УДК 512.542

В. Н. Тютянов (Гомел. фил. Междунар. ин-та труд. и соц. отношений, Беларусь)

К ГИПОТЕЗЕ ХОЛЛА

We obtain a new criterion of the solvability of a finite group with a given family of Hall subgroups.

Отримано новий критерій розв'язності скінченної групи із заданою сім'єю холлових підгруп.

Пусть π — некоторое фиксированное множество простых чисел. Будем говорить, что конечная группа G имеет свойство E_π (является E_π-группой), если она имеет холлову π-подгруппу. Ф. Холл высказал гипотезу [1], что если конечная группа имеет свойство $E_{\{p,q\}}$ для всех простых делителей p и q ее порядка, то она разрешима. С использованием классификации простых неабелевых групп положительное решение гипотезы Ф. Холла было получено в [2]. Отметим, что в работе [3] Шпитцнагель проверил гипотезу Ф. Холла практически для всех простых групп Шевалле.

В настоящей работе с использованием теоремы о классификации простых неабелевых групп доказан значительно более общий результат.

Теорема. *Пусть G — конечная группа. Если G имеет свойство $E_{\{2,p\}}$ для всех $p \in \pi(G)\setminus\{2\}$, то она разрешима.*

Пример группы $PSL(2, 7)$ показывает, что данный результат улучшить нельзя. Действительно, данная группа содержит все бипримарные холловы подгруппы, кроме одной четного порядка $2^3 \cdot 7$.

Отметим, что доказательство теоремы не опирается на результаты работ [2, 3].

Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Используемые обозначения, в основном, стандартны. Для удобства приведем некоторые из них. Пусть G — конечная группа, тогда $\pi(G)$ — множество всех простых делителей ее порядка. Если n является целым положительным числом, то n_2 — наибольшая степень числа 2, делящая n. Для любого вещественного числа b запись $[b]$ означает целую часть этого числа; (m, n) — наибольший общий делитель натуральных чисел m, n. Следуя [4], назовем графом простых чисел $\Gamma(G)$ группы G граф с множеством вершин $\pi(G)$ и ребрами, соединяющими пару вершин p и q, в том и только в том случае, если G содержит элемент порядка pq. Множество связных компонент графа обозначим через $\{\pi_i \mid 1 \le i \le t(G)\}$; π_1 — связная компонента графа, содержащая число 2; $m_p(G)$ — p-ранг группы G. Лиевскую терминологию можно найти, например, в обзоре А. С. Кондратьева [5].

Приведем несколько результатов, которые будут использоваться в данной работе.

Определение. *Пусть r — простое число, n — натуральное число, не меньшее 2. Число r назовем примитивным по отношению к паре $\{p, n\}$, если r делит $p^n - 1$ и не делит $p^i - 1$ для любого $1 \le i < n$.*

Лемма 1 [6]. *Если $\{p, n\} \ne \{2, 6\}$ и $n > 2$, то существует простое число r, примитивное по отношению к паре $\{p, n\}$.*

Лемма 2 [7]. 1. *Пусть G — группа Шевалле лиевского ранга n. Тогда параболические подгруппы группы G, содержащие ее подгруппу Бореля, исчерпываются группами $G_I = \langle B, X_{-r_j} \mid j \notin I \rangle$, где $I \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$.*

2. *Положим $Q_I = \langle X_r \mid r \in \Phi^+$ и $r = \sum_{j=1}^{n} m_j \cdot r_j$ с $m_i > 0$ для некоторого $i \in I \rangle$ и $L_I = \langle X_{r_i}, X_{-r_i} \mid i \notin I \rangle$. Тогда:*

a) $G_I = Q_I L_I H$ *и* H *нормализует* L_I, *где* H — *подгруппа Картана в* G;

b) $Q_I = O_p(G_I)$ *и* $Q_I \cap L_I H = 1$;

c) $N_G(Q_I) = G_I$;

d) *если* $n \geq 2$, *то* L_I *является центральным произведением групп Шевалле, каждая из которых находится по связной компоненте диаграммы Дынкина группы* G *отбрасыванием вершин, входящих в* I.

В лемме 3 рассматривается следующая ситуация:

$G \cong PSU(n, q^2)$; $PSU(n+1, q^2)$, где $n \geq 3$ и нечетно; $PSp(2n, q)\,(n \geq 2)$; $P\Omega(2n+1, q)\,(n \geq 3)$; $P\Omega^-(2n, q)(n \geq 4)$ или $P\Omega^+(2n+2, q)(n \geq 3)$. Везде $q = p^m$, где p — простое число и r — простое число, примитивное по отношению к паре $\{p, 2mn\} \neq \{2, 6\}$.

Лемма 3 ([8], лемма 18). *Пусть* M — *максимальная разрешимая подгруппа группы* G *и порядок* M *делится на* r. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

a) $|M|$ *делит* $n(q^n+1)(q+1)^{-1}$ *для* $G \cong PSU(n, q^2)$;

b) $|M|$ *делит* $n(q^n+1)$ *для* $G \cong PSU(n+1, q^2)$;

c) $|M|$ *делит либо* $2n(q^n+1)(2, q-1)^{-1}$, *либо* $8n^2(2n+1)\log_2 n$ *(в последнем случае* $r = 2n+1$, $q = p > 2$ *и* n — *степень двойки) для* $G \cong PSp(2n, q)$ *или* $P\Omega^-(2n, q)$;

d) $|M|$ *делит либо* $2n(q^n+1)(2, q-1)^{-1}$, *либо* $16n^2(2n+1)\log_2 2n$ *(в последнем случае* $r = 2n+1$, $q = p > 2$ *и* n — *степень двойки) для* $G \cong P\Omega(2n+1, q)$;

e) $|M|$ *делит либо* $2n(q^n+1)(q+1)(2, q-1)^{-1}$, *либо одно из чисел* $32n^2(2n+1)\log_2 2n$, $8n^2(q+1)(2n+1)\log_2 n$ $(r = 2n+1$, $q = p > 2$ *и* n — *степень двойки) для* $G \cong P\Omega^+(2n+2, q)$.

