64}$$

где нижняя грань берется по всем тригонометрическим полиномам τ_{n-1}, всем функциям $g \in G_\Omega$ и $T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}$.

Положим

$$G_{\Omega,p} = \{g \in G_\Omega : |g_z(\cdot)|^p \in L_1(\mathbb{T})\}, \quad p > 0,$$

и предположим, что $h \in \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ $(h = \mathcal{K}\varphi)$, $1 \le p \le \infty$, и $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Тогда, применяя неравенство Гельдера к правой части (64), при каждом $z \in \Omega$ находим

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \le \inf_{\tau_{n-1}} \|\varphi \circ \Psi - \tau_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{T})} \times$$
$$\times \inf_{g_z \in G^0_{\Omega,q},\, T_{n-1,z} \in \mathcal{T}_{n-1}} \left\| K^*_z(\cdot) + g_z(\cdot) - T_{n-1,z}(\bar{\cdot}) \right\|_{L_q(\mathbb{T})}, \tag{65}$$

где

$$G^0_{\Omega,q} = \left\{ g \in G_{\Omega,p} : \int_{\mathbb{T}} g_z(w)\,dw = 0 \ \ \forall z \in \Omega \right\}$$

и

$$K^*_z(w) = K_z(w)w = \frac{\Psi'(w)w}{\Psi(w) - z}.$$

Отсюда, полагая

$$E_m(\varphi)_p = \inf_{\tau_k} \left\| (\varphi \circ \Psi)(\cdot) - \sum_{|k| \le m-1} \tau_k e_k(\cdot) \right\|_{L_p(\mathbb{T})},$$

где τ_k — произвольные числа, $e_k(w) = w^k$ (таким образом, $E_m(\varphi)_p$ — величина наилучшего приближения функции $\varphi \circ \Psi$ тригонометрическими полиномами порядка $m-1$ в пространстве $L_p(\mathbb{T})$), и

$$\mathcal{E}_{-m,\infty}(\Omega, z)_q = \inf_{g \in G^0_{\Omega,q},\, T_{m-1,z} \in \mathcal{T}_{m-1}} \left\| K^*_z(\cdot) + g_z(\cdot) - T_{m-1,z}(\bar{\cdot}) \right\|_{L_q(\mathbb{T})},$$

получаем следующее предложение.

Теорема 10. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Тогда для любой функции* $h \in \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ $(h = \mathcal{K}\varphi)$ *при каждом* $n \in N$ *в каждой точке* $z \in \Omega$ *справедлива оценка*

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \le E_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q.$$

В лемме 3 показано, что в интеграле типа Коши $\mathcal{K}\varphi(z\langle e^{it}\rangle)$ в случае, когда $\varphi \in L_p(\Gamma)$, можно изменять ядро Коши так, что значение самого интеграла не изменится. Но в этом интеграле можно изменять и функцию φ, не изменяя самого интеграла. Именно, справедлива следующая лемма [1].

Лемма 4. *Пусть* Ψ', $g \in H_1(\mathbb{D}_\infty)$, $g(\infty) = 0$. *Тогда для любой функции* $\varphi \in L_1(\Gamma, \Phi')_+$ *в каждой точке* $z \in \Omega$ *почти всюду по* w *на окружности* $\mathbb{T}$

$$\mathcal{K}\varphi(z\langle w\rangle) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\varphi(\zeta\langle w\rangle) + (g\circ\Phi)(\zeta\langle w\rangle))\frac{d\zeta}{\zeta - z}. \tag{66}$$

Если выполнены условия леммы 4, то в силу (66) для любой функции $h \in \mathcal{K}_1(\Omega)_+$ $(h = \mathcal{K}\varphi)$ при каждом $z \in \Omega$ имеем

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \le \inf_{T_{n-1,z}\in\mathcal{T}_{n-1}} \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\varphi(\zeta\langle\cdot\rangle) + (g\circ\Phi)(\zeta\langle\cdot\rangle))\frac{d\zeta}{\zeta - z} - T_{n-1,z}(\cdot)\right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \tag{67}$$

где $g \in H_1^0(\mathbb{D}_\infty) = \{g \in H_1(\mathbb{D}_\infty) : g(\infty) = 0\}$.

