УДК 512.542

В. А. Ведерников (Моск. город. пед. ун-т, Россия)

О НОВЫХ ТИПАХ ω-ВЕЕРНЫХ КЛАССОВ ФИТТИНГА КОНЕЧНЫХ ГРУПП

We construct infinite set of new types of ω-fibered Fitting classes of finite groups different from ω-local classes. We also obtain the structure of maximal inner ω-satellites for the principal of types constructed and establish the relation between ω-fibered and Ω-foliated Fitting classes.

Побудовано нескінченну множину нових типів ω-віялових класів Фіттінга скінченних груп, відмінних від ω-локальних, отримано будову максимальних внутрішніх ω-супутників для основних із цих типів, встановлено зв'язок між ω-віяловими і Ω-розшарованими класами Фіттінга.

1. Введение. В теории классов конечных групп важное место занимают локальные классы Фиттинга, введенные Б. Хартли в работе [1]. Частично локальные классы Фиттинга были определены и изучены в работе [2]. В работах [3, 4] частично локальные и частично композиционные классы Фиттинга были включены как представители двух серий соответственно веерных и расслоенных классов Фиттинга.

В работе [5] построены новые классы Фиттинга, отличные от локальных и композиционных, которые, как и класс локальных классов Фиттинга, являются замкнутыми относительно операции умножения. При описании строения локальных классов Фиттинга существенную роль играют их минимальные и максимальные спутники. В работах [3, 4] приведено строение минимальных спутников соответственно ω-веерных и Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга, а в работе [5] получено строение максимальных внутренних Ω-спутников основных типов Ω-расслоенных формаций и классов Фиттинга.

Цель настоящей работы — построить бесконечное множество новых типов ω-веерных классов Фиттинга, дать описание строения максимальных внутренних ω-спутников основных из этих типов, установить связь между ω-веерными и Ω-расслоенными классами Фиттинга.

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Обозначения и определения, не приведенные в работе, можно найти в работах [3–8]. Для удобства читателя приведем некоторые из них.

Пусть G — группа, $M(G)$ — мультипликатор Шура группы G, $F^p(G) = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}}$; $\mathfrak{Z}_{cp}$ — класс всех групп, в которых каждый главный p-фактор централен; $F_{cp}(G) = F_{Z_p}(G) = G_{\mathfrak{Z}_{cp}}$; $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел; ω — непустое подмножество множества $\mathbb{P}$.

Функция $h\colon \omega \bigcup \omega' \to$ (классы Фиттинга групп) называется ωR-функцией, функция $i\colon \mathbb{P} \to$ (классы Фиттинга групп) — R-функцией, функция $\varphi\colon \mathbb{P} \to$ (непустые формации Фиттинга) — FR-функцией. Класс Фиттинга $\omega R(h, \varphi) = (G : O^{\omega}(G) \in h(\omega')$ и $G^{\varphi(p)} \in h(p)$ для всех $p \in \omega \bigcap \pi(G))$ называется ω-веерным с направлением φ и ω-спутником h. Класс Фиттинга $R(i, \varphi) = (G : G^{\varphi(p)} \in i(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ называется веерным с направлением φ и спутником i.

На множестве Φ всех FR-функций введем отношение частичного порядка $\leq$. Для любых $\mu_1, \mu_2 \in \Phi$ полагаем $\mu_1 \leq \mu_2$, если $\mu_1(p) \subseteq \mu_2(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Множество всех $\varphi \in \Phi$ таких, что $\mu_1 \leq \varphi \leq \mu_2$, назовем отрезком и будем обозначать $[\mu_1, \mu_2]$.

В дальнейшем без дополнительных ссылок будем применять, следуя [8], определения, обозначения и свойства произведений классов групп.

2. ω-Веерные классы Фиттинга.

Определение 1. *Направление φ ω-веерного класса Фиттинга назовем: a-направлением, если $Z_p \in \varphi(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$; b-направлением, если $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p\varphi(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$; b_p-направлением, если $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p\varphi(p)$; p-направлением, если $\varphi(q) = \varphi(q)\mathfrak{G}_{q'}$ для любого $q \in \mathbb{P}$; s-направлением, если формация Фиттинга $\varphi(p)$ p-разрешима для любого $p \in \mathbb{P}$. $\mathbb{P}FR$-функцию φ назовем $i_1 i_2 \ldots i_k$-направлением ω-веерного класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, если φ является i_j-направлением $\mathfrak{F}$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Направление φ Ω-расслоенного класса Фиттинга называется n-направлением* [4], *если $A \notin \varphi(A)$ для любой неабелевой группы $A \in \mathfrak{F}$.*

***Замечание* 1.** Очевидно, что каждое b-направление является a-направлением, а понятие s-направления совпадает с понятием n-направления ω-веерного класса Фиттинга в работе [3]. Обозначим через ρ_0 и ρ_1 направления соответственно полного и локального классов Фиттинга, т.е. $\rho_0(p) = \delta_0(p) = \mathfrak{G}_{p'}$ и $\rho_1(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$.

В дальнейшем, как правило, без ссылок будем применять известные утверждения следующей леммы.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{M}$ — формации, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ — классы Фиттинга, G — группа и $N \triangleleft G$. Тогда*:

1) *если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M}$, то $G^{\mathfrak{M}} \subseteq G^{\mathfrak{F}}$;*

2) *если $\mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$, то $G_{\mathfrak{B}} \subseteq G_{\mathfrak{C}}$;*

3) $(G/N)^{\mathfrak{F}} = G^{\mathfrak{F}}N/N$ *и* $N_{\mathfrak{B}} = N \cap G_{\mathfrak{B}}$;

4) $O^{\omega}(N) \subseteq N \cap O^{\omega}(G)$;

5) *если $G/N \in \mathfrak{G}_{\omega}$, то $O^{\omega}(G) = O^{\omega}(N)$;*

6) *если $H \triangleleft G$ и $G = HN$, то $O^{\omega}(G) = O^{\omega}(H)O^{\omega}(N)$;*

7) $G^{\mathfrak{F}\circ\mathfrak{M}} = (G^{\mathfrak{M}})^{\mathfrak{F}}$;

8) *если $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, $\mathfrak{H}$ — класс групп, $\mathfrak{H}\mathfrak{F} = \mathfrak{F}$ и $N \in \mathfrak{H}$, то $(G/N)_{\mathfrak{F}} = G_{\mathfrak{F}}/N$;*

9) *если $\mathfrak{F}$ — формация Фиттинга, $\mathfrak{F}\mathfrak{M} = \mathfrak{F}$ и $G/N \in \mathfrak{M}$, то $G^{\mathfrak{F}} = N^{\mathfrak{F}}$.*

Доказательство п. 8 и п. 9 проводится соответственно так же, как п. 7 леммы 1 [5] и леммы 11 [5].