Лемма 4 [1]. *Пусть* Σ_n — *симметрическая группа степени* n *и* $r < s \leq n$, *где* r *и* s — *простые числа. Тогда* Σ_n *имеет свойство* $E_{\{r,s\}}$, *когда* $r = 2$, $s = 3$, *а* $n = 3, 4, 5, 7, 8$.

Лемма 5. *Если* q — *нечетное число, то для любого натурального* n *имеет место неравенство* $(q^n+1)_2 \leq (q+1)_2$.

Доказательство. Если n является нечетным числом, то $q^n + 1 = (q+1) \times (q^{n-1} - q^{n-2} + q^{n-3} \ldots - q + 1)$. Поэтому $(q^n+1)_2 = (q+1)_2$ и неравенство выполняется.

Пусть $n = 2k \geq 2$ является четным числом. Положим $q = 2r+1$. Индукцией по k покажем, что $(q^{2k}+1)_2 = 2$.

Для $k = 1$ получаем $q^2 + 1 = (2r+1)^2 + 1 = 2(2r^2 + 2r + 1)$ и, очевидно, $(q^2+1)_2 = 2$.

Пусть для произвольного $k \geq 2$ выполняется равенство $(q^{2k}+1)_2 = 2$. Покажем, что $(q^{2(k+1)}+1)_2 = 2$. Имеем $q^{2(k+1)} + 1 = q^2 q^{2k} + 1 = q^2 q^{2k} + q^2 - q^2 + 1 = q^2(q^{2k}+1) - q^2 + 1$. Поскольку $(q^{2k}+1)_2 = 2$, то $q^{2k} + 1 = 2f$, где f — нечетное число. Тогда $q^{2(k+1)} + 1 = q^2 2f - q^2 + 1 = (2r+1)^2 2f - (2r+1)^2 + 1 = 2(4r^2 f + 4rf - 2r^2 - 2r + f)$. Поскольку f — нечетное число, то $(2(4r^2 f + 4rf - 2r^2 - 2r + f))_2 = 2$. Это завершает доказательство равенства. Отсюда следует, что при четном n $(q^n+1)_2 \leq (q+1)_2$.

Лемма 5 доказана.

Доказательство теоремы. Всюду далее будем считать, что G — минимальный контрпример к теореме.

А. *G — простая неабелева группа.*

Доказательство. Пусть N — собственная нетривиальная нормальная подгруппа в группе G. Очевидно, что N и G/N имеют свойство $E_{\{2,p\}}$ для всех простых чисел p, делящих их порядки. Из минимальности контрпримера и теоремы Томпсона – Фейта следует, что N и G/N являются разрешимыми группами. Поэтому группа G также разрешима, что невозможно. Таким образом, G является простой неабелевой группой.

В. *Пусть G является одной из групп следующих типов: $A_n(q)$, $n \geq 1$; $B_n(q)$, $n > 1$; $C_n(q)$, $n > 2$; $D_n(q)$, $n > 3$; $G_2(q)$; $F_4(q)$; $E_6(q)$; $E_7(q)$; $E_8(q)$. Тогда порядок любой собственной параболической подгруппы группы G взаимно прост с некоторым числом $r \in \pi(G)$.*

Доказательство. Пусть $G \cong A_n(q)$. По теореме Диксона (теорема 2.8.27 [9]) $A_1(q)$ не может быть минимальным контрпримером к теореме, поэтому $n \geq$ ≥ 2. Группа G имеет порядок $\frac{1}{(n+1, q-1)} q^{\frac{n(n+1)}{2}} \prod_{i=1}^{n}(q^{i+1}-1)$. Рассмотрим сомножитель $q^{n+1}-1$, где $n+1 > 2$. Если $\{q, n+1\} \neq \{2, 6\}$, то по лемме 1 найдется r, примитивное по отношению к паре $\{q, n+1\}$. Пусть P — произвольная параболическая подгруппа группы $A_n(q)$. Из леммы 2 следует, что $P = G_I = Q_I L_I H$, где L_I — центральное произведение групп вида $A_l(q)$ и $l < n$. Ясно, что r не делит $|L_I|$, а поэтому не делит и $|P|$. Таким образом, $\{q, n+1\} = \{2, 6\}$ и $G \cong A_5(2)$. В этом случае $(|G:P|, 3) = 3$ для любой параболической подгруппы P группы G. С другой стороны, в группе G существует холлова $\{2, 3\}$-подгруппа F, которая согласно (1.5) [10] содержится в некоторой параболической подгруппе P_1, а поэтому $(|G:P_1|, 3) = 1$, что невозможно.