Пусть теперь $\tau_{n-1}(e^{it})$ и $T_{n-1,z}(e^{it})$ — функции вида (61) и (62) соответственно. Тогда вследствие того, что $(\varphi\circ\Psi)(\cdot\,\omega) \in L_p(\mathbb{T})_+$ для каждого $\omega \in \mathbb{T}$, имеем

$$\int_\mathbb{T} ((\varphi\circ\Psi)(we^{it}) + g(we^{it}))T_{n-1,z}(\overline{w})\frac{dw}{w} + \int_\mathbb{T} \tau_{n-1}(we^{it})(K_z^*(w) - T_{n-1,z}(\overline{w}))\frac{dw}{w} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} a_k(z)e^{ikt} \in \mathcal{T}_{n-1}, \tag{68}$$

где $a_k(z)$ — некоторые функции переменного z.

Таким образом, вследствие соотношений (67), (68) для каждого фиксированного $z \in \Omega$ выполняется

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \le$$

$$\le \inf \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_\mathbb{T} ((\varphi\circ\Psi)(w\cdot) + g(w\cdot) - \tau_{n-1}(w\cdot))(K_z^*(w) - T_{n-1,z}(\overline{w}))\frac{dw}{w}\right\|_{L_\infty(\mathbb{T})}, \tag{69}$$

где нижняя грань берется по всем функциям $g \in H_1^0(\mathbb{D}_\infty)$ и по всем полиномам τ_{n-1} и $T_{n-1,z}$ вида (61) и (62) соответственно.

Если теперь предположить, что $\varphi \in L_p(\Gamma, \Phi')_+$ при некотором $p \ge 1$ и $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, а к правой части (69) применить неравенство Гельдера, то будем иметь аналог неравенства (65):

$$E_n(h(z\langle\cdot\rangle))_{C(\mathbb{T})} \le \inf_{g\in H_p^0(\mathbb{D}_\infty),\,\tau_{n-1}} \|\varphi\circ\Psi + g - \tau_{n-1}\|_{L_p(\mathbb{T})} \times$$

$$\times \inf_{T_{n-1,z}\in\mathcal{T}_{n-1,z}} \|K_z^*(\cdot) - T_{n-1,z}(\bar{\cdot})\|_{L_q(\mathbb{T})}.$$

Полагая

$$e_m(\varphi)_p = \inf_{g\in H_p^0(\mathbb{D}_\infty),\,\tau_{m-1}} \|\varphi\circ\Psi + g - \tau_{m-1}\|_{L_p(\mathbb{T})}$$

и

$$\mathcal{E}_{|m|,\infty}(\Omega, z)_q = \inf_{T_{m-1,z} \in \mathcal{T}_{m-1,z}} \left\| K_z^*(\cdot) - T_{m-1,z}(\bar{\cdot}) \right\|_{L_q(\mathbb{T})},$$

получаем следующий аналог теоремы 10.

Теорема 11. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. *Тогда для любой функции* $h \in \mathcal{K}_p(\Omega)_+$ $(h = \mathcal{K}\varphi)$ *при каждом* $n \in N$ *в каждой точке* $z \in \in \Omega$ *справедлива оценка*

$$E_n(h(z(\cdot)))_{C(\mathbb{T})} \le e_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{|n|,\infty}(\Omega, z)_q.$$

Объединяя теоремы 8 – 11, получаем следующие утверждения.

Теорема 12. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$ и $\psi_1, \psi_2 \in \mathfrak{M}_0$. *Тогда для каждой функции* $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ $(f = \mathcal{K}\varphi)$ *при любых* $n \in N$, $z \in \Omega$ *выполняются неравенства*

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z) \right| \le \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q \tag{70}$$

и

$$\left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z) \right| \le \left(\frac{1}{\pi} \ln n + O(1) \right) |\psi(n)| e_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{|n|,\infty}(\Omega, z)_q,$$

где $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Теорема 13. *Пусть* $1 \le p \le \infty$, $\Psi' \in H_q(\mathbb{D}_\infty)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, $\psi = \psi_1 + i\psi_2$, $\psi_1, \psi_2 \in F$ *и, кроме того, выполняются условия* (38). *Тогда для каждой функции* $f \in \mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ $(f = \mathcal{K}\varphi)$ *при любых* $n \in N$, $z \in \Omega$ *справедливы неравенства*

$$\begin{aligned} \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z) \right| &\le \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) \right) |\psi(n)| E_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q, \\ \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n-1} f_k F_k(z) \right| &\le \left(\frac{1}{\pi} \ln^+ (\eta(n) - n) + O(1) \right) |\psi(n)| e_n(\varphi)_p \mathcal{E}_{|n|,\infty}(\Omega, z)_q, \end{aligned} \tag{71}$$

где $\eta(n)$ *есть либо* $\eta_1(\psi_1; n)$, *либо* $\eta_2(\psi_2; n)$ *и* $O(1)$ — *величина, равномерно ограниченная по* n.