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ с p-направлением φ и $M \triangleleft G$. Тогда*:

1) *если $p \in \omega$, $O^p(G) \in \mathfrak{F}$ и $G^{\varphi(p)} \in f(p)$, то $G \in \mathfrak{F}$;*

2) *если $O^{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$ и $O^{\omega}(G) \in f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$;*

3) *если $M \in \mathfrak{F}$, $G^{\varphi(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G/M)$ и $O^{\omega}(G) \in f(\omega')$, то $G \in \mathfrak{F}$.*

Доказательство. 1. Поскольку $N = O^p(G) \in \mathfrak{F}$ и $O^{\omega}(G) \subseteq N$, то $O^{\omega}(G) = O^{\omega}(N) \in f(\omega')$. По условию $G^{\varphi(p)} \in f(p)$. Пусть $q \in (\omega \cap \pi(G)) \setminus \{p\}$. Тогда $q \in \pi(N)$. Поскольку φ является p-направлением, то $\varphi(q) = \varphi(q)\mathfrak{G}_{q'}$ и по лемме 1, п. 9 получаем $G^{\varphi(q)} = N^{\varphi(q)} \in f(q)$ и, значит, по определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$.

2. По условию $O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $T = O^{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$. Пусть $p \in \omega \cap \pi(G) = \omega \cap \pi(T)$. Так как G/T является p'-группой и φ — p-направление, то по

лемме 1, п. 9 имеем $G^{\varphi(p)} = T^{\varphi(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$. По определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$.

3. По условию $O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\varphi(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G/M)$. Пусть $q \in \omega \cap (\pi(G) \setminus \pi(G/M))$. Тогда G/M является q'-группой. Поскольку φ является p-направлением, то по лемме 1, п. 9 получаем $G^{\varphi(q)} = M^{\varphi(q)} \in f(q)$. Следовательно, $G^{\varphi(p)} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G)$ и, значит, по определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ — ωR-классы Фиттинга с p-направлением φ, m и h — внутренние ω-спутники $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{H}$ соответственно. Если $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ с ω-спутником f таким, что $f(\omega') = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$, $f(p) = m(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$ и $f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$, то $\mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{F}$ и f является внутренним ω-спутником класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{D} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$. Допустим, что $\mathfrak{D} \not\subseteq \mathfrak{F}$. Пусть $G \in \mathfrak{D} \setminus \mathfrak{F}$ и группа G наименьшего порядка с таким свойством. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $M = G_{\mathfrak{F}}$. Из $G \in \mathfrak{D}$ следует, что $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{D} = f(\omega')$. Допустим, что G/M является ω'-группой. Тогда $O^{\omega'}(G) \in \mathfrak{F}$ и по лемме 2, п. 2 $G \in \mathfrak{F}$, что невозможно. Следовательно, G/M — ωd-группа. Из $G \in \mathfrak{D} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ следует, что $G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$.

Пусть $G = G_{\mathfrak{M}}$. Тогда $G^{\varphi(p)} \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{M} \diamond h(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$ и $G^{\varphi(p)} \in m(p) = f(p)$ для всех $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$. Следовательно, $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие.

Пусть $G \neq G_{\mathfrak{M}}$. Тогда $G_{\mathfrak{M}} \subseteq M$, $\pi(G/M) \subseteq \pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$ и $(G/G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)} \cong G^{\varphi(p)}/(G^{\varphi(p)} \cap G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(p)} = G^{\varphi(p)}/(G^{\varphi(p)})_{\mathfrak{M}} \in h(p)$. Отсюда следует, что $G^{\varphi(p)} \in \mathfrak{M} \diamond h(p) = f(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(G/M)$. Тогда по лемме 2, п. 3 имеем $G \in \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерный класс Фиттинга с внутренним ω-спутником f и ар-направлением φ. Тогда $f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 15 [5] с применением леммы 2.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерный класс Фиттинга с ω-спутником f и b_p-направлением φ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *$O^p(G^{\varphi(p)}) = 1$ для любой группы G;*

2) *$\mathfrak{F}$ имеет ω-спутник g такой, что $g(q) = f(q)$ для всех $q \in \{\omega'\} \cup (\omega \setminus \{p\})$ и $g(p) = f(p)\mathfrak{N}_p$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 16 [5].

Лемма 6. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерный класс Фиттинга с внутренним ω-спутником f и bp-направлением φ. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) *$f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$;*

2) *$\mathfrak{F}$ имеет внутренний ω-спутник g такой, что $g(\omega') = f(\omega')$ и $g(p) = f(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$.*

Доказательство непосредственно следует из лемм 4 и 5.

Лемма 7. *Пусть $\mathfrak{F}$ — ω-веерный класс Фиттинга с bp-направлением φ. Если h — максимальный внутренний ω-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = h(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$.*

Доказательство. Поскольку h — максимальный внутренний ω-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$, то в силу леммы 10 [3] $h(\omega') = \mathfrak{F}$. По лемме 6 $\mathfrak{F}$ имеет внутренний ω-спутник g такой, что $g(\omega') = h(\omega')$ и $g(p) = h(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. Так как $h \leq g$ и h — максимальный внутренний ω-спутник класса

Фиттинга $\mathfrak{F}$, то $h = g$ и, значит, $h(p) = h(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. Лемма доказана.

Вопрос 1. *Для каких направлений* φ ω*-веерных классов Фиттинга таких, что* $\rho_0 \leq \varphi$, *каждый* $\omega R(f, \varphi)$ *имеет единственный максимальный внутренний* ω*-спутник?*

Определение 2. *Пусть* $R(\omega, \varphi)$ $(R(\mathbb{P}, \varphi))$ — *класс всех* ω*-веерных (веерных) классов Фиттинга с направлением* φ. *Направления* μ_1 *и* μ_2 *веерных классов Фиттинга назовем* ω*-эквивалентными (эквивалентными), если* $R(\omega, \mu_1) = R(\omega, \mu_2)$ $(R(\mathbb{P}, \mu_1) = R(\mathbb{P}, \mu_2))$, *и будем обозначать* $\mu_1 \overset{\omega}{=} \mu_2$ $(\mu_1 = \mu_2)$. *Если* $R(\omega, \mu_1) \neq R(\omega, \mu_2)$ $(R(\mathbb{P}, \mu_1) \neq R(\mathbb{P}, \mu_2))$, *то направления* μ_1 *и* μ_2 *называем* ω*-неэквивалентными (неэквивалентными) и обозначаем* $\mu_1 \overset{\omega}{\neq} \mu_2$ $(\mu_1 \neq \mu_2)$.