Остальные случаи рассматриваются аналогично, поэтому достаточно рассмотреть включения, которые при этом возникают: $G \in \{C_3(2), G_2(2), D_4(2)\}$. Поскольку группа $G_2(2)$ не является простой, то $G \in \{C_3(2), D_4(2)\}$. В обоих случаях для каждой параболической подгруппы P группы G число 3 делит $|G:P|$. Противоречие получается точно так же, как в случае $G \cong A_5(2)$.

С. *Пусть G является одной из групп следующих типов: ${}^2B_2(q)$, $q = 2^{2m+1}$; ${}^3D_4(q)$; ${}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1}$; ${}^2E_6(q)$; ${}^2F_4(q)$, $q = 2^{2m+1}$; ${}^2A_n(q)$, $n > 1$; ${}^2D_n(q)$, $n > 3$. Тогда порядок любой собственной параболической подгруппы группы G взаимно прост с некоторым $r \in \pi(G)$.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно все случаи.

1. $G \cong {}^2B_2(q)$, $q = 2^{2m+1}$. Группа ${}^2B_2(q)$ имеет порядок $q^2(q^2+1)(q-1)$ и все ее параболические подгруппы исчерпываются борелевскими подгруппами порядка $q^2(q-1)$. Покажем, что для любого нечетного r, делящего q^2+1, выполняется соотношение $(r, q-1) = 1$. Пусть r делит q^2+1 и r делит $q -$ $- 1$. Тогда $q^2+1 = rk$ и $q-1 = rf$, где k и f — целые положительные числа. Имеем $(q-1)^2 = rk - 2q = r^2 f^2$. Отсюда следует равенство $2q = r(k - rf^2)$. Таким образом, нечетное число r делит степень числа 2. Полученное противоречие показывает, что r не делит порядка никакой параболической подгруппы группы G.

2. $G \cong {}^3D_4(q)$. Порядок группы ${}^3D_4(q)$ равен $q^{12}(q^2-1)(q^6-1)(q^8+q^4+1)$. По лемме 2 максимальные параболические подгруппы группы ${}^3D_4(q)$ имеют вид $G_I = Q_I L_I H$, где L_I есть либо группа $A_1(q)$, либо группа $A_1(q^3)$ порядков $q(q^2-1)$ и $q^3(q^6-1)$ соответственно, а порядок подгруппы Картана $|H| = (q-1)(q^3-1)$. Из [4, 11] следует, что группа ${}^3D_4(q)$ имеет в точности две связные компоненты графа $\Gamma\left({}^3D_4(q)\right)$, причем $\pi_1 = \pi(q, q^6-1)$. Таким образом, простые делители порядка G из π_2 взаимно просты с порядками всех параболических подгрупп группы ${}^3D_4(q)$.

3. $G \cong {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1}$. Группа ${}^2G_2(q)$ имеет порядок $q^3(q^3+1)(q-1)$ и все ее параболические подгруппы исчерпываются борелевскими подгруппами порядка $q^3(q-1)$. Из [4] следует, что G имеет в точности три связные компоненты графа $\Gamma(G)$, причем $\pi_1 = \pi(q, q^4-1)$. Следовательно, любое число $r \in \pi_2 \bigcup \pi_3$ не делит порядка ни одной параболической подгруппы группы ${}^2G_2(q)$.

4. $G \cong {}^2E_6(q)$. Группа ${}^2E_6(q)$ имеет порядок $\dfrac{1}{(3, q+1)} q^{36}(q^{12}-1)(q^9+1) \times$ $\times\ (q^8-1)(q^6-1)(q^5+1)(q^2-1)$. По лемме 2 ее максимальные параболические подгруппы имеют вид $G_I = Q_I L_I H$, где $L_I \in \left\{{}^2A_5(q), A_1(q) \times {}^2A_2(q), {}^2D_4(q), A_1(q^2) \times A_2(q)\right\}$. Подгруппа Картана в ${}^2E_6(q)$ имеет порядок $\dfrac{1}{(3, q+1)} \times$ $\times\ (q-1)^2(q^2-1)^2$. Из [4, 11] следует, что группа G имеет в точности две связные компоненты графа $\Gamma(G)$, причем $\pi_1 = \pi(q, q^8-1, q^{12}-1, q^5+1)$. Непосредственный подсчет показывает, что $\pi(G_I) \subseteq \pi_1$. Таким образом, все элементы из π_2 взаимно просты с порядками всех параболических подгрупп группы ${}^2E_6(q)$.

5. $G \cong {}^2F_4(q)$, $q = 2^{2m+1}$. Пусть сначала $q > 2$. $\left|{}^2F_4(q)\right| = q^{12}(q^6+1)(q^4-1) \times$ $\times\ (q^3+1)(q-1)$. По лемме 2 максимальные параболические подгруппы в ${}^2F_4(q)$ имеют вид $G_I = Q_I L_I H$, где L_I есть либо $A_1(q^2)$, либо ${}^2B_2(q)$ порядков $q^2(q^4-1)$ и $q^2(q^2+1)(q-1)$ соответственно, $|H| = (q-1)^2$. Из [11] следует, что $\Gamma(G)$ имеет в точности три связные компоненты, причем $\pi_1 = \pi\left(2(q^4-1)\right)$, поэтому $\pi(G_I) \subseteq \pi_1$ для любой параболической подгруппы G_I из ${}^2F_4(q)$. Поскольку $t(G) = 3$, то найдутся простые числа из $\pi(G)$, которые не содержатся в π_1.