Неравенства (70), (71) доказаны в предположении, что $z \in \Omega$, т. е. они справедливы на любом замкнутом подмножестве K точек области Ω. Но любая функция f из класса $\mathcal{K}_p^\psi(\Omega)_+$ всегда аналитична на K. Поэтому появление логарифмического множителя в (70), (71), по-видимому, не вызвано существом вопроса. Более того, естественно ожидать, что величина $\mathcal{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q$ при $n \to \to \infty$ стремится к нулю со скоростью убывания членов геометрической прогрессии.

В подтверждение изложенного приведем следующее предложение.

Предложение 7. *Пусть* $1 \le q \le \infty$. *Тогда для любой точки* $z \in \mathbb{D}$ *при каждом* $n \in N$

$$\mathcal{E}_{-n,\infty}(\mathbb{D}, z)_q = \frac{|z|^n}{(1 - |z|^2)^{1/p}}, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1. \tag{72}$$

Для доказательства (72) применим соотношение двойственности, сформулированное в следующем виде.

Предложение 8. *Пусть X — банахово пространство, Y — замкнутое подпространство в X; X^* и Y^* — соответственно их сопряженные пространства; $Y^{\perp} = \{\phi \in X^* : \phi(y) = 0 \quad \forall y \in Y\}$ — замкнутое подпространство в X^* (аннулятор пространства Y). Тогда*:

а) *фактор-пространство $X^*/Y^{\perp}$ изометрично изоморфно пространству Y^* и для каждого фиксированного функционала $\phi \in X^*$ справедливо равенство*

$$\min_{\psi \in Y^{\perp}} \|\phi + \psi\| = \sup_{y \in Y, \|y\| \le 1} |\phi(y)|; \tag{73}$$

б) *пространство $(X/Y)^*$ изометрично изоморфно пространству $Y^{\perp}$ и для каждого фиксированного $x \in X$*

$$\inf_{y \in Y} \|x + y\| = \max_{\psi \in Y^{\perp}, \|\psi\| \le 1} |\psi(x)|. \tag{74}$$

Докажем сначала равенство (72) при $q \in (1, \infty]$. В этом случае в качестве пространства X выберем банахово пространство $L_p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$, а в качестве Y — подпространство $H_{p,n}(\mathbb{T})$, состоящее из функций f, определенных на окружности $\mathbb{T}$, которые являются угловыми граничными значениями функций из H_p, для которых $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0$.

Сопряженное пространство к X изометрично изоморфно пространству $L_q(\mathbb{T})$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Поэтому полагаем $X^* = L_q(\mathbb{T})$. В качестве элемента $\phi \in L_q(\mathbb{T})$ будем использовать функцию $e^{it}/(e^{it} - z)$.

Положим

$$L_{p,n}(\mathbb{T})_+ = \{g \in L_p(\mathbb{T}) : \hat{g}(k) = 0, \ k = \overline{-n, -\infty}\}, \quad 0 < p \le \infty.$$

Поскольку множество $H_{p,n}(\mathbb{T})$ состоит из функций, представимых в виде $e^{int} f(e^{it})$, $f \in H_p(\mathbb{T})$, то, как нетрудно убедиться, $Y^{\perp} = L_{q,n}(\mathbb{T})_+$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Последнее равенство понимаем в том смысле, что любая функция $g \in L_{q,n}(\mathbb{T})_+$ порождает непрерывный линейный функционал A — аннулятор подпространства $H_{p,n}(\mathbb{T})$ с помощью соотношения

$$A(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) g(e^{it})\, dt = 0.$$

В таком случае, согласно (73), при $1 < q \le \infty$ для произвольного фиксированного $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\mathscr{E}_{-n,\infty}(\mathbb{D}, z_0)_q = \min_{g \in L_{q,n}(\mathbb{T})_+} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{e^{it}}{e^{it} - z_0} + g(e^{it}) \right|^q dt \right\}^{1/q} =$$

$$= \sup_{f \in B_{p,n}(\mathbb{T})} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - z_0}\, dt \right| = |z_0|^n \sup_{f \in B_p} |f(z_0)|, \quad p^{-1} + q^{-1} = 1, \tag{75}$$

где

$$B_p = \{f \in H_p : \|f\|_{H_p} \le 1\}$$

и

$$B_{p,n} = \{f \in B_p : f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n-1)}(0) = 0\}.$$

В последнем равенстве в (75) использована формула Коши (см. теорему Ф. и М. Рисса [5, с. 394]).