Теорема 1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ — ωR*-классы Фиттинга с внутренними* ω*-спутниками* m *и* h *соответственно и с* p*-направлением* φ *таким, что* $\varphi \leq \rho_1$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ *является* ω*-веерным классом Фиттинга с направлением* φ *и с внутренним* ω*-спутником* f *таким, что* $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = m(p)$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$ *и* $f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \omega R(f, \varphi)$. По лемме 3 $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}_1$. Допустим, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}_1$ и G — группа наименьшего порядка из $\mathfrak{F}_1 \setminus \mathfrak{F}$. Тогда G — комонолитическая группа с комонолитом $M = G^{\mathfrak{F}}$. Из $G \in \mathfrak{F}_1$ следует, что $O^{\omega}(G) \in f(\omega') = \mathfrak{F}$ и, значит, $O^{\omega}(G) \subseteq M$. Пусть $p \in \pi(G/M) \subseteq \omega \cap \pi(G)$. Тогда $G^{\varphi(p)} \in f(p) \subseteq \mathfrak{F}$. Поэтому $G^{\varphi(p)} \subseteq M$. Из $\varphi(p) \subseteq \rho_1(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}$ следует $G^{\rho_1(p)} \subseteq G^{\varphi(p)} \subseteq M$. Так как группа G комонолитична, то $G^{\mathfrak{G}_{p'}} = G$ и, значит, $G^{\rho_1(p)} = G^{\mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'}} = (G^{\mathfrak{G}_{p'}})^{\mathfrak{N}_p} = G^{\mathfrak{N}_p} \subseteq M$. Поэтому $G/M \cong Z_p$. Из $G \notin \mathfrak{F}$ и $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$ следует, что $G \notin \mathfrak{M}$ и, значит, $G_{\mathfrak{M}} \neq G$. Поэтому $G_{\mathfrak{M}} \subseteq M$ и $G_{\mathfrak{M}} = M_{\mathfrak{M}}$. Из $M \in \mathfrak{F}$ следует $M/M_{\mathfrak{M}} = M/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$. Допустим, что $p \notin \pi(\mathfrak{H})$. Тогда $G^{\varphi(p)} \in f(p) = m(p)$. Поскольку $G^{\mathfrak{N}_p} = G^{\rho_1(p)} \subseteq G^{\varphi(p)} \in m(p) \subseteq \mathfrak{M}$, то по лемме 2 п. 1 $G \in \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $p \in \pi(\mathfrak{H})$. Из $M/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$ следует $\pi(G/G_{\mathfrak{M}}) \subseteq \pi(\mathfrak{H})$. Тогда для любого $q \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$ имеем $G^{\varphi(q)} \in f(q) = \mathfrak{M} \diamond h(q)$ и, значит, $G^{\varphi(q)}/(G^{\varphi(q)})_{\mathfrak{M}} \in h(q)$. Поэтому $(G/G_{\mathfrak{M}})^{\varphi(q)} \cong G^{\varphi(q)}/(G^{\varphi(q)})_{\mathfrak{M}} \in h(q)$ для любого $q \in \omega \cap \pi(G/G_{\mathfrak{M}})$. В силу леммы 10 [3] можем считать, что $h(\omega') = \mathfrak{H}$. Из $O^{\omega}(G) \in \mathfrak{F}$ следует, что $O^{\omega}(G)/(O^{\omega}(G))_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$. Тогда

$$O^{\omega}(G/G_{\mathfrak{M}}) = O^{\omega}(G)G_{\mathfrak{M}}/G_{\mathfrak{M}} \cong O^{\omega}(G)/(O^{\omega}(G))_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H} = h(\omega'),$$

$G/G_{\mathfrak{M}} \in \mathfrak{H}$ и, значит, $G \in \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H} = \mathfrak{F}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ — ω*-полные классы Фиттинга с внутренними* ω*-спутниками* m *и* h *соответственно. Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ *является* ω*-полным классом Фиттинга с внутренним* ω*-спутником* f *таким, что* $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = m(p)$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$ *и* $f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$.

Следствие 1.2 (теорема 1 [9]). *Пусть* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ — ω*-локальные классы Фиттинга с внутренними* ω*-спутниками* m *и* h *соответственно. Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ *является* ω*-локальным классом Фиттинга с внутренним* ω*-спутником* f *таким, что* $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = m(p)$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$ *и* $f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$ *для всех* $p \in \omega \cap \pi(\mathfrak{H})$.

Замечание 2. Для локальных классов Фиттинга следствие 1.2 установлено в работе [10] и при $\omega = \{p\}$ получило дальнейшее развитие в [11]. На отрезке $[\rho_0, \rho_1]$ содержатся всего три направления ω-веерного класса Фиттинга: $\rho_0 = \delta_0$, ρ_1 и $\rho' = \delta'$, причем $\rho'(p) = \mathfrak{N}_p \times \mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Однако ρ' не является p-направлением. Поэтому для $\varphi = \rho'$ теорема 1 требует отдельного рассмотрения.