Группа Титса ${}^2F_4(2)'$ не может быть минимальным контрпримером к теореме, что следует из [12].

6. $G \cong {}^2D_n(q)$, $n > 3$. Порядок группы ${}^2D_n(q)$ есть $\dfrac{1}{(4, q^n+1)} q^{n(n-1)} \times$ $\times\ (q^n+1)\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i}-1)$. По лемме 2 максимальные параболические подгруппы ${}^2D_n(q)$ имеют вид $G_I = Q_I L_I H$, где $L_I \in \left\{{}^2D_{n-1}(q), A_1(q) * {}^2D_{n-2}(q), A_2(q) * {}^2D_{n-3}(q), \ldots, A_{n-5}(q) * {}^2D_4(q), A_{n-4}(q) * {}^2B_2(q), A_{n-3}(q) * A_1(q^2), A_{n-2}(q)\right\}$. Порядок подгруппы Картана $|H| = \dfrac{1}{(4, q^n+1)}(q-1)^{n-1}(q+1)$. Покажем, что найдется $r \in \pi(G)$, которое не делит порядка ни одной параболической подгруппы

в G. Пусть r примитивно по отношению к паре $\{q, 2n\}$. Поскольку $n > 3$, то по лемме 1 такое r всегда найдется. Таким образом, r делит $q^{2n} - 1$ и r не делит $q^i - 1$ для всех $1 \le i < 2n$. Так как $q^{2n} - 1 = (q^n - 1)(q^n + 1)$, то r не делит $q^n - 1$ и делит $q^n + 1$. Очевидно, что r не делит $\prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)$. А так как для любой G_I из G (см. лемму 2) имеет место включение $\pi(G_I) \subseteq \subseteq \pi\left(q \prod_{i=1}^{n-1}(q^{2i} - 1)\right)$, то r не делит $|G_I|$.

7. $G \cong {}^2A_n(q)$, $n > 1$. Так же, как в п. 6, показывается, что найдется $r \in \pi(G)$, которое не делит порядка никакой параболической подгруппы группы G, за исключением случаев, когда $G \in \left\{{}^2A_2(2), {}^2A_3(2)\right\}$. Группа ${}^2A_2(2)$ является разрешимой и поэтому не может быть минимальным контрпримером к теореме. Следовательно, $G \cong {}^2A_3(2)$. $\left|{}^2A_3(2)\right| = 2^3 3^4 5$, поэтому по теореме 2 [13] группа G является разрешимой, что невозможно.

D. *Минимальный контрпример к теореме не может быть группой Шевалле над полем характеристики* 2.

Доказательство. Пусть G — группа Шевалле над полем характеристики 2. Из утверждений В и С следует, что найдется нечетное простое число $r \in \pi(G)$, которое не делит порядок никакой собственной параболической подгруппы группы G. Рассмотрим $R \in \mathrm{Syl}_r(G)$. Без ограничения общности можно считать, что существует холлова бипримарная подгруппа UR группы G, где U — унипотентная подгруппа в G. Если $O_2(UR) \ne 1$, то по теореме Бореля – Титса (2.4) [5] получаем $N_G(O_2(UR)) \le P$, где P — собственная параболическая подгруппа в G. Следовательно, r делит $|P|$, что невозможно. Таким образом, $O_2(UR) = 1$ и $R_0 = O_2(UR) \ne 1$.

Поскольку группа G является простой неабелевой группой, то $m_2(U) \ge 2$. Пусть $U_1 \le U$ и $U_1 \cong Z_2 \times Z_2$. Группа U_1 действует на R_0 как группа операторов. По теореме 5.3.16 [14] найдется $u_1 \in U_1^\#$, для которого $C_{R_0}(u_1) \ne 1$. Из теоремы Бореля – Титса (2.4) [5] следует, что $N_G(\langle u_1 \rangle) \le P$, где P — параболическая подгруппа в G. Таким образом, r делит $|P|$, что невозможно.

E. *Минимальный контрпример к теореме не может быть группой Шевалле над полем нечетной характеристики.*

Доказательство. Сначала рассмотрим следующие случаи: $G \cong PSU(n, q^2)$, $PSU(n+1, q^2)$, где $n \ge 3$ и n нечетно; $PSp(2n, q)$, $n \ge 2$; $P\Omega(2n+1, q)$, $n \ge 3$; $P\Omega^-(2n, q)$, $n \ge 4$; $P\Omega^+(2n+2, q)$, $n \ge 3$.

Везде $q = p^n$ — степень нечетного простого числа p. Через r обозначим простое число, примитивное по отношению к паре $\{p, 2mn\}$. Поскольку p — нечетное число, то по лемме 1 такое r всегда существует, $\varepsilon = \pm 1$ определяется из сравнения $q \equiv \varepsilon \pmod 4$.

В группе G рассмотрим максимальную разрешимую подгруппу M четного порядка, содержащую холлову $\{2, r\}$-подгруппу. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(M)$. Используя информацию о порядке группы M, приведенную в лемме 3, будем последовательно исключать перечисленные случаи.

1. $G \cong PSU(n, q^2)$.

По лемме 3 $|M|$ делит $n(q^n+1)(q+1)^{-1}$. Так как n — нечетное число, то $(q^n+1)(q+1)^{-1} = q^{n-1} - q^{n-2} + q^{n-3} - \ldots - q + 1$ является нечетным числом. Следовательно, $n(q^n+1)(q+1)^{-1}$ также нечетное число. Противоречие с тем, что M — группа четного порядка.