Осталось показать, что при $p \in [1, \infty)$

$$\sup_{f \in B_p} |f(z_0)| = \frac{1}{(1-|z_0|^2)^{1/p}}. \tag{76}$$

Для этого рассмотрим сначала случай, когда $p = 2$.

Представляя функцию f из B_2 по формуле Коши и применяя неравенство Коши – Буняковского, для произвольного фиксированного $z_0 \in \mathbb{D}$ имеем

$$|f(z_0)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{dt}{1 - e^{-it} z_0} \right| \le \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\left|1 - e^{-it} z_0\right|^2} \right\}^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{1-|z_0|^2}}. \tag{77}$$

Легко видеть, что функция

$$f(z_0) = \sqrt{\frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar{z}_0 z)^2}},$$

где взята любая ветвь корня, принадлежит B_2 и для нее (77) превращается в равенство, что и доказывает (76) при $p = 2$.

Пусть теперь $f \in B_p$ и $p \ge 1$, $p \ne 2$. По теореме Ф. Рисса (см., например, [5, с. 389]) функцию f можно представить в виде $f = g B_f$, где B_f — функция Бляшке, построенная по нулям функции f (здесь важно учесть, что $|B(z)| \le 1$ $\forall z \in \mathbb{D}$), $g \in B_p$ и $g(z) \ne 0$ $\forall z \in \mathbb{D}$.

Поскольку $g^{p/2} \in B_2$, то согласно (77)

$$|f(z_0)|^{p/2} \le |g(z_0)|^{p/2} \le \sqrt{\frac{1}{1-|z_0|^2}},$$

причем для функции

$$f(z_0) = \left(\frac{1-|z_0|^2}{(1-\bar{z}_0 z)^2} \right)^{1/p}$$

в последнем соотношении выполняется равенство.

Объединяя (75) и (76), получаем равенство (72) для $1 < q \le \infty$.

Для доказательства (72) в случае, когда $q = 1$, воспользуемся соотношением (74), в котором полагаем $X \in L_1(\mathbb{T})$, $Y = L_{1,n}(\mathbb{T})_+$. При этом $X^* \in L_\infty(\mathbb{T})$, $Y^\perp = H_{\infty,n}(\mathbb{T})$. Поскольку любая функция f из $H_{\infty,n}(\mathbb{T})$, для которой $\|f\|_{L_\infty(\mathbb{T})} \le 1$, представима в виде $f(e^{it}) = e^{int} g(e^{it})$, где значения $g(e^{it})$ являются угловыми граничными значениями некоторой функции g из B_∞, то для произвольного фиксированного $z_0 \in \mathbb{D}$

$$\mathscr{E}_{-n,\infty}(\mathbb{D}, z_0)_1 = \inf_{g\in L_{1,n}(\mathbb{T})_+} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{e^{it}}{e^{it}-z_0} + g(e^{it})\right|dt =$$

$$= \max_{f\in B_{\infty,n}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\frac{e^{it}}{e^{it}-z_0}\,dt\right| = |z_0|^n.$$

Как показывают результаты, в случае, когда $\Omega = \mathbb{D}$, неравенства (70), (71) точны в смысле порядка и в смысле константы у главных значений правых частей для $z \in \mathbb{T}$ и $p = \infty$ (в этом случае $\sup_{z\in\mathbb{D}} \mathscr{E}(\mathbb{D}, z)_1 = 1$, а в левых частях неравенств берется существенный супремум). Из равенства (72) следует, что для любой односвязной области Ω с замкнутой жордановой спрямляемой границей при любом $q \in (1, \infty]$ выполняется равенство

$$\mathscr{E}_{-n,\infty}(\Omega, q) \overset{\mathrm{df}}{=} \sup_{z\in\Omega} \mathscr{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_q = \infty.$$

В тоже время величина $\mathscr{E}_{-n,\infty}(\Omega, 1)$ во многих случаях оказывается ограниченной.

Понятно, что для таких областей неравенства (70) и (71) при $p = 1$ будут точны по порядку и в смысле констант при всех $z \in \Gamma$ с надлежащим видоизменением левых частей.

Выясним условия, обеспечивающие ограниченность величин $\mathscr{E}_{-n,\infty}(\Omega, 1)$.

Прежде всего заметим, что множество

$$\mathcal{S}_n = \{\Omega \subsetneq \mathbb{C} : \sup_{z\in\Omega} \mathscr{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_1 < \infty\}, \quad n \in N,$$

совпадает с множеством $\mathcal{S}_1$. Поэтому полагаем $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_n$.