Определение 3. *Пусть φ и ψ — направления соответственно ω-веерного и Ω-расслоенного классов Фиттинга. Направления φ и ψ назовем коллинеарными, если $\varphi(p) = \psi(Z_p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Определение 4. *Пусть $(Z_p : p \in \omega) = \Omega \bigcap \mathfrak{A}$. Ω-спутник g Ω-расслоенного класса Фиттинга назовем согласованным с ω-спутником f ω-веерного класса Фиттинга, если $g(Z_p) = f(p)$ для любого $p \in \omega$ и $g(\Omega') = f(\omega')$. Спутник g расслоенного класса Фиттинга назовем согласованным со спутником f веерного класса Фиттинга, если $g(Z_p) = f(p)$ для любого $p \in \mathbb{P}$.*

Определение 5. *Класс Фиттинга $\omega R(f, \varphi)$ назовем ω-специальным или, коротко, ωS-классом Фиттинга, если $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{(Z_p)'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначим $\omega SR(f) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $O^{Z_p, (Z_p)'}(G) \in f(p)$ для всех $p \in \omega \bigcap \pi(G))$, а f назовем его ωS-спутником. Класс Фиттинга $SR(g) = (G : G / O^{Z_p, (Z_p)'}(G) \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ назовем специальным классом Фиттинга или, коротко, S-классом Фиттинга с S-спутником g. Обозначим направление специального класса Фиттинга через ρ_2.*

Теорема 2. *Пусть $p \in \omega$, $G_i \cong PSL(2, p^{i+1})$ и $\widetilde{\mathfrak{F}}_i = \operatorname{fit} G_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда:*

1) $\rho_1(p) \subset \mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \mathfrak{G}_{p'} \subset \mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \widetilde{\mathfrak{F}}_2 \mathfrak{G}_{p'} \subset \ldots \subset \mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \widetilde{\mathfrak{F}}_2 \ldots \widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \widetilde{\mathfrak{F}}_n \mathfrak{G}_{p'} \subset \ldots \subset \rho_2(p)$;

2) *если $\tau_i(q) = \mathfrak{N}_q \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \widetilde{\mathfrak{F}}_2 \ldots \widetilde{\mathfrak{F}}_{i-1} \widetilde{\mathfrak{F}}_i \mathfrak{G}_{q'}$ для любого $q \in \mathbb{P}$, $i \in \mathbb{N}$, то $\rho_1, \tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$ является бесконечной последовательностью попарно ω-неэквивалентных bp-направлений веерных классов Фиттинга, причем $\rho_1 \leq \tau_1 \leq \leq \tau_2 \leq \ldots \leq \tau_n \leq \ldots \leq \rho_2$.*

Доказательство. 1. Нетрудно показать, что все произведения, встречающиеся в п. 1, определены корректно. Поскольку $G_i \cong PSL(2, p^{i+1})$ и $\widetilde{\mathfrak{F}}_i = \operatorname{fit} G_i$, то $p \in \pi(\widetilde{\mathfrak{F}}_i)$ и, значит, $\mathfrak{N}_p \subset \mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1$ и $\rho_1(p) = \mathfrak{N}_p \mathfrak{G}_{p'} \subset \mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \mathfrak{G}_{p'}$. Из $\widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \subset \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \widetilde{\mathfrak{F}}_n$ следует $\widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \mathfrak{G}_{p'} \subset \widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \widetilde{\mathfrak{F}}_n \mathfrak{G}_{p'}$ и, значит, $\mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \widetilde{\mathfrak{F}}_2 \ldots \widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \mathfrak{G}_{p'} \subset \subset \mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \widetilde{\mathfrak{F}}_2 \ldots \widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \widetilde{\mathfrak{F}}_n \mathfrak{G}_{p'}$. Так как $\widetilde{\mathfrak{F}}_1 \widetilde{\mathfrak{F}}_2 \ldots \widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \widetilde{\mathfrak{F}}_n \mathfrak{G}_{p'} \subset \mathfrak{G}_{(Z_p)'}$, то $\mathfrak{N}_p \widetilde{\mathfrak{F}}_1 \widetilde{\mathfrak{F}}_2 \ldots \ldots \widetilde{\mathfrak{F}}_{n-1} \widetilde{\mathfrak{F}}_n \mathfrak{G}_{p'} \subset \rho_2(p)$. Поэтому выполняется утверждение 1.

2. Покажем, что $\tau_i \overset{\omega}{\neq} \tau_j$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Пусть для определенности $i < j$. Рассмотрим группу $G = G_j \cong PSL(2, p^{j+1})$. Пусть $\mathfrak{H}_i = \omega R(G, \tau_i)$ — веерный класс Фиттинга, порожденный группой G, m_i — минимальный ω-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{H}_i$, $i \in \mathbb{N}$. Тогда по теореме 12 [3] $m_i(\omega') = m_j(\omega') = \operatorname{fit} O^{\omega}(G)$, $m_i(q) = \operatorname{fit} G^{\tau_i(q)}$, $m_j(q) = \operatorname{fit} G^{\tau_j(q)}$ для любого $q \in \omega \bigcap \pi(G)$ и $m_i(q) = m_j(q) = \varnothing$ для любого $q \in \omega \setminus \pi(G)$. Пусть $q \in \omega \bigcap \pi(G)$. Поскольку $G \notin \mathfrak{G}_{q'} \bigcup \mathfrak{N}_q$ и $G \notin \widetilde{\mathfrak{F}}_k$ для любого $k < j$, то получим $G \notin \tau_i(q)$, но $G \in \tau_j(q)$ и, значит, $m_i(q) = \operatorname{fit} G$ и $m_j(q) = (1)$ для любого $q \in \omega \bigcap \pi(G)$.

Рассмотрим группу $R = G \wr Z_p = [K] Z_p$, где K — база сплетения. Из $p \in \omega$ следует, что $O^{\omega}(R) = O^{\omega}(K) \in m_i(\omega')$. Поскольку $R^{\tau_i(q)} = K \in m_i(q)$ для любого $q \in \omega \bigcap \pi(G)$, то $R \in \mathfrak{H}_i$. Из

$$R^{\mathfrak{N}_p(\widehat{\mathfrak{F}}_1\widehat{\mathfrak{F}}_2\ldots\widehat{\mathfrak{F}}_{j-1}\widehat{\mathfrak{F}}_j\mathfrak{G}_{p'})} = (R^{\widehat{\mathfrak{F}}_1\widehat{\mathfrak{F}}_2\ldots\widehat{\mathfrak{F}}_{j-1}\widehat{\mathfrak{F}}_j\mathfrak{G}_{p'}})^{\mathfrak{N}_p} = R^{\mathfrak{N}_p} = K \notin m_j(p)$$

следует, что $R \notin \mathfrak{H}_j$ и, значит, $\mathfrak{H}_i \not\subseteq \mathfrak{H}_j$. Пусть $\mathfrak{T}_i = \omega R(\mathfrak{H}_j, \tau_i)$. Поскольку $G \in \mathfrak{H}_j$, то $G \in \mathfrak{T}_i$ и $\mathfrak{H}_i \subseteq \mathfrak{T}_i$. Отсюда следует, что $\mathfrak{T}_i \neq \mathfrak{H}_j$. Поэтому $\mathfrak{H}_j$ не является ω-веерным классом Фиттинга с направлением τ_i. Значит, $\mathfrak{H}_j \in$ $\in R(\omega, \tau_j) \setminus R(\omega, \tau_i)$. Следовательно, $\tau_i \overset{\omega}{\not\approx} \tau_j$ для любых $i, j \in \mathbb{N}$, $i \neq j$. Аналогично можно показать, что $\rho_1 \overset{\omega}{\not\approx} \tau_i$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Теорема доказана.