2. $G \cong PSU(n+1, q^2)$.

По лемме 3 $|M|$ делит $n(q^n+1)$. Применяя лемму 5, получаем следующую оценку: $|S| \le \left(n(q^n+1)\right)_2 = n_2(q^n+1)_2 \le (q+1)_2$. По лемме 4.2.2 [15] имеем $|S| = \left((q+1)^n(n+1)!/(q+1, n+1)\right)_2$, если $\varepsilon = -1$, и $2^{n-1}\left((q-1)^{\frac{n+1}{2}}\left(\frac{n+1}{2}\right)!\right)_2$, если $\varepsilon = 1$. Сначала рассмотрим случай $\varepsilon = -1$. Ясно, что $|S| \ge \left((q+1)^n\right)_2$. С другой стороны, $|S| \le (q+1)_2$. Поскольку $n \ge 3$, то это невозможно. Таким образом, $\varepsilon = 1$. В этом случае $q = 1 + 4t$ и $|S| \le (q+1)_2 = (2+4t)_2 = 2$. Противоречие с тем, что G является простой неабелевой группой.

3. $G \cong PSp(2n, q)$, $n \ge 2$.

По лемме 3 необходимо рассмотреть следующие случаи.

a) $|M|$ делит $n\left(q^n+1\right)$. По лемме 5 получаем следующую оценку: $|S| \le \left(n(q^n+1)\right)_2 = n_2(q^n+1)_2 \le n_2(q+1)_2$. С другой стороны, по лемме 4.3.2 [15]

$$|S| = \frac{1}{2}\left((q^2-1)^n n!\right)_2 = \frac{1}{2}\left((q-1)^n\right)_2\left((q+1)^n\right)_2(n!)_2 \ge$$

$$\ge \left((q+1)^n\right)_2 \frac{1}{2} 2^2 n_2 = 2n_2\left((q+1)^n\right)_2.$$

Таким образом, $|S| < |S|$, что невозможно.

b) $|M|$ делит $8 \cdot n^2(2n+1)\log_2 n\left(r = 2n+1,\ q = p,\ n = 2^l\right)$. В этом случае $|S| \le 8 \cdot 2^{2l} r_2\left(\log_2 2^l\right)_2 = 2^{2l+3} l_2 \le 2^{2l+3+\log_2 l}$. По лемме 4.3.2 [15] получаем

$$|S| = \frac{1}{2}\left((p^2-1)^n(2^l)!\right)_2 = \frac{1}{2}\left((p^2-1)^n\right)_2 2^{2^l-1} \ge \frac{1}{2} 2^{3n} 2^{2^l-1} = 2^{4\cdot 2^l-2}.$$

Противоречие следует из того, что для всех l всегда $4 \cdot 2^l - 2 > 2l + 3 + \log_2 l$.

4. $G \cong P\Omega(2n+1, q)$, $n \ge 3$.

По лемме 3 необходимо рассмотреть следующие случаи.

a) $|M|$ делит $n(q^n+1)$. По лемме 5 получаем следующую оценку:

$$|S| = \left(n(q^n+1)\right)_2 = n_2(q^n+1)_2 \le n_2(q+1)_2.$$

По лемме 4.4.2 [15] $|S| = 2^{n-1}\left((q-\varepsilon)^n(n!)\right)_2 = 2^{n-1}\left((q-\varepsilon)^n\right)_2(n!)_2$. Если $\varepsilon = -1$, то $|S| = 2^{n-1}\left((q+1)^n\right)_2(n!)_2 \ge 2^{n-1}\left((q+1)^n\right)_2 n_2$. Противоречие следует из того, что при $n \ge 3$ всегда $2^{n-1}\left((q+1)^n\right)_2 n_2 > n_2(q+1)_2$. Следовательно, $\varepsilon = 1$. В этом случае $q + 1 = 2 + 4t$ и $|S| \le 2n_2$. С другой стороны, $|S| = 2^{n-1}\left((q-1)^n\right)_2(n!)_2 \ge 2^{n-1}2^n n_2 = 2^{2n-1}n_2$. Противоречие следует из того, что при $n \ge 3$ всегда $2^{2n-1}n_2 > 2n_2$.

b) $|M|$ делит $8n^2(2n+1)\log_2 n\left(r = 2n+1,\ q = p,\ n = 2^l\right)$. Пусть сначала $\varepsilon = -1$. По лемме 4.4.2 [15] $|S| = 2^{n-1}\left((p+1)^n\right)_2(n!)_2 \ge 2^{2^l-1}2^n 2^{2^l-1} = 2^{3\cdot 2^l-1}$. В 3(b) было показано, что $|S| \le 2^{2l+3+\log_2 l}$. Противоречие следует из того, что для $l \ge 2$ всегда $3 \cdot 2^l - 1 > 2l + 3 + \log_2 l$. При $\varepsilon = 1$ получаются такие же оценки.

5. $G \cong P\Omega^-(2n, q)$, $n \geq 4$.