Таким образом, задача сводится к исследованию величины

$$\mathscr{E}_{-1,\infty}(\Omega, z)_1 = \inf_{g\in G_\Omega} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z} + g_z(e^{it})\right|dt. \tag{78}$$

При фиксированном $z \in \Omega$ любая функция $g(z, w)$ порождает функцию $g_z(w)$ из пространства H_1. Поэтому нижняя грань в (78) совпадает с нижней гранью, взятой по H_1. Применяя соотношение двойственности (см. соотношение (74)), в котором $Y = H_1$ и $Y^\perp = H_{\infty,1}$, имеем

$$\sup_{z\in\Omega} \mathscr{E}_{-n,\infty}(\Omega, z)_1 = \sup_{z\in\Omega}\sup_{f\in B_{\infty,1}}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi'(e^{it}) - z}\cdot dt\right|. \tag{79}$$

Теперь приведем следующие определения.

Определение 3. *Оператор $T = T_\Omega$, определенный на H_∞ и действующий по правилу*

$$T(f)(z) = T_\Omega(f)(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})\,\frac{\Psi'(e^{it})e^{it}}{\Psi(e^{it}) - z}\,dt,$$

называется оператором Фабера.

Как обычно, под нормой оператора T будем понимать величину

$$\|T\| = \|T_\Omega\| = \sup_{f\in B_\infty}\sup_{z\in\Omega} |T(f)(z)|. \tag{80}$$

Определение 4. *Область* $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ *называется областью Фабера, если оператор* T *ограничен, т. е.* $\|T\| < \infty$.

Множество всех областей Фабера обозначим через $\mathcal{F}$.

Сравнивая (79) и (80), убеждаемся в том, что величина $\mathscr{E}_{-1,\infty}(\Omega, z)$ ограничена тогда и только тогда, когда область Ω — фаберова. При этом справедливы неравенства

$$\mathscr{E}_{-1,\infty}(\Omega, z) \leq \|T\| \leq \mathscr{E}_{-1,\infty}(\Omega, z) + 1.$$

По поводу свойств оператора Фабера и оценок его нормы см. библиографию в [15].

1. *Степанец А. И.* Приближение интегралов типа Коши в жордановых областях // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, № 6. – С. 809 – 833.
2. *Савчук В. В.* Швидкість збіжності ряду Тейлора для деяких класів аналітичних функцій // Там же. – 1998. – **50**, № 7. – С. 1001 – 1003.
3. *Савчук В. В.* Швидкості збіжності рядів Тейлора і рядів Фабера на класах $\overline{\psi}$-інтегралів функцій комплексної змінної: Дис… канд. фіз.-мат. наук — Київ, 1998. – 125 с.
4. *Стечкин С. Б.* Оценка остатка ряда Тейлора для некоторых классов аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1953. – **17**, № 5. – С. 461 – 472.
5. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1966. – 623 с.
6. *Marcinkiewicz J.* Sur les multiplicateurs des series de Fouirer // Stud. Math. – 1939. – **8**. – P. 78 – 91.
7. *Степанец А. И.* Классификация и приближение периодических функций. – Киев: Наук. думка, 1987. – 268 с.
8. *Степанец А. И.* Скорость сходимости рядов Фурье на классах $\overline{\psi}$-интегралов // Укр. мат. журн. – 1997. – **49**, № 8. – С. 1069 – 1113.
9. *Landau E.* Darstellung und Bergrundung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie. – Berlin; New York: Springer, 1986. – 201 p.
10. *Степанец А. И.* Классы функций, заданных на действительной оси, и их приближение целыми функциями. I // Укр. мат. журн. – 1990. – **42**, № 1. – С. 102 – 112.
11. *Степанец А. И.* Классификация периодических функций и скорость сходимости их рядов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1986. – **50**, № 1. – С. 101 – 136.
12. *Dienes P.* The Taylor series. – New York: Dover Publ., 1957. – 552 p.
13. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики: В 5 т. – М.: Гостехтеоретиздат, 1953. –Т. 5, Ч. 2. – 676 с.
14. *Левин А. Л., Тихомиров В. М.* О приближениях аналитических функций рациональными // Докл. АН СССР. – 1967. – **147**, № 2. – С. 279 – 282.
15. *Суетин П. К.* Ряды по многочленам Фабера. – М.: Наука, 1984. – 336 с.

Получено 22.02.2002