Вопрос 2. *Существует ли бесконечное линейно упорядоченное множество попарно ω-неэквивалентных ps-направлений веерных классов Фиттинга?*

Замечание 3. В теореме 2 вместо $PSL(2, p^{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$, можно применить любую бесконечную последовательность неабелевых простых групп, например, $A_{p^{i+2}}$, $i \in \mathbb{N}$, — знакопеременных групп подстановок; $PSL(n, p^{i+1})$, $i \in \mathbb{N}$, для любого натурального числа $n > 2$ и другие (см. [12, с. 145]), причем два любых направления веерных классов Фиттинга (формаций), соответствующие различным таким последовательностям простых неабелевых групп, также ω-неэквивалентны. Отсюда следует существование множества попарно ω-неэквивалентных направлений веерных классов Фиттинга (формаций) мощности континуум.

Теорема 3 (о соответствии). *Пусть $\widehat{\mathfrak{F}} = \omega R(f, \varphi)$ — ω-веерный класс Фиттинга с p-направлением φ, $\Omega \cap \mathfrak{A} = (Z_p \colon p \in \omega)$ и $\mathfrak{H} = \Omega R(h, \psi)$ — Ω-расслоенный класс Фиттинга с n-направлением ψ, коллинеарным φ, и со спутником h, согласованным с f, таким, что $h(A) = \widehat{\mathfrak{F}}$ для любого $A \in$ $\in \Omega \setminus \mathfrak{A}$. Тогда $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}$.*

Доказательство. Пусть $G \in \widehat{\mathfrak{F}}$ и $A \in \Omega \cap K(G)$. В силу леммы 10 [3] можем считать, что $f(\omega') = \widehat{\mathfrak{F}}$. Из $G \in \widehat{\mathfrak{F}}$ следует, что $O^{\Omega}(G) \in \widehat{\mathfrak{F}} = f(\omega') =$ $= h(\Omega')$. Если A — неабелева группа, то $G^{\psi(A)} \in \widehat{\mathfrak{F}} = h(A)$. Если $A \cong Z_p$, то $G^{\psi(A)} = G^{\varphi(p)} \in f(p) = h(Z_p) = h(A)$. Следовательно, $G^{\psi(A)} \in h(A)$ для любого $A \in \Omega \cap K(G)$ и, значит, $G \in \mathfrak{H}$. Поэтому $\widehat{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{H}$.

Допустим, что $\mathfrak{H} \not\subseteq \widehat{\mathfrak{F}}$. Пусть $H \in \mathfrak{H} \setminus \widehat{\mathfrak{F}}$ и группа H наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H комонолитична с комонолитом $M = H_{\widehat{\mathfrak{F}}}$. Пусть $H/M \cong A$. Из $O^{\Omega}(H) \in h(\Omega') = f(\omega') = \widehat{\mathfrak{F}}$ следует, что $A \in \Omega$. Допустим, что A — неабелева группа. Поскольку ψ является n-направлением, то $A \notin \psi(A)$ и, значит, $H^{\psi(A)} \not\subseteq M$. Поэтому $H^{\psi(A)} = H \in h(A) = \widehat{\mathfrak{F}}$, что невозможно. Пусть $A \cong Z_p$. Тогда $O^p(H) \subseteq M$ и, значит, $O^p(H) \in \widehat{\mathfrak{F}}$. Далее $H^{\varphi(p)} =$ $= H^{\psi(A)} \in h(Z_p) = f(p)$. Так как φ является p-направлением, то по лемме 2 $H \in \widehat{\mathfrak{F}}$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{H} \subseteq \widehat{\mathfrak{F}}$. Из $\widehat{\mathfrak{F}} \subseteq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} \subseteq \widehat{\mathfrak{F}}$ следует $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 3.1. *Пусть $\widehat{\mathfrak{F}} = R(f, \varphi)$ — веерный класс Фиттинга с p-направлением φ и $\mathfrak{H} = R(h, \psi)$ — расслоенный класс Фиттинга с n-направлением ψ, коллинеарным φ, и со спутником h, согласованным с f, таким, что $h(A) = \widehat{\mathfrak{F}}$ для любого $A \in \mathfrak{J} \setminus \mathfrak{A}$. Тогда $\widehat{\mathfrak{F}} = \mathfrak{H}$.*

Замечание 4. Из теорем 2 и 3 непосредственно следует существование для Ω-расслоенных классов Фиттинга бесконечного линейно упорядоченного множества попарно Ω-неэквивалентных bnp-направлений χ_i, коллинеарных τ_i, $i \in \mathbb{N}$, где $\Omega = (Z_p \colon p \in \omega) \cup (PSL(2, p^{i+1}) \colon i \in \mathbb{N})$. Тем самым получен частичный ответ на вопрос 5 [5].

Замечание 5. Направлением ωZ-формации является FR-функция φ такая, что $\varphi(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, причем $\varphi(p) = \mathfrak{S}_{cp} = \mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{N}_p =$

$= \mathfrak{G}_{(Z_p)'}\mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Поэтому в силу двойственности можно получить ряд различных определений для центральных классов Фиттинга. Приведем лишь некоторые из них.