По лемме 3 необходимо рассмотреть следующие случаи.

a) $|M|$ делит $n(q^n+1)$. По лемме 5 получаем следующую оценку: $|S| \leq \leq \big(n(q^n+1)\big)_2 = n_2(q^n+1)_2 \leq n_2(q+1)_2$. По лемме 4.5.2 [15] имеем

$$|S| = 2^{n-1}\big((q-\varepsilon)^{n-1}(n-1)!\big)_2 = 2^{n-1}\big((q-\varepsilon)^{n-1}\big)_2((n-1)!)_2.$$

Если $\varepsilon = -1$, то $|S| = 2^{n-1}\big((q+1)^{n-1}\big)_2((n-1)!)_2$. Противоречие следует из того, что при $n \geq 4$ всегда $2^{n-1}\big((q+1)^{n-1}\big)_2((n+1)!)_2 > (q+1)_2 n_2$. Следовательно, $\varepsilon = = 1$. В этом случае

$$|S| = 2^{n-1}\big((q-1)^{n-1}\big)_2((n-1)!)_2 \geq 2^{n-1}2^{2n-2}((n-1)!)_2 = 2^{3n-3}((n-1)!)_2.$$

Поскольку $q = 1 + 4t$, то $(q+1)_2 = 2$ и $|S| \leq 2n_2$. Противоречие следует из того, что при $n \geq 4$ всегда $2^{3n-3}((n-1)!)_2 > 2n_2$.

b) $|M|$ делит $8n_2(2n+1)\log_2 n\big(r = 2n+1,\ q = p,\ n = 2^l\big)$. Как в 3(b), показывается, что $|S| \leq 2^{2l+3+\log_2 l}$. Пусть сначала $\varepsilon = -1$. Тогда

$$|S| = 2^{n-1}\big((q+1)^{n-1}\big)_2((n-1)!)_2 \leq 2^{2^l-1}2^{2(2^l-1)}\big((2^l-1)!\big)_2 =$$

$$= 2^{3\cdot 2^l-3}2^{2^l-1}2^{-l} = 2^{4\cdot 2^l-l-4}.$$

Противоречие следует из того, что при $l \geq 2$ всегда $4\cdot 2^l - l - 4 > 2l + 3\log_2 l$. При $\varepsilon = 1$ получается точно такая же оценка.

6. $G \cong P\Omega^+(2n+2)$, $n \geq 3$.

По лемме 3 необходимо рассмотреть следующие случаи.

a) $|M|$ делит $n(q^n+1)(q+1)$. По лемме 5 получаем следующую оценку: $|S| \leq n_2\big((q+1)^2\big)_2$. По лемме 4.5.2 [15] $|S| = 2^{n-2}\big((q-\varepsilon)^{n+1}(n+1)!\big)_2 = = 2^{n-2}\big((q-\varepsilon)^{n+1}\big)_2((n+1)!)_2$. Пусть сначала $\varepsilon = -1$. Тогда

$$|S| = 2^{n-2}\big((q+1)^{n+1}\big)_2((n+1)!)_2 \geq 2^{n-2}\big((q+1)^4\big)_2 n_2.$$

Противоречие следует из того, что для $n \geq 3$ всегда $2^{n-2}\big((q+1)^4\big)_2 n_2 > > \big((q+1)^2\big)_2 n_2$. Следовательно, $\varepsilon = 1$. В этом случае $(q+1)_2 = 2$ и $|S| \leq 4n_2$. По лемме 4.5.2 [15] $|S| = 2^{n-2}\big((q-1)^{n+1}\big)_2((n+1)!)_2 \geq 2^{n-2}2^{2n+2}n_2 = 2^{3n}n_2$. Противоречие следует из того, что при $n \geq 3$ всегда $2^{3n}n_2 > 4n_2$.

b) $|M|$ делит $32n^2(2n+1)\log_2 2n\big(r = 2n+1,\ q = p,\ n = 2^l\big)$. В этом случае $|S| \leq 32\big(n^2\big)_2(2n+1)_2(\log_2 2n)_2 = 2^5 2^{2l}(l+1)_2 \leq 2^{2l+5+\log_2(l+1)}$. По лемме 5.4.2 [15] при $\varepsilon = -1$ получаем

$$|S| = 2^{2^l-2}\big((q+1)^{n+1}\big)_2\big((2^l+1)!\big)_2 \geq 2^{2^l-2}2^{2n+2}2^{2^l-1} = 2^{4\cdot 2^l-1}.$$

Противоречие следует из того, что при $l \geq 2$ всегда $4\cdot 2^l - 1 > 2l + 5 + + \log_2(l+1)$. При $\varepsilon = 1$ получаются такие же оценки.

c) $|M|$ делит $8n^2(q+1)(2n+1)\log_2 n\big(r = 2n+1,\ q = p,\ n = 2^l\big)$. В этом случае

$|S| \le 2^3 2^{2l}(q+1)_2(2n+1)_2\left(\log_2 2^l\right)_2 \le 2^{2l+3}(q+1)_2 2^{\log_2 l} = 2^{2l+\log_2 l+3}(q+1)_2$.
Пусть $\varepsilon = -1$. По лемме 4.5.2 [15]

$$|S| = 2^{n-2}\left((q+1)^{n+1}\right)_2((n+1)!)_2 \ge 2^{2^l-2}(q+1)_2\left((q+1)^n\right)_2 2^{2^l-1} \ge$$

$$\ge 2^{2\cdot 2^l-3}2^{2\cdot 2^l}(q+1)_2 = 2^{4\cdot 2^l-3}(q+1)_2.$$

Противоречие следует из того, что при $l \ge 2$ всегда $4\cdot 2^l - 3 > 2l + \log_2 l + 3$. Рассмотрим случай $\varepsilon = 1$. Тогда $(q+1)_2 = 2$ и $|S| \le 2^{2l+\log_2 l+3}$. По лемме 4.5.2 [15] $|S| \ge 2^{4\cdot 2^l-2}$. Противоречие следует из того, что при $l \ge 2$ всегда $4\cdot 2^l - 2 > 2l + \log_2 l + 4$.

d) $|M|$ делит $2(2n+2)^2(2n+1)\log_2(2n+2)\left(r = 2n+1,\ q = p,\ n = 2^l\right)$. В этом случае

$$|S| \le 2\left((2n+2)^2\right)_2(2n+1)_2\left(\log_2(2n+2)\right)_2 =$$

$$= 2\left((2\cdot 2^l+2)^2\right)_2\left(\log_2(2\cdot 2^l+2)\right)_2 = 2\cdot 2^2\left(\log_2 2(2^l+1)\right)_2 =$$

$$= 2^3\left(1+\log_2(2^l+1)\right)_2 \le 2^{3+1+\log_2(2^l+1)} = 2^{\log_2(2^l+1)+4}.$$

Если $\varepsilon = -1$, то $|S| \ge 2^{4\cdot 2^l-1}$. Противоречие следует из того, что при $l \ge 2$ всегда $4\cdot 2^l - 1 > \log_2(2^l+1)+4$. При $\varepsilon = 1$ получаются точно такие же оценки.

Рассмотрим случай $G \cong PSL(n,q)$, $n \ge 2$. В предыдущих обозначениях будем полагать, что r — простое число, примитивное по отношению к паре $\{p, mn\}$.

Если $G \cong PSL(2,q)$, то в G не существует бипримарной холловой $\{2,p\}$-подгруппы, поэтому $G \cong PSL(n,q)$ и $n \ge 3$. Пусть $S \in \mathrm{Syl}_2(M)$. По лемме 16 [8] необходимо рассмотреть следующие случаи.

a) $|M| = \dfrac{n(q^n-1)}{(q-1)(n,q-1)}$. Так как

$$|G| = (n,q-1)^{-1}(q^2-1)(q^3-1)\ldots(q^n-1)q^{\frac{n(n-1)}{2}} =$$

$$= q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)(q^2-1)\ldots(q^{n-1}-1)\frac{q^n-1}{(q-1)(n,q-1)},$$

то $|G:M| = q^{\frac{n(n-1)}{2}}(q-1)(q^2-1)\ldots(q^{n-1}-1)n^{-1}$. Отсюда следует, что

$$|G:M|_2 = (q-1)_2(q^2-1)_2\ldots(q^{n-1}-1)_2\frac{1}{n_2} \ge \frac{2^n}{n_2} \ge \frac{2^n}{2^{\log_2 n}} = 2^{n-\log_2 n}.$$

Так как $n \ge 3$, то $|G:M|_2 \ge 2$, что противоречит выбору M.

b) $|M|$ делит $2n^2(n+1)(q-1,\ n)^{-1}\log_2 n\left(r = n+1,\ q = p,\ n = 2^l\right)$. В этом случае

$$|S| \le 2\cdot 2^{2l}r_2\left(\log_2 2^l\right)_2\frac{1}{2(q-1,n)_2} = 2^{2l+1}l_2\frac{1}{(q-1,n)_2} \le 2^{2l+\log_2 l+1}\frac{1}{(q-1,n)_2}.$$

Пусть сначала $\varepsilon = 1$. По лемме 4.2.2 [15]

$$|S| = \left((q-1)^{n-1}\right)_2 (n!)_2 \frac{1}{(q-1, n)_2} \geq$$

$$\geq 2^{2n-2}\, 2^{2^l - 1} \frac{1}{(q-1, n)_2} = 2^{3\cdot 2^l - 3} \frac{1}{(q-1, n)_2}.$$

Противоречие следует из того, что для всех $l \geq 2$ всегда $3\cdot 2^l - 3 > 2l - \log_2 l + 1$. Следовательно, $\varepsilon = -1$. По лемме 4.2.2 [15]

$$|S| = 2^{n-(2,n)} \left((q+1)^{\left[\frac{n}{2}\right]} \left[\frac{n}{2}\right]!\right)_2 = 2^{n-2} \left((q+1)^{\frac{n}{2}}\right)_2 \left[\left(\frac{n}{2}\right)!\right]_2 \leq$$

$$\leq 2^{2^l - 2}\, 2^n \left[\left(2^{l-1}\right)!\right]_2 = 2^{2^l - 2}\, 2^{2^l}\, 2^{2^{l-1} - 1} = 2^{2\cdot 2^l + 2^{l-1} - 3}.$$

С другой стороны,

$$|S| \leq 2^{2l + \log_2 l + 1} \frac{1}{(q-1, n)_2} \leq 2^{2l + \log_2 l}.$$

Противоречие следует из того, что для всех $l \geq 2$ выполняется $2\cdot 2^l + 2^{l-1} - 3 > > 2l + \log_2 l$.

Пусть $G \in \left\{E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q), {}^2E_6(q), {}^3D_4(q), G_2(q), {}^2G_2(q)\right\}$. Порядки всех максимальных подгрупп, содержащих силовскую 2-подгруппу группы G, приведены в табл. 1 [16].