Определение 6. *Класс Фиттинга $\omega R(f, \varphi)$ назовем ω-центральным или, коротко, ωZ-классом Фиттинга, если $\varphi(p) = \mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначим $\omega Z R(f) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\mathfrak{S}_{cp}} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$, а f назовем его ωZ-спутником. Класс Фиттинга $Z R(g) = (G : G^{\mathfrak{S}_{cp}} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ назовем центральным классом Фиттинга или, коротко, Z-классом Фиттинга со спутником g. Обозначим направление центрального класса Фиттинга через ρ_3.*

Определение 7. *Класс Фиттинга $\omega R(f, \varphi)$ назовем ω-сверхцентральным или, коротко, $\omega \bar{Z}$-классом Фиттинга, если $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{cp}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначим $\omega \bar{Z} R(f) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{cp}} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$, а f назовем его $\omega \bar{Z}$-спутником. Класс Фиттинга $\bar{Z} R(g) = (G : G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{cp}} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ назовем сверхцентральным классом Фиттинга или, коротко, $\bar{Z}$-классом Фиттинга с $\bar{Z}$-спутником g. Обозначим направление сверхцентрального класса Фиттинга через $\bar{\rho}_3$.*

Определение 8. *Класс Фиттинга $\omega R(f, \varphi)$ назовем ω-гиперцентральным или, коротко, $\omega Z''$-классом Фиттинга, если $\varphi(p) = \mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначим $\omega Z'' R(f) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{G}_{p'}} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$, а f назовем его $\omega Z''$-спутником. Класс Фиттинга $Z'' R(g) = (G : G^{\mathfrak{N}_p\mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{G}_{p'}} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ назовем гиперцентральным классом Фиттинга или, коротко, Z''-классом Фиттинга с Z''-спутником g. Обозначим направление гиперцентрального класса Фиттинга через ρ_3''.*

Определение 9. *Класс Фиттинга $\omega R(f, \varphi)$ назовем ω-ультрацентральным или, коротко, $\omega Z'$-классом Фиттинга, если $\varphi(p) = \mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{G}_{p'}$ для любого $p \in \mathbb{P}$, и обозначим $\omega Z' R(f) = (G : O^{\omega}(G) \in f(\omega')$ и $G^{\mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{G}_{p'}} \in f(p)$ для всех $p \in \omega \cap \pi(G))$, а f назовем его $\omega Z'$-спутником. Класс Фиттинга $Z' R(g) = (G : G^{\mathfrak{S}_{cp}\mathfrak{G}_{p'}} \in g(p)$ для всех $p \in \pi(G))$ назовем ультрацентральным классом Фиттинга или, коротко, Z'-классом Фиттинга с Z'-спутником g. Обозначим направление ультрацентрального класса Фиттинга через ρ_3'.*

Предложение 1. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega \bar{Z} R(f)$ и $\mathfrak{H} = \omega Z R(g)$, где $g(\omega') = \mathfrak{F}$, $g(p) = f(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega Z'' R(f)$ и $\mathfrak{H} = \omega Z' R(g)$, где $g(\omega') = \mathfrak{F}$, $g(p) = f(p)\mathfrak{N}_p$ для всех $p \in \omega$. Тогда $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.*

Доказательство предложений 1 и 2 проводится аналогично доказательству соответственно предложений 3 и 4 [5].

***Замечание* 6.** Направления ρ_2, ρ_3' и ρ_3'' являются p-направлениями; применяя к ним теорему 3, приведем лишь некоторые следствия.

***Следствие* 3.2.** *Пусть $\mathfrak{F} = \omega Z'' R(f)$ — ω-гиперцентральный класс Фиттинга, $\Omega \cap \mathfrak{A} = (Z_p : p \in \omega)$ и $\mathfrak{H} = \omega H R(h)$ — Ω-гиперкомпозиционный* *класс Фиттинга со спутником* h, *согласованным с* f, *таким, что* $h(A) = \mathfrak{F}$ *для любого* $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Следствие 3.3. *Пусть* $\mathfrak{F} = \omega SR(f)$ — ω*-специальный класс Фиттинга,* $\Omega \bigcap \mathfrak{A} = (Z_p : p \in \omega)$ *и* $\mathfrak{H} = \Omega BR(h)$ — Ω*-биканонический класс Фиттинга со спутником* h, *согласованным с* f, *таким, что* $h(A) = \mathfrak{F}$ *для любого* $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$. *Тогда* $\mathfrak{F} = \mathfrak{H}$.

Следствие 3.4. *Пусть* m *и* h — *внутренние* ω*-спутники* ωS*-классов Фиттинга* $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ *соответственно. Тогда класс Фиттинга* $\mathfrak{F} = \mathfrak{M} \diamond \mathfrak{H}$ *является* ωS*-классом Фиттинга с внутренним* ω*-спутником* f *таким, что* $f(\omega') = \mathfrak{F}$, $f(p) = m(p)$ *для всех* $p \in \omega \setminus \pi(\mathfrak{H})$ *и* $f(p) = \mathfrak{M} \diamond h(p)$ *для всех* $p \in \omega \bigcap \pi(\mathfrak{H})$.

Доказательство. Пусть $\Omega \bigcap \mathfrak{A} = (Z_p : p \in \omega)$, m_1 и h_1 — Ω-спутники, согласованные соответственно с m *и* h, причем $m_1(A) = \mathfrak{M}$ и $h_1(A) = \mathfrak{H}$ для любого $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{M}_1 = \Omega BR(m_1)$ и $\mathfrak{H}_1 = \Omega BR(h_1)$. Тогда по теореме 3 $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1$. Следовательно, $\mathfrak{M}$ *и* $\mathfrak{H}$ являются ΩB-классами Фиттинга и по лемме 20 [5] $\mathfrak{F}$ является ΩB-классом Фиттинга с внутренним Ω-спутником f_1 таким, что $f_1(A) = \mathfrak{F}$ для всех $A \in \{\Omega'\} \bigcup (\Omega \setminus \mathfrak{A})$, $f_1(A) = m_1(A)$ для всех $A \in (\Omega \bigcap \mathfrak{A}) \setminus K(\mathfrak{H}_1)$ и $f_1(A) = \mathfrak{M}_1 \diamond h_1(A)$ для всех $A \in \Omega \bigcap \mathfrak{A} \bigcap K(\mathfrak{H}_1)$, причем по теореме 7 [5] можем считать, что $f_1(A) = \mathfrak{F}$ для любого $A \in \Omega \setminus \mathfrak{A}$. В силу следствия 3.3 $\mathfrak{F}$ имеет согласованный с f_1 ω-спутник f, удовлетворяющий заключению следствия. Следствие доказано.

Группу G назовем ω-биделимой, если порядок каждого композиционного фактора группы G делится не более чем на два простых числа из ω. Направление φ назовем t_ω-направлением, если $\varphi(p)$ является ω-биделимой для всех $p \in \omega$.

Лемма 8. *Пусть* $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ *с внутренним* ω*-спутником* f *и с направлением* φ *таким, что* $\rho_1 \le \varphi$. *Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) *если* $\mathfrak{F}_1 = \omega LR(f)$, *то* $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$;

2) $f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ *для всех* $p \in \omega$;

3) *если* g — *внутренний* ω*-спутник класса Фиттинга* $\mathfrak{F}$, $\varphi \le \rho_2$, $2 \notin \omega$ *или* φ – t_ω*-направление и* $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^*$ — *класс Локетта, то* $\mathfrak{F}$ *имеет внутренний* ω*-спутник* f^* *такой, что* $f^*(\omega') = f(\omega')$, $f^*(p) = (f(p))^*$ *и* $f^*(p)\mathfrak{N}_p = g^*(p)\mathfrak{N}_p$ *для любого* $p \in \omega$.

Доказательство. 1. Пусть $G \in \mathfrak{F}_1$. Тогда $O^\omega(G) \in f(\omega')$ и $O^{p,p'}(G) \in f(p)$ для любого $p \in \omega \bigcap \pi(G)$. Из $\rho_1 \le \varphi$ следует $G^{\varphi(p)} \le O^{p,p'}(G)$ и, значит, $G^{\varphi(p)} \in f(p)$ для любого $p \in \omega \bigcap \pi(G)$. По определению $\mathfrak{F}$ имеем $G \in \mathfrak{F}$. Поэтому $\mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$.

2. Так как ρ_1 является bp-направлением, то по лемме 4 $f(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}_1 \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$.

3. Применяя X.1.8 (в) и X.1.23 (а) [8], нетрудно показать, что f^* — внутренний ω-спутник $\mathfrak{F}$ и $f^*(p)\mathfrak{N}_p \subseteq \mathfrak{F}$ для всех $p \in \omega$. Пусть $p \in \omega$. Допустим, что $\mathfrak{M}_1 = f^*(p)\mathfrak{N}_p \not\subseteq g^*(p)\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}_2$. Пусть $H \in \mathfrak{M}_1 \setminus \mathfrak{M}_2$ и группа H наименьшего порядка с таким свойством. Тогда H — комонолитическая группа с комонолитом $P = H_{\mathfrak{M}_2}$. Допустим, что $O^p(H) \subseteq P$. Тогда из $P \in \mathfrak{M}_2$ следует, что $H \in \mathfrak{M}_2\mathfrak{N}_p = \mathfrak{M}_2$. Получили противоречие. Следовательно, $O^p(H) = H$. Тогда $H \in f^*(p)$. Рассмотрим группу $T = H \wr Z_p = [K]Z_p$. Тогда

$Z_p \notin K\left(T/T_{\mathfrak{M}_2}\right)$. По X.2.1 (а) [8] $T_{\mathfrak{M}_2}$ — база сплетения $H_{\mathfrak{M}_2} \wr Z_p$. Поскольку $T/T_{\mathfrak{M}_2} \cong \left(H/H_{\mathfrak{M}_2}\right) \wr Z_p$, то $Z_p \in K\left(T/T_{\mathfrak{M}_2}\right)$. Получили противоречие. Следовательно, $\mathfrak{M}_1 \subseteq \mathfrak{M}_2$. В силу симметрии получаем $\mathfrak{M}_2 \subseteq \mathfrak{M}_1$. Поэтому $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2$. Лемма доказана.

Теорема 4. *Пусть класс Локетта $\mathfrak{F} = \omega R(f, \varphi)$ с внутренним ω-спутником f и с bp-направлением φ таким, что $\rho_1 \le \varphi \le \rho_2$. Если $2 \notin \omega$ или φ – t_ω-направление, то $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ω-спутник h, причем $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = h(p)\mathfrak{N}_p = f^*(p)\mathfrak{N}_p = h^*(p)$ для любого $p \in \omega$.*

Доказательство. В силу леммы 10 [3] можем считать, что $f(\omega') = \mathfrak{F}$. По лемме 8 $\mathfrak{F}$ имеет внутренний ω-спутник f^*. Так как φ является bp-направлением, то по лемме 6 $\mathfrak{F}$ имеет внутренний ω-спутник h такой, что $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = f^*(p)\mathfrak{N}_p$ для любого $p \in \omega$. Кроме того, $h(p)\mathfrak{N}_p = \left(f^*(p)\mathfrak{N}_p\right)\mathfrak{N}_p = f^*(p)\mathfrak{N}_p = h(p)$ для любого $p \in \omega$. Пусть g — внутренний ω-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. Поскольку $\rho_1 \le \varphi \le \rho_2$, то по лемме 8 $g^*(p)\mathfrak{N}_p = f^*(p)\mathfrak{N}_p = h(p)$ для любого $p \in \omega$. Отсюда следует, что $g \le h$ и, значит, h — единственный максимальный внутренний ω-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{F}$. По лемме X.1.26 (в) [8] имеем $h = h^*$. Теорема доказана.

Следствие 4.1. *Если f — внутренний ω-спутник ωL-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ω-спутник h, причем $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = h(p)\mathfrak{N}_p = f^*(p)\mathfrak{N}_p = h^*(p)$ для любого $p \in \omega$.*

Следствие 4.2. *Если f — внутренний ω-спутник ωS-класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}$ — класс Локетта, то $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ω-спутник h, причем $h(\omega') = \mathfrak{F}$, $h(p) = h(p)\mathfrak{N}_p = f^*(p)\mathfrak{N}_p = h^*(p)$ для любого $p \in \omega$.*

Теорема 5. *ω-Полный класс Фиттинга (ω-полная формация) $\mathfrak{F}$ имеет единственный максимальный внутренний ω-спутник h, причем $h(\omega') = \mathfrak{F}$ и $h(p) = \mathfrak{F}$ для любого $p \in \omega$.*

Доказательство проводится аналогично доказательству теоремы 8 (теоремы 4) [5].

Из теоремы 2 следует, что класс ω-веерных классов Фиттинга не исчерпывается классом всех ω-локальных классов Фиттинга. Для подтверждения многогранности класса ω-веерных классов Фиттинга рассмотрим лишь „веерные" аналоги Ω-биканонических и Ω-композиционных [5] классов Фиттинга.

Теорема 6. *Пусть $\mathfrak{F} = \omega ZR(G)$, $\mathfrak{B} = \omega SR(G)$ и $\mathfrak{L} = \omega LR(G)$ — соответственно ω-центральный, ω-специальный и ω-локальный классы Фиттинга, порожденные простой неабелевой группой G, причем $\pi = \omega \cap \pi(G) \neq \varnothing$. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1) $\mathfrak{N}_\pi \subset \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$;

2) $\mathfrak{B}$ *не является ω-локальным классом Фиттинга, в частности,* $\rho_1 \overset{\omega}{\neq} \rho_2$;

3) *если* $\pi(G) \subseteq \omega$ и $M(G) \neq 1$, *то $\mathfrak{B}$ не является центральным классом Фиттинга, в частности,* $\rho_2 \neq \rho_3$.