1. $G \in \{E_6(q), E_7(q), E_8(q), F_4(q)\}$.

Пусть r — простое число, примитивное по отношению к паре $\{q, n\}$, где n соответственно равно 12, 18, 30, 12. Из табл. 1 [16] следует, что r взаимно просто с порядками всех подгрупп, содержащих силовскую 2-подгруппу группы G. Поэтому G не содержит холловых $\{2, r\}$-подгрупп.

2. $G \cong {}^2E_6(q)$.

Группа ${}^2E_6(q)$ содержит абелеву холлову подгруппу порядка $(q^6 - q^3 + 1) \times \times (3, q+1)^{-1}$ [4]. Из табл. 1 [16] следует, что порядок этой холловой подгруппы взаимно прост с порядками всех подгрупп, содержащих силовскую 2-подгруппу группы G. Поэтому G не содержит холловых $\{2, r\}$-подгрупп для всех $r \in \pi\left((q^6 - q^3 + 1)(3, q+1)^{-1}\right)$.

3. $G \cong {}^3D_4(q)$.

Порядок группы G запишем в виде $|G| = q^{12}(q^6 - 1)^2(q^4 - q^2 + 1)$. Группа ${}^3D_4(q)$ содержит абелеву холлову подгруппу порядка $q^4 - q^2 + 1$ [4]. Из табл. 1 [16] следует, что порядок этой холловой подгруппы взаимно прост с порядками всех подгрупп, содержащих силовскую 2-подгруппу группы G. Поэтому G не содержит холловых $\{2, r\}$-подгрупп для всех $r \in \pi(q^4 - q^2 + 1)$.

4. $G \cong G_2(q)$.

Если $q \equiv 0 \pmod 3$, то группа G содержит абелеву холлову подгруппу порядка $q^2 - q + 1$ [4]. Из табл. 1 [16] следует, что порядок этой холловой подгруппы взаимно прост с порядками всех подгрупп, содержащих силовскую 2-подгруппу группы G. Поэтому G не содержит холловых $\{2, r\}$-подгрупп для всех $r \in \pi(q^2 - q + 1)$.

Случаи $q \equiv -1 \pmod 3$ и $q \equiv 1 \pmod 3$ рассматриваются аналогично.

Порядки абелевых холловых подгрупп соответственно равны q^2+q+1 и q^2-q+1 [4].

5. $G \cong {}^2G_2(q)$.

Группа ${}^2G_2(q)$ содержит две абелевы холловы подгруппы порядков $q^2-\sqrt{3q}+1$ и $q^2+\sqrt{3q}+1$ [4]. Из табл. 1 [16] следует, что порядки этих холловых подгрупп взаимно просты с порядками всех подгрупп, содержащих силовскую 2-подгруппу группы G. Поэтому G не содержит холловых $\{2, r\}$-подгрупп для всех $r \in \pi\left(q^2 \pm \sqrt{3q}+1\right)$. Получили противоречие.

F. *Минимального контрпримера к теореме не существует.*

Доказательство. Из утверждений C и D следует, что G либо знакопеременная группа A_n, $n \geq 5$, либо спорадическая группа. Случай, когда $G \cong A_n$, исключается с помощью леммы 4. Из [12] следует, что G не может быть спорадической группой.

1. *Hall P.* Theorems like Sylow's // London Math. Soc. – 1956. – **6**, № 3. – P. 286 – 304.
2. *Arad Z., Ward M.* New criteria for the solvability of finite groups // J. Algebra. – 1982. – **77**. – P. 234 – 246.
3. *Spitznagel E. L.* Hall subgroups of certain families of finite groups // Math. Z. – 1967. – **97**, № 4. – P. 259 – 290.
4. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. – 1981. – **69**. – P. 487 – 513.
5. *Кондратьев А. С.* Подгруппы конечных групп Шевалле // Успехи мат. наук. – 1986. – **41**, № 1 (247). – С. 57 – 96.
6. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monath. Math. Phis. – 1892. – **3**. – P. 265 – 284.
7. *Curtis C. W., Kantor W. M., Seitz G. M.* The 2-transitive permutation representations of the finite Chevalley group // Trans. Amer. Math. Soc. – 1976. – **218**. – P. 1 – 59.
8. *Kazarin L. S.* Product of two solvable subgroups // Communs Algebra. – 1986. – **14**, № 6. – P. 1001 – 1066.
9. *Huppert B.* Endliche Gruppen. – Berlin: Springer-Verlag, 1967.
10. *Казарин Л. С.* Автоморфизмы, факторизации и теоремы типа Силова // Мат. сб. – 1983. – **120**, № 2. – С. 190 – 199.
11. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Там же. – 1989. – **180**, № 6. – С. 787 – 797.
12. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* An atlas of finite groups. – Oxford: Clarendon Press, 1985.
13. *Тютянов В. Н.* О факторизации конечных групп разрешимыми подгруппами. – Минск, 1990. – 14 с. – (Препринт / АН БССР. Ин-т математики; № 48 (448)).
14. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper and Row, 1968.
15. *Kleidman P.* A proof of the Kegel – Wielandt conjecture on subnormal subgroups // Ann. Math. – 1991. – **133**. – P. 369 – 428.
16. *Liebeck M. W., Saxl J.* The primitive permutation groups of odd degree // J. London Math. Soc. – 1985. – **31**, № 2. – P. 250 – 264.

Получено 18.02.2002