Доказательство. В силу теоремы 12 [3] $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{B}$ имеют соответственно минимальные ωZ-спутник f и ωS-спутник b такие, что $f(\omega') = b(\omega') = \operatorname{fit} O^{\omega}(G)$, $f(p) = \operatorname{fit} G^{\mathfrak{E}_{\varphi}} = (1)$ и $b(p) = \operatorname{fit} O^{Z_p, (Z_p)'}(G) = (1)$ для всех $p \in \pi$. Так как $f = b$ и $\rho_2 \le \rho_3$, то по лемме 8 следует, что $\mathfrak{N}_\pi \subset \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{F}$, т. е. выполняется утверждение 1.

Пусть l — минимальный ωL-спутник класса Фиттинга $\mathfrak{L}$. Тогда по теореме 12 [3] $l(\omega') = \mathrm{fit}\, O^{\omega}(G)$ и $l(p) = \mathrm{fit}\, F^{p}(G) = \mathrm{form}\, G$ для всех $p \in \pi$. Рассмотрим группу $U = G \wr Z_p = [K]Z_p$, где $K = G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_p$, $G_i \cong G$ для любого $i = 1, 2, \ldots, p$. Поскольку $O^{\omega}(U) = O^{\omega}(K) = K \in l(\omega')$ и $F^{p}(U) = K \in l(p)$ для любого $p \in \omega \cap \pi(U)$, то $U \in \mathfrak{L}$. Из $O^{Z_p,(Z_p)'}(U) = K \notin b(p)$ следует, что $U \notin \mathfrak{V}$. Допустим, что $\mathfrak{V}$ — ω-локальный класс Фиттинга. Тогда из $G \in \mathfrak{V}$ следует $\mathfrak{L} = \omega LF(G) \subseteq \mathfrak{V}$ и, значит, $U \in \mathfrak{V}$. Получили противоречие. Поэтому $\mathfrak{V}$ не является ω-локальным классом Фиттинга и выполняется утверждение 2.

Пусть $\pi(G) \subseteq \omega$ и $p \in \pi(M(G))$. Рассмотрим накрывающую группу R группы G такую, что $|Z(R)| = p$. Тогда $R/Z(R) \cong G$, причем по теореме 16.19, а) гл. I [13] $p \in \pi(G)$. Рассмотрим группу $V = R \wr Z_p = [D]Z_p$, где D — база сплетения и $C = Z(D)$. Тогда $C \trianglelefteq V$, причем $|C| = p^p$. Пусть A/B — главный фактор группы V ниже C. По лемме 3.9 [6] $O_p(V/C_V(A/B)) = 1$. Отсюда следует, что A/B является центральным главным фактором группы V. Следовательно, $V \in \mathfrak{S}_{cp}$ и, значит, $V^{\mathfrak{S}_{cp}} = 1 \in f(q)$ для всех $q \in \pi(V)$. В силу теоремы 10 [3] получим $V \in \mathfrak{F} = ZR(G)$. Из $O^{Z_p,(Z_p)'}(V) = D \notin b(p)$ следует, что $V \notin \mathfrak{V}$. Теперь, как и выше, нетрудно показать, что $\mathfrak{V}$ не является центральным классом Фиттинга и, значит, выполняется утверждение 3. Теорема доказана.

***Замечание* 7.** Формация Фиттинга $\rho_3(p)$ состоит из всех групп, в которых каждый главный p-фактор является центральным. Это оказалось решающим, чтобы веерные классы Фиттинга с направлением ρ_3 назвать центральными. Поскольку $\mathfrak{S} \cap \rho_2(p)$ состоит из всех разрешимых p-специальных [14] групп, это послужило поводом веерные классы Фиттинга с направлением ρ_2 назвать специальными. Лемма 8 и следствие 4.1 расширяют основной результат из [15].

1. *Hartley B.* On Fischer's dualization of formation theory // Proc. London Math. Soc. – 1969. – **19**. – P. 193 – 207.
2. *Скиба А. Н., Шеметков Л. А.* Кратно ω-локальные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. труды. – 1999. – **2**, № 2. – С. 114 – 147.
3. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* ω-Веерные формации и классы Фиттинга конечных групп // Мат. заметки. – 2002. – **71**, № 1. – С. 43 – 60.
4. *Ведерников В. А., Сорокина М. М.* Ω-расслоенные формации и классы Фиттинга конечных групп // Дискретная математика. – 2001. – **13**, № 3. – С. 125 – 144.
5. *Vedernikov V. A.* Maximal satellites of Ω-foliated formations and Fitting classes // Proc. Steklov Inst. Math. – 2001. – **2**. – P. 217 – 233.
6. *Шеметков Л. А.* Формация конечных групп. – М.: Наука, 1978. – 272 с.
7. *Шеметков Л. А., Скиба А. Н.* Формации алгебраических систем. – М.: Наука, 1989. – 254 с.
8. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. – Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992. – 889 p.
9. *Сыромолотова О. В.* О произведении кратно ω-локальных классов Фиттинга // Тез. докл. 3-й Междунар. алгебр. конф. в Украине. – Сумы, 2001. – С. 257.
10. *Воробьев Н. Т.* Локальные произведения классов Фиттинга // Весцi АН БССР. Сер. фiз.-мат. навук. – 1991. – № 6. – С. 28 – 32.
11. *Воробьев Н. Т., Дудкин И. В.* О произведении p-локальных классов Фиттинга // Тез. докл. 3-й Междунар. алгебр. конф. в Украине. – Сумы, 2001. – С. 146 – 147.
12. *Горенстейн Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию. – М.: Мир, 1985. – 352 с.
13. *Huppert B.* Endliche Gruppen, I. – Berlin etc.: Springer, 1967. – 793 S.
14. *Чунихин С. А.* Подгруппы конечных групп. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.
15. *Воробьев Н. Т.* О наибольшей приведенной функции Хартли // Изв. Гомел. ун-та: Вопросы алгебры. – 1999. – № 1 (15). – С. 14 – 17.

Получено 28.02.2002